

Cúpulas de revolución con tensiones anulares nulas bajo peso propio

Symmetrical domes with zero ring stresses under their own weight

Jesús Fierro Bardají. Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Consultor libre. jesus.fierro@telefonica.net

Resumen: El objeto de este artículo es determinar las formas de cúpula que bajo peso propio tienen únicamente tensiones en la dirección de los meridianos. Las cúpulas que cumplen esta condición se pueden construir por pares de sectores opuestos que se equilibran mutuamente. Para que se alcance el estado de tensiones deseado, se deben dejar juntas delgadas entre sectores contiguos de modo que el estado final, tras hormigonar estas juntas, sea el de la cúpula teórica. Todas las soluciones halladas tienen que estar abiertas en clave.

Palabras Clave: Cúpula abierta; Esfuerzos meridionales; Proceso constructivo

Abstract: The purpose of this article is to determine the shapes of domes that, under their own weight, have only stresses in the direction of the meridians. The domes that comply with this condition may be built by pairs of opposite sectors that balance each other. To achieve the desired stress condition, narrow open joints must be left between every pair of adjacent sectors so that the final estate, after filling the joints, is the theoretical one. All the solutions found must be open at the top.

Keywords: Open dome; Meridional stresses; Construction process

1. Introducción

Las cúpulas son adecuadas para la cubrición sin columnas de espacios de planta poligonal regular, semi-regular o circular. Muchas forman parte de obras monumentales en las que se valora tanto la forma como el tamaño que, en estos casos, sí importa. Se sabe que las cúpulas de gran luz son caras pero también que su carácter monumental puede hacerlas preferibles por razones funcionales o estéticas; más raramente estáticas. Es atractivo que la cubierta de un gran espacio carezca de columnas y resulta mejor que parezca una catedral que la cubierta de una granja de pollos. En este resbaladizo y subjetivo terreno de la estética es donde muchas veces se elige la solución. Para justificarla se suelen dar argumentos de índole funcional: flexibilidad de uso, diafanidad, imagen de ciudad o de marca, etc. minimizando o silenciando el atractivo de tener la cubierta más grande de la provincia, del país o del mundo. Las cubiertas de gran luz aparecen en las revistas y en la televisión. Sus autores, o más frecuentemente las autoridades, aparecen en reportajes, acuden a entrevistas y los

ciudadanos sienten el orgullo de vivir en una ciudad que tiene una construcción tan admirada cuyo coste pasa pronto a tercer término.

Uno de los mayores atractivos de las cúpulas es su ligereza, si bien no siempre es perceptible y con frecuencia es engañosa. La relación de pesos entre una cúpula moderna y una antigua puede ser de uno a cincuenta pero el visitante que sólo ve el intradós o el trasdós no aprecia la delgadez de una cúpula salvo que se exteriorice claramente, disponga de dicha información y sea significativa para él o sea un especialista capaz de captar rasgos característicos de las formas laminares. La ligereza cobra mayor importancia cuando importa reducir la masa: cúpulas construidas en posición elevada, en zonas de alta sismicidad o construcciones con mala cimentación.

En las cúpulas de acero, la forma teórica se puede aproximar mediante superficies poliédricas con aristas suaves, como las cúpulas de Fuller, aunque no es raro que la forma cúpula inicial evolucione hacia la celosía formada por arcos meridionales y anillos según los paralelos que soportan paneles de cerramiento. De la cúpula

la sólo queda la apariencia pero el esquema de transmisión de cargas ha cambiado radicalmente sin que eso sea, necesariamente, un inconveniente.

Los inconvenientes principales de las cúpulas de hormigón armado derivan de su coste al que contribuyen el apeo, el encofrado (que puede tener que ser, en parte, doble), el hormigonado y los empujes horizontales que transmiten en los arranques. Como la resistencia a flexión de los elementos delgados es muy sensible a los errores en el trazado y en la colocación de la armadura, las tolerancias de ejecución deben ser muy bajas y el coste se incrementa.

Se puede reducir el coste del apeo y del encofrado si la cúpula se construye por pares de sectores opuestos, a manera de gajos, que abarquen, por ejemplo, 1 / 16 de cúpula. Los esfuerzos horizontales se equilibran en cada par de sectores opuestos. El apeo se puede disponer sobre trenes de rodadura dotados de gatos que permitan bajarlo, descimbrando los sectores, girarlo y elevarlo en su nueva posición. De esta forma, el apeo y el encofrado se usan 8 veces para hormigonar los 8 pares de sectores opuestos. El camino de rodadura se debe dimensionar para que, terminada la construcción, sirva de anillo de apoyo y soporte los empujes radiales de la cúpula.

