

Método alternativo de cálculo de la longitud de los carriles de cambio de velocidad



Juan Diamante Corbín

Doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Prof. titular de Mecánica del Medio Continuo y Teoría de Estructuras. UPC, en excedencia.

Asesor de BAC, Engineering Consultancy Group, SL

Resumen

El borrador de la Norma de Trazado 3.1-IC 2014 presenta algunos temas novedosos y también algunos enfoques distintos de los considerados en la actual Norma de Trazado 3.1-IC 2000. De dichos enfoques el más relevante es del cálculo de las longitudes de los carriles de cambio de velocidad, concretamente de los carriles de aceleración, ya que en lo que respecta a los carriles de deceleración se mantiene la formulación de la actual Norma de Trazado 3.1-IC 2000.

La Norma de Trazado 3.1-IC 2014 para deducir la longitud de los carriles de aceleración plantea un sistema de dos ecuaciones cuya solución (suponiendo que dicha solución sea la expresión de la pág. 223) no está bien resuelta y por ello la solución aportada no es aplicable.

En el presente trabajo nos apoyamos en el Teorema de las Fuerzas Vivas con lo cual es posible deducir una solución de aplicación directa de la longitud de los carriles de aceleración y deceleración, fácilmente programable en una hoja de cálculo.

Palabras clave

Carriles, longitud, aceleración, desaceleración

Abstract

New themes and a different approach on several points are included and considered in the "3.1-IC 2014" draft, compared to the present "3.1-IC 2000". From the above mentioned approaches, the one referred to length calculation on the speed change lanes has to be considered as the most relevant, whereas on the case of the deceleration lanes, "3.1-IC 2000" is still of valid use and application.

"3.1-IC 2014" fails on its purpose of calculating the length of the acceleration lanes, due to an error on the simultaneous equations (considering results given on page 223). Therefore we sustain that the numerical solution obtained has no possible application.

On the following pages, through the second Newton Law, we intend to reach an alternative solution that can be easily implemented on a spreadsheet. Thus enabling direct calculation of the acceleration and deceleration lanes lengths.

Keywords

Lanes, length, acceleration, deceleration

1. Planteamiento

En el presente trabajo se pretende establecer una fórmula de cálculo de la longitud de los carriles de aceleración, dado que, por un lado, la fórmula de la actual Norma de Trazado 3.1-IC 2000 no se demuestra y que, por otro, en la Norma de Trazado 3.1-IC 2014 –pendiente de aprobación– no se propone una fórmula explícita, sino que se sustituye por una tabla (tabla 8.2) cuyos valores y aplicación de los mismos suscita algunos interrogantes, como veremos.

Según el Anexo de Definiciones de la actual Norma de Trazado 3.1-IC 2000, un carril de cambio de velocidad es un carril

destinado a que un vehículo pueda incrementar o reducir la velocidad cuando abandona una calzada en la que se puede circular a una velocidad V_1 para incorporarse a otra calzada en la que se puede circular a una velocidad distinta V_2 .

La geometría de los carriles de cambio de velocidad se define en la figura 1, tomada del borrador de la Norma de Trazado 3.1-IC 2014. A nuestro entender la propuesta de la Norma 3.1-IC 2014 para la definición de la planta de los carriles de aceleración y deceleración tipo paralelo es mejor que la de la actual Norma 3.1-IC 2000, ya que en esta última el 57 % de la longitud de las cuñas de transición forman parte de la longitud dichos carriles,

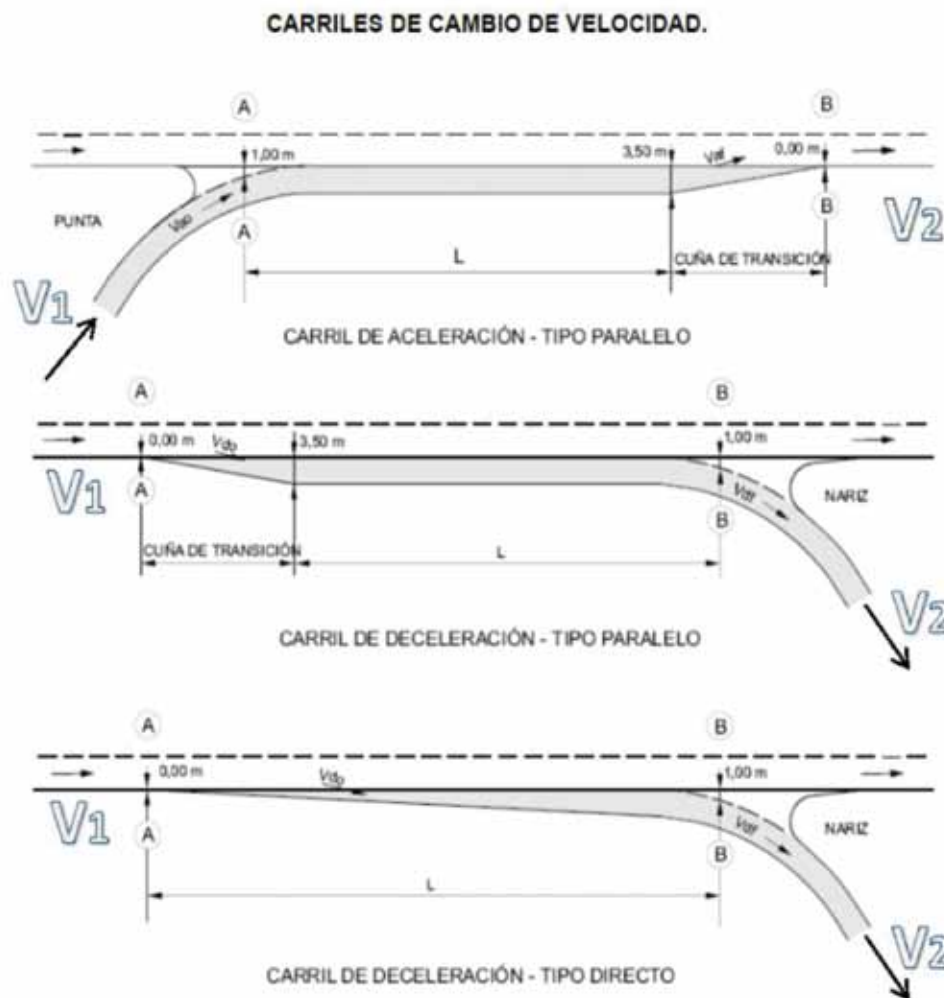


Fig. 1. Tomada del borrador de la Norma 3.1-IC 2014

y opinamos que es más claro separar la longitud de los carriles propiamente dichos de la longitud de las cuñas de transición.

En el carril de aceleración tipo paralelo, V_{ao} es la velocidad que se asume tomará un vehículo al abandonar un ramal de enlace, o una carretera secundaria, donde se circula a velocidad V_1 , para al final de la longitud L llegar con una velocidad V_{af} ($V_{af} > V_{ao}$) apropiada para incorporarse a una carretera, autovía o autopista de velocidad V_2 , a través de una cuña de transición. Se supone también que V_2 es mayor que V_1 .

En el carril de deceleración tipo paralelo, V_{do} es la velocidad que se asume tomará un vehículo al abandonar una carretera, autovía o autopista de velocidad V_1 , para al final de la longitud L llegar con una velocidad V_{df} ($V_{df} < V_{af}$) apropiada para

incorporarse a un ramal de enlace o una carretera secundaria donde se circula a velocidad V_2 . El carril de deceleración tipo directo es, geoméricamente, análogo al anterior. Se supone en este caso que V_2 es menor que V_1 . En todos los casos entendemos que las señales de las velocidades V_{ao} , V_{do} , V_{af} y V_{df} se encuentran colocadas en los extremos del carril de longitud L , según estos extremos se definen en la figura 1.

2. Cálculo de la longitud L_c de los carriles de aceleración

En lo que sigue, para simplificar las fórmulas, a la velocidad de entrada en el carril la llamaremos V_0 y a la velocidad de salida V_f . La longitud del carril de aceleración la designaremos por L_c .

Supondremos también que el carril está en rampa ($i > 0$) o pendiente ($i < 0$) como ocurre en la práctica totalidad de los

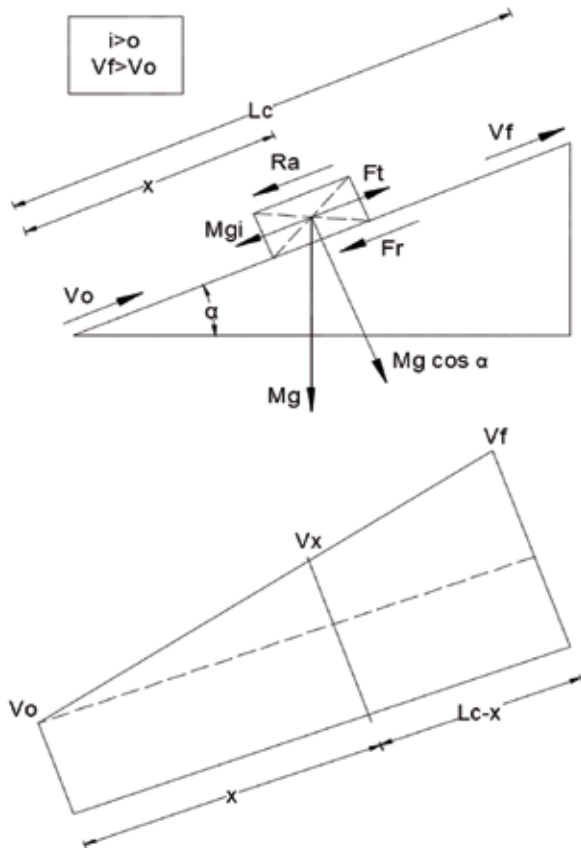


Fig. 2

casos y forma por lo tanto un ángulo α con la horizontal. Finalmente supondremos que la variación de velocidad entre V_0 y V_f es lineal.

A una distancia x del origen del carril de aceleración, la velocidad V_x valdrá:

$$V_x = V_0 + (V_f - V_0) \cdot \frac{x}{L_c}$$

Los valores V_0 (sea V_{ao} o V_{do}) y V_f (sea V_{af} o V_{df}) los establece el proyectista de trazado y señalización. Si se están considerando carriles de aceleración la velocidad final V_f ha de ser siempre mayor que la velocidad inicial V_0 , y en el caso de carriles de deceleración la velocidad final V_f ha de ser siempre menor que la velocidad inicial V_0 .

La suposición de una variación lineal de la velocidad creemos que es aceptable y cómoda para cálculos posteriores. De

hecho es la suposición que implícitamente se hace en la fórmula de la longitud de los carriles de deceleración tanto en la Norma 3.1-IC 2000 como en la Norma 3.1-IC 2014, ya que se asume una deceleración constante. Ver apartado 3.1 de este trabajo.

2.1. Planteamiento del cálculo de L_c

Para el cálculo de L_c asumiremos las siguientes consideraciones de partida (ver figura 2):

a) La longitud L_c se calcula entre las secciones donde en el proyecto de trazado y señalización, se disponen las señales de velocidad V_0 y V_f (ver figura 1). El resultado del cálculo de L_c puede implicar la modificación de la posición inicial de las señales y con ello la modificación de la posición de las cuñas de transición.

b) Supondremos que el carril de cambio de velocidad tiene una pendiente constante $i = \sin \alpha$. Si el carril es de subida (rampa) se tendrá $i > 0$. En el caso contrario de carriles de bajada (pendiente) se tendrá $i < 0$. En ambos casos se asumirá:

$$i = \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha, \text{ así como: } \cos \alpha = 1$$

c) Aplicaremos el Teorema de la Fuerzas Vivas, que en el caso que estamos considerando establece que la variación de la energía cinética del vehículo entre el inicio y el final del carril de cambio de velocidad, es igual al trabajo de las fuerzas que actúan sobre dicho vehículo entre el inicio y el final del carril de cambio de velocidad.

2.1.1. Cálculo de la variación de la energía cinética

Si M es la masa del vehículo tipo que se va a considerar, la variación de la energía cinética a lo largo del carril de aceleración es:

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot V_f^2 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_0^2$$

2.1.2. Cálculo de las fuerzas que actúan sobre el vehículo a lo largo del carril de aceleración

2.1.2.1. Fuerzas derivadas de la masa del vehículo

Ver figura 2.

• Peso del vehículo = $M \cdot g$

Componente del peso del vehículo perpendicular al carril de aceleración:

$$M \cdot g \cdot \cos \alpha \cong M \cdot g$$

La componente del peso del vehículo al ser perpendicular al plano del carril del cambio de velocidad no realiza ningún trabajo, pero si genera una resistencia a la rodadura R_r paralela al plano del carril de cambio de velocidad, que vale:

$$R_r = -f_r \cdot M \cdot g$$

El parámetro f_r se puede tomar de la siguiente tabla¹:

Tipo Vehículo	Superficie de rodadura		
	Asfalto	Dureza media	Arena
Turismos	0,015	0,08	0,3
Camiones	0,012	0,06	0,25
Tractores	0,02	0,04	0,2

Adoptamos el valor de $f_r = 0,015$, aunque en las hojas de cálculo Excel que se incluyen en este artículo, se puede entrar con el valor de f_r que se considere más apropiado. En definitiva se tiene:

$$R_r = -0,015 \cdot M \cdot g$$

Esta fuerza es paralela al plano del carril de aceleración y dirigida siempre en sentido contrario al avance del vehículo, por lo que su signo es negativo.

Componente del peso paralela al plano de carril de aceleración

Vale: $R_i = -M \cdot g \cdot i$

Esta fuerza es paralela al plano del carril de aceleración y dirigida siempre (si $i > 0$) en sentido descendente (ver unas consideraciones adicionales sobre este tema en el apartado 2.1.3.5 donde tiene más sentido plantearlas).

2.1.2.2. Fuerza derivada de la resistencia aerodinámica

La expresión de la misma es²:

$$R_a = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_x \cdot A_f \cdot V^2$$

Siendo:

μ = Densidad del aire.

C_x = Coeficiente aerodinámico.

A_f = Área frontal del vehículo.

V = Velocidad de avance del vehículo.

2.1.2.2.1. Densidad del aire

La densidad del aire, μ , es función de la altitud según la siguiente tabla³:

Cota (m)	μ (kg/m ³)
0	1.225
500	1.168
1000	1.112
1500	1.059
2000	1.007
2500	0.957
3000	0.909

en la que evidentemente se puede interpolar.

2.1.2.2.2. Coeficiente aerodinámico C_x

En la Norma 3.1-IC 2014, para el vehículo ligero con motor de 85 CV de potencia, se preconiza un $C_x = 0,4$.

En la publicación de la Universidad Carlos III, que venimos consultando, para cada uno de los cuatro perfiles longitudinales (o contornos) básicos que se consideran de un vehículo, se establece un coeficiente C_x . El problema es que en la definición de los cuatro contornos básicos no queda clara una diferencia entre ellos⁴. Los valores de C_x que se proponen son 0,16-0,18-0,24 y 0,30. A la vista de lo anterior hemos optado por considerar la media aritmética y asumir un $C_x = 0,22$.