Es obvio que en una cúpula construida de este modo, las tensiones en la dirección de los paralelos serían nulas bajo peso propio salvo las debidas a los desplazamientos radiales que producen acortamiento de los paralelos y tensiones de compresión circunferenciales.

La condición real de tensiones nulas según los paralelos sólo se alcanza si los sectores se construyen dejando delgadas juntas abiertas que se hormigonarán cuando todos los sectores hayan sido contruidos y la cúpula quede sometida a su propio peso. El hormigonado de las juntas produce pequeñas tensiones según los paralelos que, a efectos prácticos, se pueden ignorar.

La mayor parte del tiempo, las cúpulas soportan únicamente su propio peso. A ello se une que las sobrecargas, principalmente de uso, viento y terremotos, suelen ser comparativamente menores. Esto aumenta el interés de definir formas óptimas bajo peso propio sin perjuicio de que haya que calcularlas bajo otras cargas.

Lo habitual es conocer la forma y las cargas y buscar los esfuerzos. El problema tratado en este artículo se plantea siguiendo el método semi-inverso de Saint-Venant: se conoce una condición para los esfuerzos ($N_\theta = 0$) y las cargas (sólo peso propio) y se busca la forma a la que corresponden.

Muchas estructuras se proyectan partiendo de un proceso constructivo que resuelve las dificultades derivadas de las dimensiones y la funcionalidad. Este proceso suele influir en la forma de la estructura, en las cargas y en su evolución a lo largo del proceso. En el caso tratado en este artículo, se pretende saber si el proceso de construcción de la cúpula por pares de sectores opuestos es viable y, de serlo, con qué límites y condiciones.

Las respuestas que se buscan son:

- Qué forma debe tener la cúpula para que las tensiones circunferenciales bajo peso propio sean nulas.
- Es esta forma única o se puede elegir y, en este caso, con qué limitaciones.
- Cuáles son las tensiones y deformaciones que se alcanzan en este caso.

2. Consideraciones iniciales

2.1. Introducción

La Fig. 1 muestra un sector de cúpula. Debido a la nulidad postulada de los esfuerzos N_θ , la componente radial de la reacción N_L en el arranque sólo puede estar compensada por una reacción en el vértice O del sector. Esta carga está compensada por la del sector opuesto ya que la cúpula se va a construir por pares de sectores opuestos.

Es inmediato, y se confirma luego repetidamente, que esta situación no se puede dar con tensiones finitas en la clave por lo que la cúpula tiene que ser abierta. Una solución es disponer en la clave un anillo que se construye en primer lugar. Este anillo equilibra los empujes horizontales entre sectores opuestos durante la construcción. En la proximidad del anillo se pueden producir algunas flexiones que se atenúan rápidamente con la distancia por lo que la solución que se busca es correcta en la mayor parte de la cúpula. Esta simplificación, derivada de la hipótesis de Saint-Venant, es de uso corriente, más bien obligado, siempre que se consideran cargas concentradas.

Dado que la cúpula va a estar abierta en la clave, se puede aprovechar el anillo de borde del hueco para transmitir a la cúpula en el punto 1 de la Fig. 3 cargas cercanas a las obtenidas del cálculo. Un modo sencillo de aplicar estas cargas es comprimir radialmente el anillo de borde antes de hormigonar los sectores de modo que, al liberar las cargas que lo comprimen, el anillo se

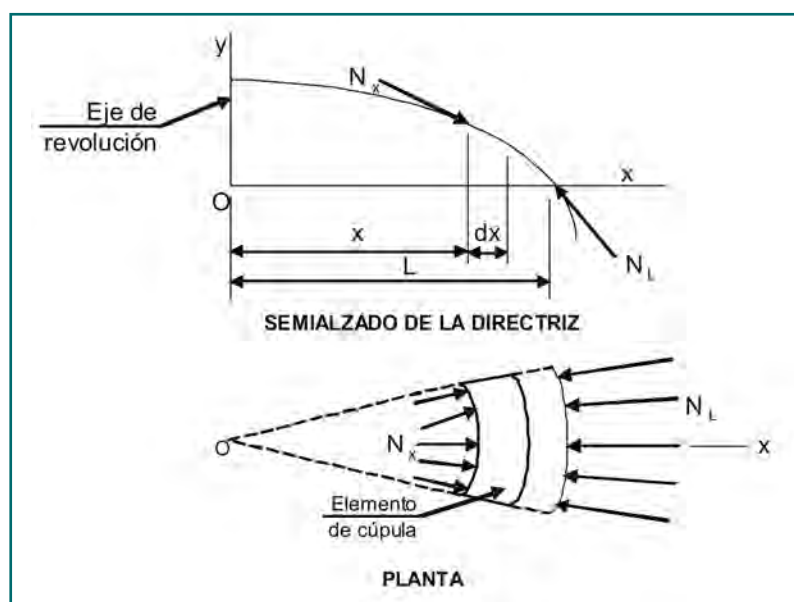


Fig. 1. Esfuerzos en un sector de la cúpula.