No obstante en las hojas de cálculo Excel, se puede introducir el valor que se desee para C_x .

2.1.2.2.3. Área frontal A_f

El área frontal A_f —según la publicación de la Universidad Carlos III— es igual a:

$$A_f = f \cdot b \cdot h$$

siendo f un coeficiente entre 0,8 y 0,85 que finalmente tomaremos como $f = 0,825$. El ancho b se define como la distancia horizontal entre los extremos de los espejos retrovisores cuando ambos están totalmente abiertos y h se define como la altura entre el suelo de la calzada y el techo del vehículo. Aquí también según el tipo de coche se explicita un área frontal:

Tipo de coche	A_f (m ²)
Mini	1,8
Medio	1,9
Medio superior	2,0
Grande	2,1

En la Norma 3.1-IC 2014, el vehículo tipo o vehículo patrón –que se considera vehículo ligero– tiene un área frontal de 2,50 m², en lo que sigue adoptaremos el valor Af=2,10 m², o sea el máximo de la tabla anterior. En las hojas de cálculo Excel se puede introducir el valor que se desee y hemos introducido el valor Af=2,50 m² ya que con dichas hojas se comprobará la tabla 8.2 de la Norma 3.1-IC 2014 y es necesario ser coherente, para poder contrastar resultados.

Creemos oportuno comentar aquí que en el Anexo 2 del borrador de la Norma 3.1-IC 2014, se expone un esquema de cálculo prácticamente idéntico al anterior, pero en el mismo Anexo 2 del citado borrador de la Norma 3.1-IC 2014 se indica luego que la resistencia aerodinámica se puede despreciar.

No somos de la misma opinión, la resistencia aerodinámica en ocasiones alcanza valores numéricos no despreciables, similares e incluso superiores a los de la resistencia a la rodadura, como se podrá comprobar más adelante en página 19.

2.1.2.2.4. Velocidad del vehículo

Ya se ha establecido anteriormente:

$$V_x = V_0 + (V_f - V_0) \cdot \frac{x}{L_c}$$

Donde Lc todavía no se conoce.

2.1.2.3. Fuerza tractora del vehículo

Por definición de potencia, la fuerza tractora del vehículo es:

$$F_t = \eta \cdot \frac{H}{V_x}$$

Siendo:

H= Potencia del motor.

η= Coeficiente de rendimiento de la transmisión (aprox. =0,80).

Vx= Velocidad del vehículo.

En la Norma 3.1-IC 2014, todavía no aprobada oficialmente, se utiliza un vehículo patrón cuyas características dinámicas y geométricas son:

Evidentemente se puede utilizar si procede, un vehículo distinto, si se conocen sus características dinámicas y geométricas.

2.1.3. Cálculo de la longitud del carril de aceleración (Lc)

Aplicando el Teorema de las Fuerzas Vivas, se tiene:

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot V_f^2 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_0^2 = \text{Trabajo de las fuerzas actuan-} \\ \text{tes sobre el vehículo.}$$

2.1.3.1.-Trabajo de la fuerza tractora (Ft)

$$W(F_t) = \int_0^{L_c} \eta \cdot (H/V_x) \cdot dx = \eta \cdot H \cdot \int_0^{L_c} \left(\frac{dx}{V_0 + \frac{V_f - V_0}{L_c} \cdot x} \right) = \\ = \eta \cdot H \cdot \frac{L_c}{(V_f - V_0)} \cdot \int_{V_0}^{V_f} \frac{dt}{t} = \eta \cdot H \cdot \frac{L_c}{(V_f - V_0)} \cdot (\ln V_f - \ln V_0) \\ = \eta \cdot H \cdot \frac{L_c}{(V_f - V_0)} \cdot \ln \frac{V_f}{V_0}$$

Donde se ha hecho el cambio de variable: $t = V_0 + \frac{V_f - V_0}{L_c} \cdot x$

2.1.3.2. Trabajo para vencer la resistencia del aire (Ra)

$$Ra = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_x \cdot Af \cdot V^2 = 0,5 \cdot 1,168 \cdot 0,22 \cdot 2,10 \cdot \left(V_0 + \frac{V_f - V_0}{L_c} \cdot x \right)^2 = \\ = 0,269 \cdot \left(V_0 + \frac{V_f - V_0}{L_c} \cdot x \right)^2 \\ W(R_a) = - \int_0^{L_c} 0,269 \cdot \left(V_0 + \frac{V_f - V_0}{L_c} \cdot x \right)^2 dx = \\ = -0,089 \cdot (V_0^2 + V_0 \cdot V_f + V_f^2) \cdot L_c$$

Si se modifican los valores de μ, C_x, Af, solamente variará el coeficiente numérico de la anterior expresión.

Vehículo	Potencia del motor (CV)	1 CV	Peso/potencia P/h (kg/Kw)	Área frontal (m ²)	Cx
Ligero	85	735,49 w	20	2,5	0,4

2.1.3.3. Trabajo para vencer la resistencia a la rodadura (R_r)

$$W(R_r) = -0,015 \int_0^{L_c} M \cdot g \cdot dx = -0,015 \cdot M \cdot g \cdot L_c$$

2.1.3.4. Trabajo para vencer la componente del peso del vehículo paralela al plano del carril de aceleración

$$W(R_i) = - \int_0^{L_c} M \cdot g \cdot i \cdot dx = -M \cdot g \cdot i \cdot L_c$$

2.1.3.5. Expresión explícita de la longitud L_c del carril de aceleración

De la ecuación:

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot V_f^2 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_0^2 = W(F_t) + W(R_a) + W(R_r) + W(R_i)$$

Se despeja el valor de L_c :

$$L_c = \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot (V_f^2 - V_0^2)}{\eta \cdot \frac{H}{(V_f - V_0)} \cdot \ln \frac{V_f}{V_0} - M \cdot g \cdot i - f_r \cdot M \cdot g - 0,089 \cdot (V_0^2 + V_0 \cdot V_f + V_f^2)}$$

En esta expresión se deben introducir los coeficientes necesarios para que aplicados a las unidades que se estén empleando, el resultado L_c venga dado en metros (ver apartado 6.1, donde se señalan las unidades de cada componente de la fórmula anterior, para que L_c resulte en metros).

Por otra parte en el denominador de L_c , la resistencia a la rodadura ($f_r \cdot M \cdot g$) y la resistencia aerodinámica $0,089 \cdot (V_0^2 + V_0 \cdot V_f + V_f^2)$, se oponen siempre a la fuerza tractora del vehículo. En lo que respecta a la componente del peso del vehículo paralela a la superficie del carril de aceleración Mgi , si la i (inclinación del carril de aceleración) es positiva (inclinación en rampa) el signo menos de $-Mgi$ en la fórmula tiene sentido porque actúa en sentido contrario a la fuerza tractora del vehículo disminuyendo el denominador y aumentando el valor de L_c , lo cual es lógico ya que la fuerza tractora necesita más recorrido para poder alcanzar la velocidad final.

Si la i (inclinación del carril de aceleración) es negativa (inclinación en pendiente) el signo menos de $-Mgi$ pasa a ser positivo lo cual tiene sentido porque aumenta el denominador y disminuye el valor de L_c , lo cual también es lógico ya en este caso la fuerza tractora del vehículo esta ayudada por la componente del peso del vehículo paralela al carril y necesita menos recorrido para alcanzar la velocidad final.

2.1.4. Longitud de las cuñas de transición

Sobre la longitud de las cuñas de transición no tenemos nada que objetar a la propuesta de la Norma 3.1-IC 2014, que se reproduce en la siguiente tabla:

Vp (km/h)	L cuña (m)
130= $\leq$ Vp $\leq$ 140	Vp+10
Vp=120	135
Vp=110	135
Vp=100	125
Vp=90	115
Vp=80	100
Vp=70	80
Vp=60	60
Vp=50	40
Vp=40	25

Siendo Vp la velocidad de proyecto del vial al que se adosa la cuña de transición (ver figura 1). En la Norma 3.1-IC 2000 se establece:

Lcuña		
Vp (Km/h)	De aceleración	De deceleración
Vp $\leq$ 80	70	133
Vp= 100	83	167
Vp=120	100	175

Como se puede comprobar, los valores de Lcuña de la Norma 3.1-IC 2014 para Vp= 80,100 y 120 km/h son, a efectos prácticos, la semisuma de las cuñas de aceleración y deceleración para dichas velocidades en la Norma 3.1-IC 2000. Nuestra opinión es que es preferible la propuesta de la Norma 3.1-IC 2014.

3. Cálculo de la longitud L (o Ld) de los carriles de deceleración

Dado que tanto la actual Norma 3.1-IC 2000, como la Norma 3.1-IC 2014 pendiente de aprobación, utilizan la misma fórmula para el cálculo de la longitud del carril de deceleración, dicha fórmula también se asumirá en el presente trabajo y se deduce la misma en el siguiente apartado.

3.1. Deducción de la formula de Ld empleada en la Norma 3.1-IC 2000 y en la Norma 3.1-IC 2014

La expresión de la longitud de los carriles de deceleración es:

$$L_d = \frac{V_{do}^2 - V_{df}^2}{254 \cdot i + 50}$$

Se puede demostrar la ecuación anterior, si consideramos por conveniencia un carril de deceleración en pendiente es decir $i < 0$, donde forzosamente la velocidad inicial V_0 ha de ser superior a la velocidad final V_f . Sobre un vehículo actúa, debido a su peso propio, la fuerza $M \cdot g \cdot i$ en dirección descendente así como la fuerza tractora $F_t = M \cdot a$ también en dirección descendente, siendo a la deceleración media constante que se puede tomar⁵ como $a=7$ (km/h)/s que es igual (teniendo en cuenta que 1 km/h = 1/3,6 m/s) a 7/3,6 m/s².

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas, se tiene:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot V_0^2 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_f^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{3,6} \right)^2 = \left(M \cdot \frac{7}{3,6} + M \cdot g \cdot i \right) \cdot L_d$$

$$L_d = \frac{V_0^2 - V_f^2}{2 \cdot 12,96 \cdot \left(\frac{7}{3,6} + 9,8 \cdot i \right)} = \frac{V_0^2 - V_f^2}{50,4 + 254,02 \cdot i}$$

Que es, a todos los efectos, la misma fórmula de la longitud en metros de los carriles de deceleración de la actual Norma 3.1-IC 2000, indicada más arriba.

En el libro Trazado de Carreteras⁶, Madrid 1992, publicado por la ETS de Ing. de CCP de la UPM, se aporta la misma ecuación:

$$L_d = \frac{V_0^2 - V_f^2}{50 + 2,54 \cdot i}$$

Donde i se debe entrar en (%). Si i se entra en tanto por uno entonces el coeficiente de i debe ser 254, como en la fórmula de la Norma 3.1-IC 2000 y de la Norma 3.1-IC 2014, así como en el desarrollo expuesto más arriba.

En rampas ($i > 0$) se ha de mantener el signo de i que al ser $i > 0$ aumentará el denominador y disminuirá L_d lo cual es lógico ya que la fuerza tractora decelerante se ve disminuida por la componente del peso propio del vehículo que se opone a dicha fuerza tractora y en consecuencia se necesita menos recorrido.

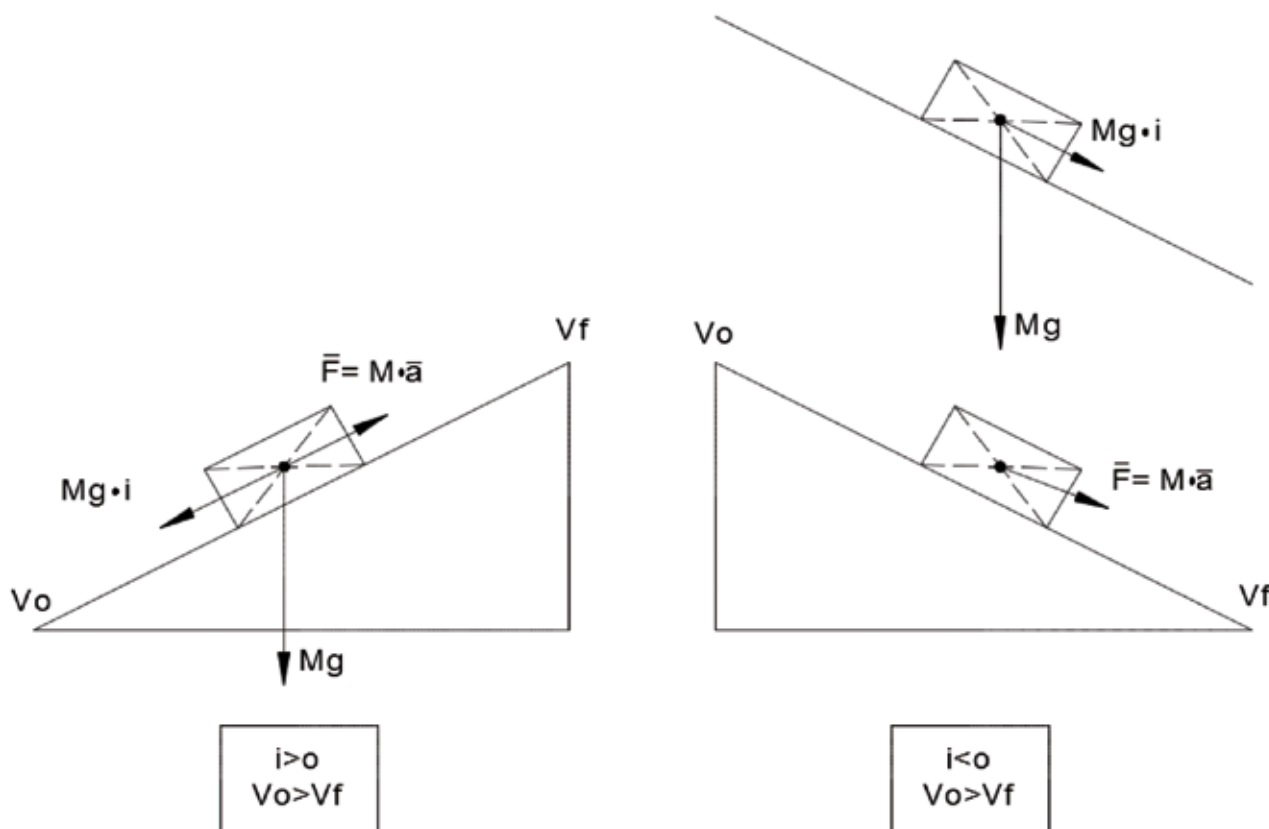


Fig. 3

En pendientes ($i < 0$) se ha de mantener el signo de i ya que al ser $i < 0$ aumentará L_d lo cual es lógico ya que la fuerza tractora decelerante se ve aumentada por la componente del peso propio del vehículo que tiene su misma dirección y en consecuencia se necesita más recorrido.

Estos criterios del signo de i se pueden aplicar en las fórmulas de las hojas de cálculo con distintos planteamientos de programación pero naturalmente con idénticos resultados sea de L_c sea de L_d .