expanda y proporcione la componente horizontal apropiada. El peso del anillo da una componente vertical que se puede elegir con la condición de que la dirección de la resultante sea tangente a la directriz. Si se logra un buen ajuste a las condiciones de borde, la cúpula “no nota” que le han suprimido la parte central puesto que en el borde del hueco tiene las cargas y corrimientos que corresponden a la solución exacta. Un ejemplo pionero de esta actuación se encuentra en la cúpula del Palacio Ferial de la Feria de Muestras de Barcelona proyectada por el recordado profesor Alfredo Páez Balaca.

2.2. Observación sobre los signos

En los cálculos con ordenador, los axiles de compresión suelen aparecer como negativos. Sin embargo, en los cálculos de secciones de hormigón armado, las compresiones se suelen considerar positivas. Esto no implica riesgo de confusión en el cálculo concreto de una cúpula ya que el calculista sabe que con los ejes, la curvatura habitual y las cargas de la Fig. 1, los esfuerzos N_{θ} son de compresión.

Los esfuerzos N_θ pueden ser de tracción en unas zonas y de compresión en otras pero, según se deduce de la Fig. 1, en la inmediación de la clave, son de compresión, único modo de que los N_φ sean finitos. Con esta evidencia, los esfuerzos N_θ son de tracción cuando aparezcan con el signo contrario al que tienen cerca de la clave.

El calculista, cuando opere numéricamente, puede elegir los signos con que desea que aparezcan los resultados. Para ello basta adaptar los signos dados en las fórmulas para que los resultados aparezcan en el anexo de cálculo con los signos deseados.

3. Hipótesis de cálculo

Son las corrientes en el cálculo de láminas:

- El material se supone homogéneo y linealmente elástico aunque no necesariamente isótropo.
- Los corrimientos son pequeños frente al espesor y éste frente a las restantes dimensiones.
- Se admite la hipótesis de Kirchhoff que establece que las normales a la superficie media permanecen normales a la superficie media deformada

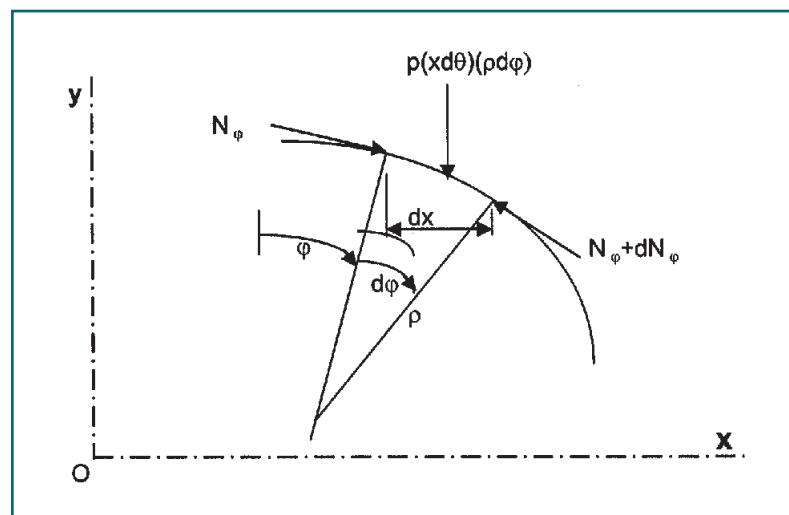
4. Formulación

4.1. Ecuaciones de equilibrio

Estas ecuaciones se pueden derivar de las más generales contenidas en la Ref. 1, #105 pero admiten una deducción directa muy sencilla que se expone a continuación.

La Fig. 2 muestra una sección de la cúpula por el eje de revolución ρ es el radio de curvatura de la meridiana y se designa como θ el ángulo en el plano horizontal. Tanto las fuerzas como la curvatura de la directriz se han representado con su sentido habitual.