Es interesante comprobar cómo la aplicación del Teorema de las Fuerzas Vivas (que equivale a la segunda ley de Newton) da resultados correctos. Sin embargo, cabe recordar que la fórmula de los carriles de deceleración no considera ni la resistencia del aire ni la resistencia a la rodadura. También es interesante ver que la fuerza tractora no se relaciona directamente con la potencia del motor, sino que la fuerza se toma según la fórmula clásica $M \cdot a$ (segunda ley de Newton) siendo a la deceleración media constante.

3.2. Longitud de las cuñas de transición

Para la longitud de las cuñas de transición se pueden utilizar los valores indicados en el apartado 2.1.4.

4. Consideraciones sobre el planteamiento del cálculo propuesto en la Norma 3.1-IC 2014

En la actual Norma 3.1-IC 2000, se utilizan unas fórmulas, para el cálculo de las longitudes de los carriles de cambio de velocidad, que no se demuestran, y si bien es cierto que las Normas no tienen necesariamente por qué hacerlo, las excepciones no son infrecuentes, sobre todo en el campo estructural, y siempre son bien recibidas.

En el borrador de la Norma 3.1-IC 2014, se destina en cambio todo el Anexo 2 a la “Estimación de la longitud de los carriles de cambio de velocidad”⁷. Sobre este Anexo se hacen las siguientes precisiones:

- En la página 221 del Anexo 2 de la Norma 3.1-IC 2014, en relación con los carriles de aceleración, se aporta un sistema de dos ecuaciones en función de x , de $v = dx/dt$ y de dv/dt :

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \beta \cdot \frac{H}{V} - R_t$$

$$V = \frac{dx}{dt}$$

Siendo:

P = peso del vehículo ($N = \text{kg masa} \cdot \text{m/s}^2$).

g = aceleración de la gravedad (m/s^2).

$\beta \cdot (H/v)$ = fuerza tractora del vehículo (N).

R_t = suma de resistencias longitudinales al avance del vehículo (N).

- En la página 223 de la Norma 3.1-IC 2014 (Anexo 2) se aporta, sin indicar como se obtiene, una expresión de X que implícitamente (en nuestra opinión) se entiende como la solución del anterior sistema de ecuaciones. Dicha expresión es:

$$X = \frac{V_f}{g \cdot K} \cdot \left[\frac{V_0 - V_f}{2} \cdot (V_0 + 2 \cdot V_f + V) + V_f^2 \cdot \ln \frac{V_0 - V_f}{V - V_f} \right] + X_0$$

El problema es que dicha expresión de X , que cabe interpretar –sin tener la seguridad de ello– como una abscisa genérica del carril de cambio de velocidad, depende de X_0 , V_0 , V_f así como de V . El valor X_0 no se define.

Cabe pensar que V es la velocidad asociada a la abscisa genérica X del carril de aceleración. En tal caso, dando a V en la expresión de X el valor V_0 , nos debería resultar $X=0$ y sin embargo se obtiene:

$$X = \frac{V_f}{g \cdot K} \cdot (V_0^2 - V_f^2) + X_0 \neq 0$$

Análogamente dando a V el valor V_f , nos debería resultar $X=L_c$ y sin embargo se obtiene:

$$X = \frac{V_f}{g \cdot K} \cdot \left[\frac{V_0 - V_f}{2} (V_0 + 3 \cdot V_f) + \infty \right] + X_0 = \infty \neq L_c$$

Lo cual nos genera las lógicas reservas en relación a la expresión de X .

La dificultad para obtener X estriba en que para conocer v ($v = dx/dt$) precisamos primero conocer x , y sin conocer v no se puede calcular x . Estaríamos pues quizás ante una fórmula de tipo circular, de manejo iterativo y en definitiva de aplicación engorrosa y poco clara.

- Como contrapartida, en la Norma 3.1-IC 2014, se aporta una tabla 8.2 para obtener directamente la longitud de los carriles de cambio de velocidad, donde se definen 5 subtablas o tramos, en cada uno de los cuales la pendiente oscila entre valores determinados. Dichos tramos y las pendientes asociadas son:

Tramo 1	-2 % ≤ i ≤ +2 %;
Tramo 2	+2 % < i ≤ +4 %;
Tramo 3	-2 % < i ≤ -4 %;
Tramo 4	+4 % < i ≤ +6 % y
Tramo 5	-4 % < i ≤ -6 %.

En cada subtabla o tramo de la tabla 8.2 se puede elegir entre 6 velocidades iniciales y 6 velocidades finales, estas velocidades son idénticas en los 5 tramos. Sus valores son: 40, 60, 80, 100, 120 y 140 km/h.

Elegida una velocidad inicial y una final, del Tramo o Subtabla correspondiente de la tabla 8.2, se obtiene la longitud buscada del carril. No se indica cómo se han obtenido los valores de la tabla 8.2. Si se opera por encima de la diagonal de la sub tabla se obtienen longitudes de carriles de aceleración y por debajo se obtienen longitudes de carriles de deceleración⁹. Obsérvese que la longitud del carril, en cada tramo depende solo de las velocidades elegidas y no de la inclinación concreta del carril. En el tramo 5 de la tabla 8.2, por ejemplo, la longitud de carril es la misma para inclinaciones de -4 %, -4,5 %, -5 %, -5,5 % y -6 % (y cualquier otra inclinación comprendida entre -4 % y -6 %) y en el tramo 1 de la tabla 8.2, la longitud de carril es la misma para inclinaciones de -2 %, -1 %, +1 % y +2 % (y cualquier otra comprendida entre -2 % y +2 %). Esto es, al menos formalmente, incorrecto.

La obtención de la longitud de los carriles de deceleración a través de la utilización de la tabla 8.2 es sorprendente, ya que si bien en la Norma 3.1-IC 2014 no se aporta ninguna fórmula para el cálculo de los carriles de aceleración, en lo que respecta a los carriles de deceleración hay un acuerdo generalizado (Norma 3.1-IC 2000, Norma 3.1-IC 2014, Trazado de Carreteras. Tomo 2º. ETS de ICCP. 1992) en utilizar la fórmula:

$$L_d = \frac{V_0^2 - V_f^2}{50 + 254 \cdot i}$$

Por lo que cabría esperar que para los carriles de deceleración se utilizara la fórmula anterior y no la tabla 8.2.