Fig. 2. Esfuerzos en un elemento de cúpula.



Todas las variables que intervienen en el cálculo son función de φ únicamente.

Siendo N_φ el esfuerzo meridional *por unidad de longitud* y p el peso *por unidad de superficie*. Con los sentidos de la Fig. 2 las condiciones de equilibrio son:

Equilibrio horizontal:

$$N_\varphi (x d\theta) \cos\varphi - (N_\varphi + dN_\varphi)(x+dx)d\theta \cos(\varphi+d\varphi) = 0$$

Equilibrio vertical:

$$-N_\varphi (x d\theta) \sin\varphi + (N_\varphi + dN_\varphi)(x+dx)d\theta \sin(\varphi+d\varphi) - p(x d\theta)(\rho d\varphi) = 0$$

Dividiendo por $d\theta$:

$$N_\varphi x \cos\varphi - (N_\varphi + dN_\varphi)(x+dx)\cos(\varphi+d\varphi) = 0$$

$$-N_\varphi x \sin\varphi + (N_\varphi + dN_\varphi)(x+dx)\sin(\varphi+d\varphi) - p x (\rho d\varphi) = 0$$

Dividiendo por $d\varphi$ y pasando al límite:

$$(d/d\varphi)(x N_\varphi \cos\varphi) = 0 \quad (4.1)$$

$$(d/d\varphi)(x N_\varphi \sin\varphi) = p x \rho \quad (4.2)$$

De (4.1):

$$N_\varphi x \cos\varphi = C \quad (4.3)$$

donde C es la constante de integración

Nota: Como x y $\cos\varphi$ son positivos, N_φ y C tienen el mismo signo. El usuario puede optar por tantear valores negativos de C para que los esfuerzos N_φ aparezcan con el signo “-” explícito

La ecuación (4.3) se puede escribir en la forma equivalente:

$$N_\varphi = C \sqrt{1 + \gamma'^2} / x \quad (4.4)$$

Sustituyendo (4.3) en (4.2):

$$(d/d\varphi)(C \tan\varphi) = p x \rho$$

que equivale a $C/\cos^2\varphi = p x \rho$, o bien:

$$p x \rho \cos^2\varphi = C \quad (4.5)$$

que define la directriz de la superficie media.

La ecuación (4.5) es válida en todos los casos. Una vez hallada, o definida, la directriz, los esfuerzos se obtienen con la fórmula (4.3).

Igualando los valores de C dados en (4.3) y (4.5) y simplificando se tiene:

$$N_\varphi = p \rho \cos\varphi \quad (4.6)$$

O, con $p = \gamma e$, donde γ es el peso específico y e el espesor de la cúpula:

$$N_\varphi = \gamma e \rho \cos\varphi \quad (4.7)$$

que dan formas alternativas de calcular los esfuerzos.

El valor de φ en el arranque, φ_L , permite saber si hará falta doble encofrado en las cúpulas de hormigón.

La ecuación (4.3) prueba que cuando $x \rightarrow 0$, $N_\varphi \rightarrow \infty$ y (4.5), (4.6) y (4.7) que la directriz de la cúpula tiene curvatura nula ($1/\rho = 0$) en la proximidad del eje de revolución. Ambas circunstancias prueban que el régimen de esfuerzos pretendido no es posible cerca del eje de revolución y la cúpula debe estar abierta en la clave. En cada aplicación concreta, el proyectista decidirá el radio del hueco de la clave a la vista de los requisitos funcionales y las tensiones que se alcanzan o aceptará una zona central con flexiones.

Los esfuerzos calculados son correctos sólo si en el borde del hueco de la clave existen las cargas dadas por las fórmulas.

4.2. Deformaciones y corrimientos

La condición $N_\theta = 0$ no basta para asegurar el comportamiento de la cúpula real ya que la existencia de esfuerzos N_φ provoca desplazamientos verticales, en general hacia abajo, y acortamientos en la dirección de los paralelos. Para que se mantenga la validez de la solución, se precisa que en la construcción se asegure la nulidad de los esfuerzos N_θ mediante las juntas mencionadas antes.

Para el cálculo completo de la cúpula es preciso considerar otras cargas. Lo normal será recurrir a un modelo de elementos finitos en el que se debe asegurar la nulidad bajo peso propio de los esfuerzos N_θ .