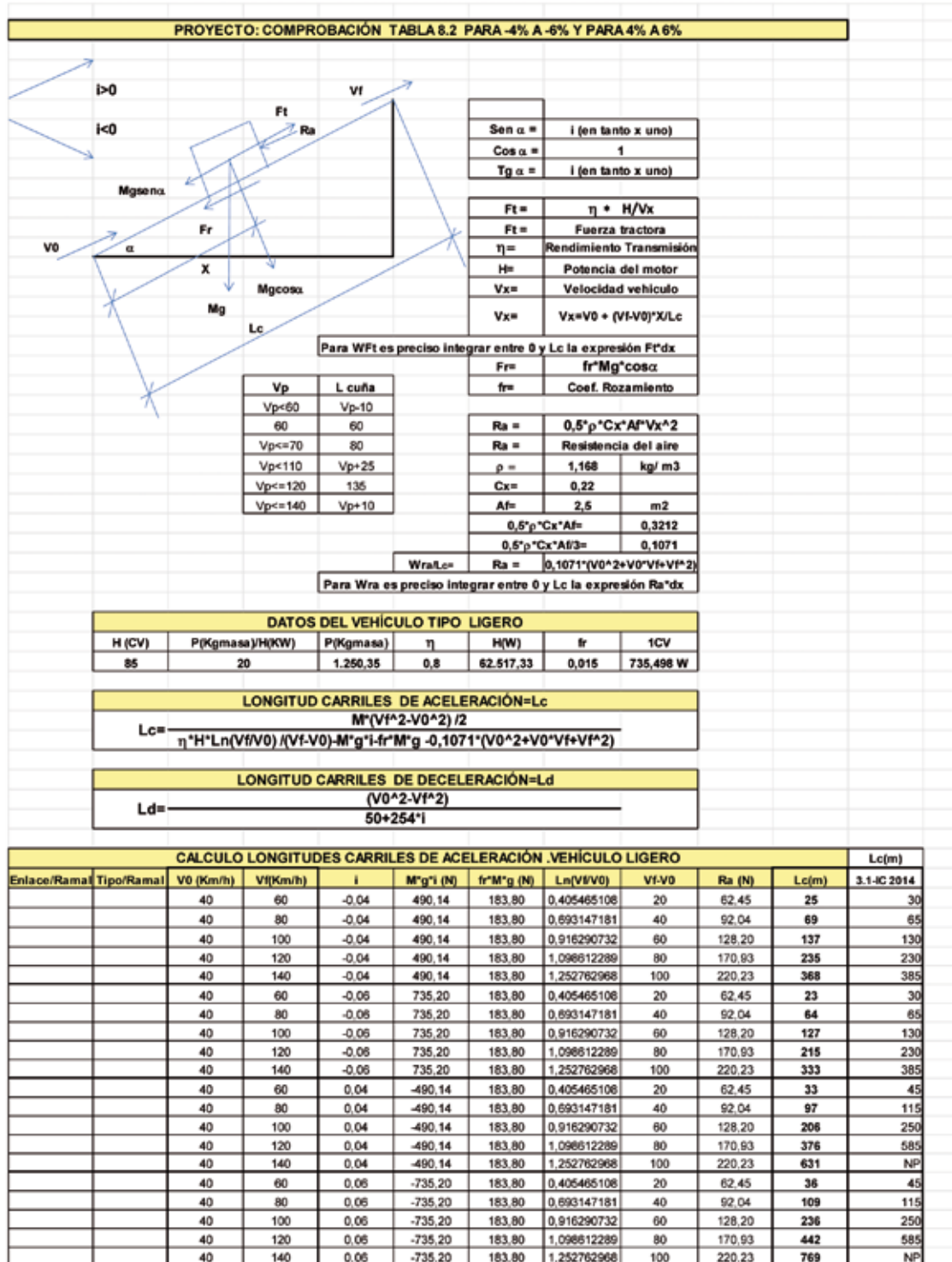
Con las fórmulas de Lc y Ld desarrolladas en este artículo se está en condiciones de calcular la longitud de los carriles de deceleración y aceleración de manera directa. En este sentido se acompaña más adelante una hoja de cálculo Excel, cuyo formato es susceptible de mejora y así se hará más adelante.

En dicha hoja de cálculo Excel algunos coeficientes de conversión de unidades están indicados explícitamente en las entradas de datos y otros están ya incorporados en las fórmulas de las columnas Lc, Ld, Ra, etc donde se programa el cálculo de dichos valores. En la tabla Excel, se calculan las longitudes de los carriles de aceleración Lc y deceleración Ld en las columnas Lc(m) y Ld (m) de acuerdo con las fórmulas de este artículo y se comparan con los valores obtenidos entrando en la tabla 8.2 de la Norma 3.1-IC 2014.

5. Comprobaciones realizadas en la tabla 8.2 para pendientes del -4 % al -6 % y del +4 % al +6%.

Se observan las siguientes diferencias:

- Las longitudes de los carriles de aceleración (o deceleración), para la misma suposición de velocidad inicial y final, considerando las pendientes del -4 % al -6 %, y del +4 % al +6 %, calculadas con la tabla 8.2 de la Norma 3.1-IC 2014, tramos 4 y 5, dan lugar a los mismos valores con independencia de la pendiente considerada, y de cualquier otra comprendida en el intervalo del -4 % al -6 % o del 4 % al 6 %.
- Las longitudes de los carriles de deceleración (o deceleración) para la misma suposición de velocidad inicial y final, considerando pendientes del -4 % al -6 %, y del +4 % al +6 %, calculadas con las fórmulas del presente trabajo, dan valores en unos casos relativamente parecidos y otros no tanto, a los de Tabla 8.2 de la Norma 3.1-IC 2014 pero en definitiva diferentes y en cualquier caso con valores distintos para pendientes distintas, como es lógico. La longitud de los carriles de deceleración da los mismos valores que los obtenidos de la Norma 3.1-IC 2000 como es lógico ya que se utiliza la misma fórmula.



CÁLCULO LONGITUDES CARRILES DE DECELERACIÓN. VEHÍCULO LIGERO.										
Enlace/Ramal	Tipo/Ramal	V0 (Km/h)	Vf(Km/h)	i	M*g*i (N)	fr*M*g (N)	Ln(V0/Vf)	V0-VF	Ra (N)	Ld(m)
		120	40	-0,04				80		321
		120	60	-0,04				60		271
		120	80	-0,04				40		201
		120	100	-0,04				20		110
		120	40	-0,06				80		368
		120	60	-0,06				60		311
		120	80	-0,06				40		230
		120	100	-0,06				20		127
		120	40	0,04				80		213
		120	60	0,04				60		180
		120	80	0,04				40		133
		120	100	0,04				20		73
		120	40	0,06				80		196
		120	60	0,06				60		166
		120	80	0,06				40		123
		120	100	0,06				20		67

• En el caso de los carriles de deceleración todavía es más llamativa la diferencia entre la aplicación de la fórmula $(V0^2-Vf^2)/(50+254*i)$ (fórmula que también recoge la Norma 3.1-IC 2014) y los valores resultantes de la aplicación de la Tabla 8.2. En el caso de los carriles de deceleración la coincidencia debería ser total y no lo es en absoluto.

• El tema de la Resistencia aerodinámica Ra es un inconveniente a la hora de comparar resultados en la comprobación de la longitud de los carriles de aceleración, dado que en la deducción de los valores de la tabla 8.2 según la Norma 3.1-IC 2014 no está incluida dicha resistencia y sí lo está en los valores deducidos con la formulación del presente artículo.

Un aspecto cuyo mérito se debe reconocer a la Norma 3.1-IC 2014 es la introducción de las características geométricas y dinámicas de los vehículos, en el cálculo de las longitudes de los carriles de cambio de velocidad. En ramales de enlaces próximos a zonas industriales los carriles de cambio de velocidad se deberían calcular con un vehículo tipo (probablemente un camión) con unas características que representen la media de las características de los camiones circulantes en la zona de proyecto. También se debe reconocer a la Norma 3.1-IC 2014 el plantear la conveniencia de considerar la Resistencia Aerodinámica del aire, aunque luego afirme que es despreciable, lo cual como ya se ha comentado anteriormente, no es siempre cierto, ni mucho menos.

Por todo ello, resulta más llamativo que pese a un planteamiento teórico inicial exigente, a fin de cuentas el único método

de cálculo que ofrece la Norma 3.1-IC 2014 sea la tabla 8.2 donde sólo se necesita conocer las velocidades inicial y final y la pendiente del carril para obtener un valor de la longitud del mismo. Insistimos en que dicha longitud es válida, según la Norma 3.1-IC 2014, para todas las pendientes del intervalo de pendientes del Tramo que se elija de la tabla 8.2.

Esto evidentemente no es cierto ya que con cada inclinación o pendiente se obtiene una longitud determinada de carril; otra cosa es que en la Norma 3.1-IC 2014 hubiera calculado explícitamente las longitudes de carril para cada una de las inclinaciones que son posibles en cada tramo de la Tabla 8.2 y hubiera llegado a la conclusión de que las diferencias de longitud obtenidas se podían despreciar. Este cálculo no sabemos si se ha realizado, aunque nos inclinamos a pensar que no, porque de haberse realizado, los valores obtenidos se deberían haber incorporado, con una explicación de su obtención, al anexo 2 para justificar los valores de la tabla 8.2.