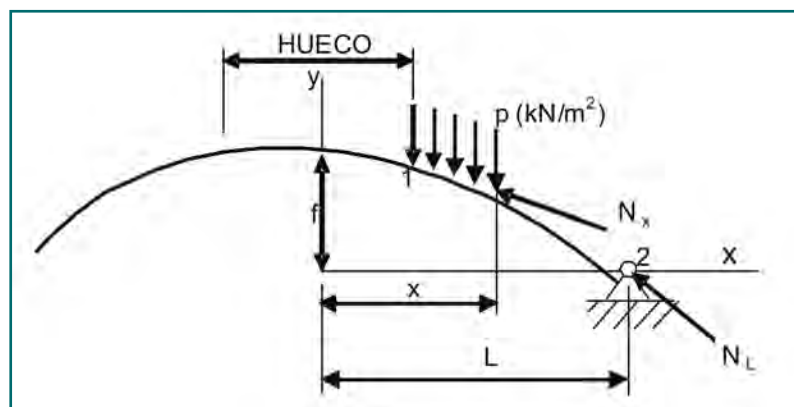


Fig. 3. Esquema para el cálculo de deformaciones.

Dado el tipo de construcción previsto, las deformaciones se obtienen de las fórmulas de los arcos habida cuenta del tipo de soporte.

La Fig. 3 muestra esquematizada la mitad de la directriz y aclara la notación usada en las fórmulas que siguen. En el arco, dada su condición antifunicular, sólo existen esfuerzos axiales N_φ que, en el caso normal, son de compresión.

Los corrimientos en un punto genérico de abscisa x tienen por componentes

$$u = u_1 + \int_1^x N_\varphi x d\theta \cos \varphi ds / E\Omega \quad (4.8)$$

$$v = v_1 + \int_1^x N_\varphi x d\theta \sin \varphi ds / E\Omega \quad (4.9)$$

donde se han tomado como positivas las compresiones N_φ siendo u_1 , v_1 , respectivamente, las componentes horizontal y vertical del movimiento del punto 1 de la Fig. 3 y:

E el módulo de elasticidad.

$\Omega = (x d\theta)$ es el área por unidad de longitud de paralelo de la sección transversal de la cúpula de espesor e .

$ds = p d\varphi$ la longitud a lo largo de la directriz del elemento de arco.

Los esfuerzos N_φ deben incluir los debidos a la compresión en el punto 1 que pueden no ser nulos si se aplican de modo externo a la cúpula. Por ejemplo, cargas transmitidas al borde del hueco de la clave.

Los valores de u_1 y v_1 se pueden determinar con las condiciones de contorno. No se pueden imponer condiciones al giro porque se alteraría el régimen de pura compresión en el que se basan las fórmulas utilizadas. Por ejemplo, si $u_2 = v_2 = 0$, las condiciones de contorno dan:

$$u_1 = - \int_1^2 N_\varphi x d\theta \cos \varphi ds / E\Omega \quad (4.10)$$

$$v_1 = - \int_1^2 N_\varphi x d\theta \sin \varphi ds / E\Omega \quad (4.11)$$

5. Casos particulares

5.1. Cúpula de espesor constante

En este caso se debe comenzar por determinar la directriz, única para cada diámetro y flecha.

Se cumple $p = \text{constante}$ y $\rho = (1 + y'^2)^{3/2} / y''$; $\cos^2 \varphi = (1 + y'^2)^{-1}$ y sustituyendo en (4.5)

$$C = p x \rho / (1 + \tan^2 \varphi) = p x (1 + y'^2)^{1/2} / y''$$

que equivale a

$$y'' / \sqrt{1 + y'^2} = (p / C) x$$

Al ser p constante, la primera integral es $\arg \operatorname{sh} y' = (p / 2C) x^2 + C'$

Para determinar C' se puede poner una condición en $x = 0$. Si se supone $y'_0 = 0$ (tangente horizontal en la clave) se obtiene $C' = 0$ y la solución anterior deviene:

$$y' = \operatorname{sh} (p x^2 / 2C) \quad (5.1)$$

que define la directriz de la superficie media. Su semejanza con una de las integrales de Fresnel avisa de que no es integrable en forma finita. En el ejemplo posterior, se integra numéricamente.

La condición de cúpula abierta en clave aconseja considerar otras condiciones que puedan adaptarse mejor a un caso concreto.