Por otra parte en la gama de inclinaciones de la tabla 8.2 se excluyen las inclinaciones mayores del 6 % que no son tan infrecuentes –como es el caso del 7 %– y si están consideradas, parcialmente, en la actual Norma 3.1-IC 2000.

6. Vehículo tipo

En la Norma 3.1-IC 2014 se consideran, a efectos de cálculo de los carriles de cambio de velocidad, dos tipos de vehículos cuyas características geométricas y dinámicas se recogen en la tabla A2.1 de dicha Norma, que se reproduce a continuación:

Vehículo	Potencia (CV)	P/H (Kg/Kw)	Área Frontal (m²)	Cd (ó Cx) Coeficiente aerodinámico
Ligero	85	20	2,50	0,4
Pesado	450	120	10,00	1,1

$$L_c = \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot (V_f^2 - V_0^2)}{\eta \cdot \frac{H}{(V_f - V_0)} \cdot \ln \frac{V_f}{V_0} - M \cdot g \cdot i - f_r \cdot M \cdot g - 0,089 \cdot (V_0^2 + V_0 \cdot V_f + V_f^2)}$$

Hasta ahora en las tablas del presente trabajo, hemos utilizado el vehículo ligero. En lo que respecta a la Norma 3.1-IC 2014 la única herramienta de cálculo que proporciona es la tabla 8.2, donde no se indica con qué tipo de vehículo se ha elaborado, pero entendemos que ha sido con el vehículo ligero.

Observamos que el vehículo pesado tiene una potencia 5,30 veces superior a la potencia del vehículo ligero, y ofrece una resistencia aerodinámica 11 veces superior a la del vehículo ligero. Sería interesante que la Norma 3.1-IC 2014 aportara las características dinámicas y geométricas, de un vehículo intermedio entre los dos anteriores.

Por otra parte, si observamos la ecuación que nos da la longitud del carril de aceleración: (ver fórmula superior); donde estamos suponiendo $V_f > V_0$, vemos que si se consideran valores altos de V_f y V_0 y además diferencias altas entre V_f y V_0 , así como un vehículo con un peso ($M \cdot g$) también elevado, unido todo ello a una rampa ($i > 0$) con inclinación alta, es muy posible que nos resulten según los casos valores altos de L_c e incluso valores negativos de L_c . Como este resultado no tiene sentido físico, cabe decir que la fórmula anterior nos permite tantear rápidamente distintos valores de las velocidades y pendientes de la rampa, que nos den una L_c con el signo positivo y con una longitud que encaje con las previsiones iniciales del trazado (ver tablas siguientes).

6.1. Sobre las unidades de L_c

Dado que en la tabla anterior en la definición de P/H se indica (Kg/Kw) entendemos que Kg indica kilogramos masa y no kilogramos fuerza (Kgf) o kilopondios (Kp).

Por otra parte, entendemos que Kw es la potencia expresada en kilovatios y no en caballos de vapor (CV). Como 1CV = 735,498 watos, se tiene en el caso del vehículo ligero:

$$85 \text{ CV} = 85 \times 735,498 = 62.517,33 \text{ watos} = 62,517 \text{ Kw}$$

Como, según la tabla anterior, P (Kg masa) = 20 X potencia en Kw=

$$= 20 \times 62,517 = 1.250,34 \text{ Kg masa.}$$

Las unidades del numerador de L_c (masa por velocidad al cuadrado) son:

$$(\text{Kg masa}) \times (\text{m/s})^2 = (\text{kg masa}) \times (\text{m/s}^2) \times \text{m} = \text{Newton} \times \text{m} = \text{N} \times \text{m}$$

Las unidades de los sumandos del denominador de L_c son:

$$\eta \times H \times \ln(V_f/V_0) / (V_f - V_0) = (\text{coeficiente adimensional}) \times (\text{watos}) \times (\text{numero})/(\text{m/s}) =$$

$$= (\text{Julio/s})/(\text{m/s}) = (\text{Nxm/s})/(\text{m/s}) = \text{Newtons} = \text{N.}$$

$$M \times g \times i = (\text{Kg masa}) \times (\text{m/s}^2) \times (\text{m/m}) = \text{Newtons} = \text{N.}$$

$$f_r \times M \times g = (\text{coeficiente adimensional}) \times (\text{Kg masa}) \times (\text{m/s}^2) = \text{Newtons} = \text{N.}$$

La Resistencia aerodinámica, antes de operar e integrar vale:

$$Ra = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_x \cdot A_f \cdot V^2$$

las unidades de sus factores son:

$\mu = (\text{kg masa}/\text{m}^3)$.

Cx= Coeficiente adimensional.

Af = (m²).

V2 = m²/s².

La unidad de Ra es pues= (kg masa/m³)*(m²)*(m²/s²)= (kg masa)
x m /s² = Newtons=N

La unidad de Lc es pues = Nxm / N= metros (m)

7. Calculos de Lc con un vehículo de potencia media

Vehículo	Potencia (CV)	P/H (Kg/Kw)	Área Frontal (m ²)	Cd (ó Cx) Coeficiente aerodinámico
Ligero	85	20	2,50	0,4
Pesado	450	120	10,00	1,1
Mediano	268	70	6,25	0,75

El vehículo mediano es un vehículo ficticio, propuesto en el presente trabajo, obtenido como semisuma del vehículo ligero más el vehículo pesado. Creemos que esta aproximación, se puede aceptar solamente a efectos de cálculos o comparaciones provisionales, como es el caso que nos ocupa. En la tabla inferior, se calculan las longitudes en metros de los carriles de

aceleración Lc para las velocidades inicial Vo de 40 km/h y final Vf variando entre 60, 80, 100, 120 y 140 Km/h con pendientes de -4 %, -6 %, 4 % y 6 %, mediante la aplicación de la Tabla 8.2 de la Norma 3.1-IC 2014 que utiliza-creemos- un vehículo ligero, y mediante la fórmula deducida en este trabajo con el vehículo mediano que hemos definido.

CALCULO LONGITUDES CARRILES DE ACELERACIÓN. VEHICULO MEDIANO										Lc(m)	Lc(m)
Enlace	Tipo/Ramal	V0 (Km/h)	Vf(Km/h)	i	M*g*i (N)	fr*M*g (N)	Ln(Vf/V0)	Vf-V0	Ra (N)	V. MEDIO	3.1-IC 2014
		40	60	-0,04	-5408,78	2028,29	0,405465108	20	156,11	71,70	30
		40	80	-0,04	-5408,78	2028,29	0,693147181	40	230,05	195,22	65
		40	100	-0,04	-5408,78	2028,29	0,916290732	60	320,43	378,31	130
		40	120	-0,04	-5408,78	2028,29	1,098612289	80	427,24	629,07	230
		40	140	-0,04	-5408,78	2028,29	1,252762968	100	550,48	956,49	385
		40	60	-0,06	-8113,17	2028,29	0,405465108	20	156,11	60,60	30
		40	80	-0,06	-8113,17	2028,29	0,693147181	40	230,05	161,64	65
		40	100	-0,06	-8113,17	2028,29	0,916290732	60	320,43	307,54	130
		40	120	-0,06	-8113,17	2028,29	1,098612289	80	427,24	502,82	230
		40	140	-0,06	-8113,17	2028,29	1,252762968	100	550,48	752,27	385
		40	60	0,04	5408,78	2028,29	0,405465108	20	156,11	268,16	45
		40	80	0,04	5408,78	2028,29	0,693147181	40	230,05	1.156,12	115
		40	100	0,04	5408,78	2028,29	0,916290732	60	320,43	4.749,18	250
		40	120	0,04	5408,78	2028,29	1,098612289	80	427,24	-145.471,63	585
		40	140	0,04	5408,78	2028,29	1,252762968	100	550,48	-11.133,58	NP
		40	60	0,06	8113,17	2028,29	0,405465108	20	156,11	851,32	45
		40	80	0,06	8113,17	2028,29	0,693147181	40	230,05	-5.015,24	115
		40	100	0,06	8113,17	2028,29	0,916290732	60	320,43	-2.514,85	250
		40	120	0,06	8113,17	2028,29	1,098612289	80	427,24	-2.463,02	585
		40	140	0,06	8113,17	2028,29	1,252762968	100	550,48	-2.676,33	NP

Cuando los resultados obtenidos de L_c son o muy largos o son negativos, se han de revisar las pendientes proyectadas así como las velocidades inicial y final.