Si se elige C' para $y'_0 \neq 0$, que da $C' = \operatorname{argsh} y'_0$, la directriz resulta con un pico en $x = 0$ (cúpula apuntada). En este caso, la ecuación de la meridiana es

$$y' = \operatorname{sh} (p x^2 / 2C + \operatorname{argsh} y'_0) \quad (5.2)$$

En #6.1 se estudian numéricamente ejemplos de ambas alternativas: Cúpula abierta con $y'_0 = 0$ y cúpula abierta apuntada en el centro con $y'_0 = -0.10$

Nótese que imponer condiciones en $x = 0$ no contradice la exigencia de cúpula abierta en clave ya que la directriz queda definida para todo valor de x .

5.2. Cúpula esférica de espesor variable

El radio R de la esfera se obtiene inmediatamente dados el radio L de la circunferencia de apoyo y la flecha mediante:

$$R = (L^2 + f^2) / 2f \quad (5.3)$$

La constante C se calcula con la ecuación (4.5), el valor constante de ρ ($= R$) y los valores de p_L y $\cos \varphi_L$ correspondientes al arranque de la cúpula ($x = L$) siendo:

$$\cos \varphi_L = (R - f) / R \quad (5.4)$$

El valor p_L es el peso correspondiente al espesor en el arranque y puede ser elegido por el analista. Utilizando la ecuación (4.5) se cumple:

$$C = p_L L (R - f)^2 / R$$

Con este valor de C, la ecuación (4.3) da los valores de N:

$$N_\varphi = C / R \sin \varphi \cos \varphi \quad (5.5)$$

Donde se ha tenido en cuenta que la abscisa $x = R \sin \varphi$

Los valores de p se obtienen despejando en (4.6)

$$p = N_\varphi / R \cos \varphi \quad (5.6)$$

y dividiendo por el peso específico γ se obtiene el espesor e, variable en la forma:

$$e = p / \gamma \quad (5.7)$$

que en el arranque toma el valor elegido por el analista.

Las tensiones son $\sigma = N_\varphi / e = \gamma N_\varphi / p$ y sustituyendo en (4.7) se obtiene

$$\sigma = \gamma R \cos \varphi \quad (5.8)$$

5.3. Cúpula de igual resistencia y espesor variable

Llamando σ a la tensión a la que va a trabajar la cúpula y e al espesor (variable) se tiene y sustituyendo $N_\varphi = \sigma e$ en la ecuación (4.7) y simplificando se llega a:

$$(\gamma / \sigma) \rho \cos \varphi = 1$$

Con $\rho = (1 + y'^2)^{3/2} / y''$; $\cos \varphi = (1 + y'^2)^{-1/2}$ se llega a $y'' / (1 + y'^2) = \gamma / \sigma$ e integrando: $\arctg y' = (\gamma / \sigma)x + K$

Para que en $x = 0$ el ángulo de la tangente a la directriz sea φ_0 , $K = \varphi_0$ (generalmente, $\varphi_0 \leq 0$) y la ecuación anterior deviene:

$$\arctg y' = (\gamma / \sigma)x + \varphi_0 ; \text{ o en forma equivalente:}$$

$$y' = \operatorname{tg} ((\gamma / \sigma)x + \varphi_0) \text{ cuya integral es}$$

$$y = -(\sigma / \gamma) \operatorname{Ln}(\cos (\gamma x / \sigma + \varphi_0)) + K'$$

donde Ln indica el logaritmo neperiano

Para que en $x = 0$ sea $y = f$,

$$K' = f + (\sigma / \gamma) \operatorname{Ln}(\cos \varphi_0)$$

siendo f la flecha de la cúpula, o sea, la ordenada de la meridiana en $x = 0$ y de aquí:

$$y = f - (\sigma / \gamma) \operatorname{Ln}(\cos(\gamma x / \sigma + \varphi_0) / \cos(\varphi_0)) \quad (5.9)$$

Para que en $x = L$ sea $y = 0$ debe cumplirse:

$$0 = f - (\sigma / \gamma) \operatorname{Ln}(\cos(\gamma L / \sigma + \varphi_0) / \cos(\varphi_0)) \quad (5.10)$$

El usuario puede elegir dos de entre los tres valores f, σ y φ_0 relacionados por (5.10) y deducir por tanteos el tercer valor

Tras esto, la directriz está definida por la ecuación (5.9).

Si se elige $\varphi_0 = 0$, las ecuaciones (5.9) y (5.10) son:

$$y = f - (\sigma / \gamma) \operatorname{Ln}(\cos(\gamma x / \sigma)) \quad (5.11)$$

$$0 = f - (\sigma / \gamma) \operatorname{Ln}(\cos(\gamma L / \sigma)) \quad (5.12)$$

Una vez elegido f o σ , la ecuación (5.12) permite obtener, por tanteos, el otro valor

A partir de los valores f, σ y φ_0 la directriz está definida por (5.9) o (5.11)

Los esfuerzos se obtienen de la ecuación (4.3) en la forma $N_\varphi = C / x \cos \varphi$ y los espesores se calculan mediante la fórmula $e = N_\varphi / \sigma$

6. Ejemplos

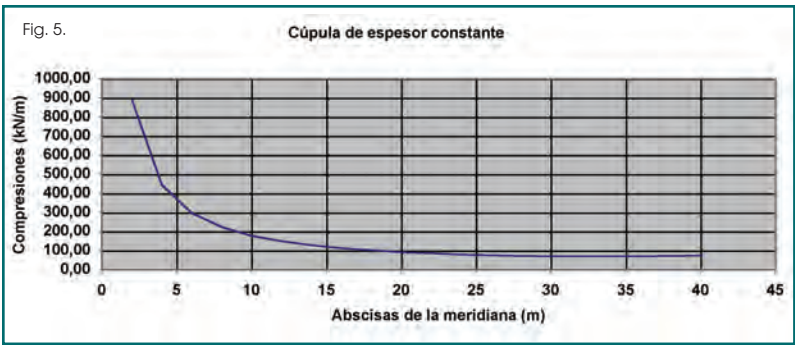
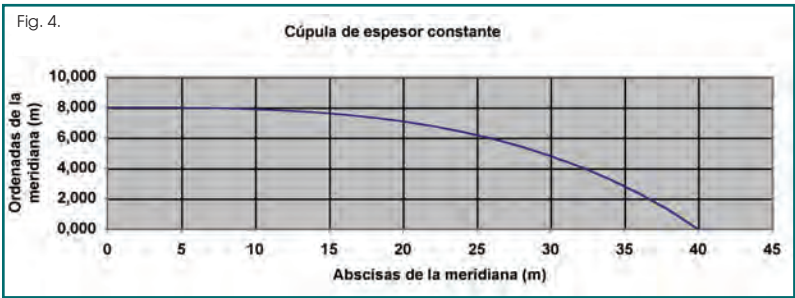
En todos los siguientes ejemplos se toma $E = 3.5 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$

6.1. Cúpula de hormigón de espesor constante

Son datos:
Radio de la circunferencia de apoyo $x_L = 40$ m
Altura de la clave sobre el arranque $y_0 = 8$ m
 $p = 2.45$ kN / m² para un espesor de 0.10 m
Las pendientes y' se han calculado para abscisas cada metro con la ecuación (4.1) partiendo del $y'_0 = 0$ en $x = 0$
La ordenadas y se han obtenido para abscisas cada 2 m por la fórmula de Simpson partiendo de $y_0 = 8$ y ajustando por tanteos el valor de C para que $y_{40} = 0$. Así se ha obtenido $C = 1780.31$ y los resultados del Cuadro 1

y la forma de la Fig.4. La curva definida incluye el rango completo $0 \leq x \leq 40$ aunque la cúpula tenga un hueco en la proximidad de $x = 0$

Los esfuerzos N_φ tienen la distribución de la Fig. 5 en la que se aprecia su crecimiento asintótico al acercarse



Cuadro 1. Cúpula de espesor constante					
Radio en la base = 40		Altura en la clave = 8			
$p = 2.45$ kN / m ²		$C = 1780.3100$			
X	y	y'	x	Compresiones	
				N (kN/m)√	σ (N/mm ²)
0	8.000	0.000	0	Zona del hueco	
2	7.999	-0.003	2	890.16	8.902
4	7.993	-0.011	4	445.10	4.451
6	7.975	-0.025	6	296.81	2.968
8	7.941	-0.044	8	222.75	2.228
10	7.885	-0.069	10	178.45	1.785
12	7.802	-0.099	12	149.09	1.491
14	7.685	-0.135	14	128.32	1.283
16	7.529	-0.177	16	113.00	1.130
18	7.329	-0.225	18	101.37	1.014
20	7.078	-0.279	20	92.41	0.924
22	6.769	-0.339	22	85.45	0.855
24	6.397	-0.407	24	80.08	0.801
26	5.953	-0.482	26	76.02	0.760
28	5.430	-0.566	28	73.06	0.731
30	4.818	-0.660	30	71.09	0.711
32	4.107	-0.764	32	70.03	0.700
34	3.285	-0.882	34	69.82	0.698
36	2.338	-1.015	36	70.45	0.705
38	1.249	-1.165	38	71.94	0.719
40	0.000	-1.337	40	74.32	0.743

se al eje de revolución. En $x = 2$ vale 890.16 kN/m (compresión).