CÁLCULO LONGITUDES CARRILES DE ACELERACIÓN . VEHICULO MEDIANO										Lc(m)	Lc(m)
Enlace	Tipo/Ramal	V0 (Km/h)	Vf(Km/h)	i	M*g*i (N)	fr*M*g (N)	Ln(Vf/V0)	Vf-V0	Ra (N)	V. MEDIO	3.1-IC 2014
		40	60	-0,04	-5408,78	2028,29	0,405465108	20	156,11	71,70	30
		40	80	-0,04	-5408,78	2028,29	0,693147181	40	230,05	195,22	65
		40	100	-0,04	-5408,78	2028,29	0,916290732	60	320,43	378,31	130
		40	120	-0,04	-5408,78	2028,29	1,098612289	80	427,24	629,07	230
		40	140	-0,04	-5408,78	2028,29	1,252762968	100	550,48	956,49	385
		40	60	-0,06	-8113,17	2028,29	0,405465108	20	156,11	60,60	30
		40	80	-0,06	-8113,17	2028,29	0,693147181	40	230,05	161,64	65
		40	100	-0,06	-8113,17	2028,29	0,916290732	60	320,43	307,54	130
		40	120	-0,06	-8113,17	2028,29	1,098612289	80	427,24	502,82	230
		40	140	-0,06	-8113,17	2028,29	1,252762968	100	550,48	752,27	385
		40	60	0,04	5408,78	2028,29	0,405465108	20	156,11	268,16	70
		40	70	0,04	5408,78	2028,29	0,559615788	30	191,03	584,00	70
		40	75	0,04	5408,78	2028,29	0,628608659	35	210,03	826,68	70
		40	75	0,04	5408,78	2028,29	0,628608659	35	210,03	826,68	70
		40	75	0,04	5408,78	2028,29	0,628608659	35	210,03	826,68	70
		40	60	0,06	8113,17	2028,29	0,405465108	20	156,11	851,32	45
		40	60	0,06	8113,17	2028,29	0,405465108	20	156,11	851,32	45
		40	60	0,06	8113,17	2028,29	0,405465108	20	156,11	851,32	45
		40	60	0,06	8113,17	2028,29	0,405465108	20	156,11	851,32	45
		40	60	0,06	8113,17	2028,29	0,405465108	20	156,11	851,32	45

En el presente caso una posible solución pasa por disminuir la velocidad de llegada, como se ve en la tabla de esta misma página. Sólo disminuyendo la velocidad V_f de llegada, el cambio en el valor de L_c ha sido muy importante. Cabe pensar que con otra optimización de todas o de parte de las variables (V_0 , V_f y i) se obtendrían otras soluciones para mejorar cualquier valor de L_c .

8. Conclusiones

A la vista de lo anterior consideramos, a nuestro entender, que en la redacción definitiva de la Norma 3.1-IC 2014 se deberían tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Dado que se dispone de una fórmula directa para el cálculo de los carriles de deceleración, parece que sería también deseable disponer de una fórmula directa para el cálculo de la longitud de los carriles de aceleración, tal como ocurre en la actual Norma 3.1-IC 2000.
- Con respecto a las fórmulas de L_c y L_d utilizadas en el presente trabajo, es interesante observar que si en el denominador de L_c se prescinde de la resistencia aero-

dinámica y de la resistencia a la rodadura –que no se han considerado en la deducción de L_d – ambas ecuaciones presentan una cierta similitud formal que

$$L_c = \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot (V_f^2 - V_0^2)}{\eta \cdot \frac{H}{(V_f - V_0)} \cdot \ln \frac{V_f}{V_0} - M \cdot g \cdot i}$$

$$L_d = \frac{V_0^2 - V_f^2}{50 + 254 \cdot i}$$

interpretamos como una circunstancia favorable, sin que ello suponga en absoluto, que al emplear la ecuación de L_c podemos despreciar la resistencia aerodinámica y la resistencia a la rodadura.

- Con independencia de las fórmulas correspondientes, siempre es interesante disponer de unas tablas para obtener las longitudes de los carriles de aceleración y deceleración, y en nuestra opinión sería deseable un formato muy similar al de las Tablas 7.5 y 7.6 de la Norma 3.1-IC 2000 (en las que en nuestra opinión se debe ampliar el rango tanto de las velocidades iniciales como finales). El formato y el contenido actual de la Tabla 8.2 del borrador de la Norma 3.1-IC 2014, no parece el más adecuado por las razones expuestas en este trabajo.

- También se deberían establecer unos valores mínimos de L_c y L_d , similares a los establecidos en la Norma 3.1-IC 2000, que son $L_c \geq 200$ m y $L_d \geq 100$ m.

9. Agradecimientos

- A Piero Facchini Margutti (ICCP), Xavier Pérez Castello (Arquitecto Técnico y Trazadista) y a Ponciano Aguado Fernández (Trazadista), competentes ingenieros especialistas de BAC, Engineering Consultancy Group, SL con quienes he cambiado impresiones en varias ocasiones sobre el contenido de este artículo, que han servido para mejorar el planteamiento del texto y eliminar errores.

- A Ángel Sangrós Bondía (ICCP), exjefe de las Demarcaciones de Carreteras del Estado en Aragón primero y en Cataluña después. Exprofesor de Resistencia de Materiales y Elasticidad en la E.T.S de ICCP de la Universidad Politécnica de Cataluña, que se ha molestado en leer el artículo y ha hecho observaciones que, todas ellas, se han tenido en cuenta.

- A Manuel Aguinaga Berjano (ICCP), ingeniero jefe de Equipo de GETINSA-PAYMA, con quien se ha compartido desde el primer momento una impresión poco favorable con respecto al Anexo 2 del Borrador de la Norma 3.1-IC 2014, y que nos consta está indagando también sobre éste mismo tema buscando métodos numéricos de resolución del sistema de dos ecuaciones diferenciales de la página 9, basados en el programa Math. Lab., habiendo llegado ya a resultados concretos. **ROP**

Notas

(1) Prestaciones en Vehículos. Universidad Carlos III de Madrid. Dpto. de Ingeniería Mecánica.

(2) Idem. llamada 1

(3) Idem. llamada 1

(4) Mejor hubiera sido aportar las fotos laterales de los vehículos considerados.

(5) Trazado de Carreteras. ETS de ICCP de la UPM.1992.

(6) Autores: Sandro Rocci Boccaleri, Carlos Kraemer y Víctor Sánchez Blanco

(7) En realidad en el Anexo 2 solo se consideran los carriles de aceleración.

(8) Según se nos comunicó verbalmente por un miembro del Comité de Redacción de la Norma 3.1-IC 2014