En el arranque ($x = 40$), la compresión es 74.32 kN/m
Los esfuerzos de la Fig. 5 incluyen el rango $2 \leq x \leq 40$ y son válidos aunque el hueco de la cúpula tenga un radio superior a 2 m.

Las tensiones de compresión en N / mm² tienen por valor numérico los de los esfuerzos axiles divididos por 100

A la vista de esta ley de esfuerzos y de los requisitos funcionales (ventilación, iluminación, etc.), el proyectista puede decidir el diámetro del hueco de la clave.

Una solución alternativa con $y'_0 = -0.1$ es la de la Fig. 6

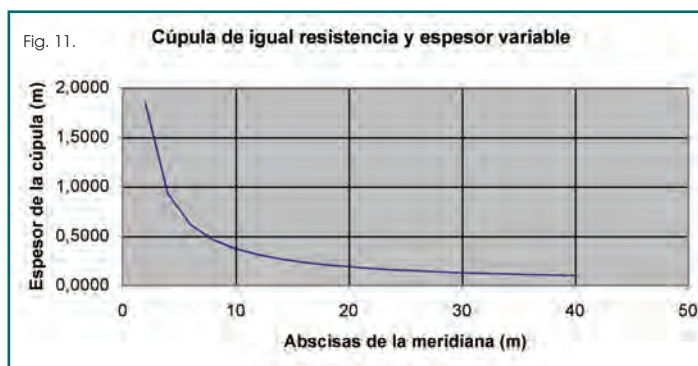
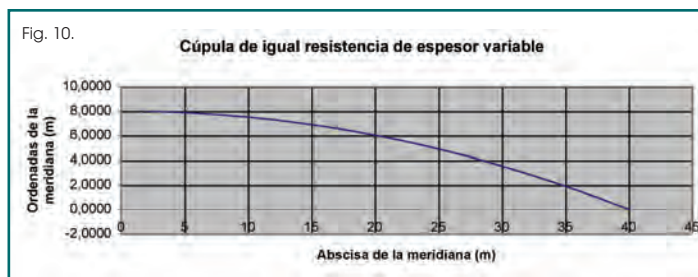
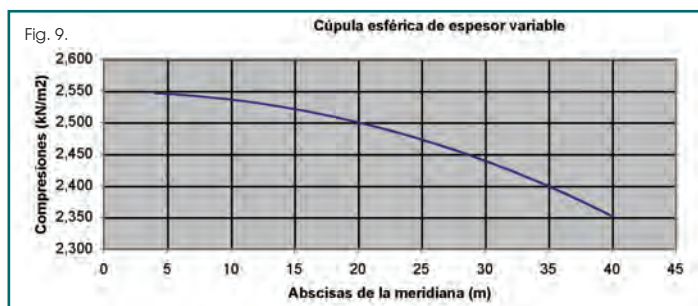
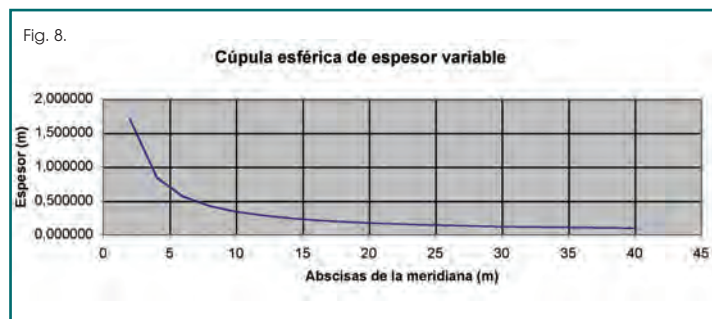
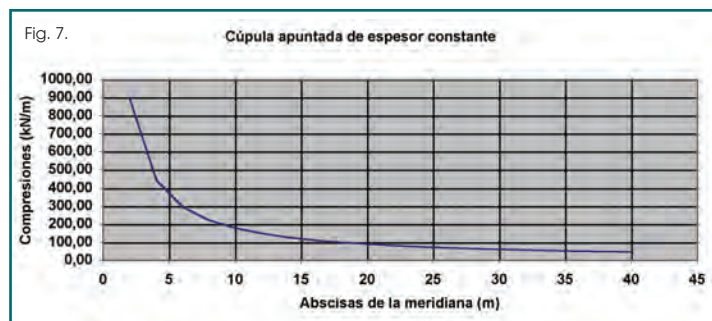
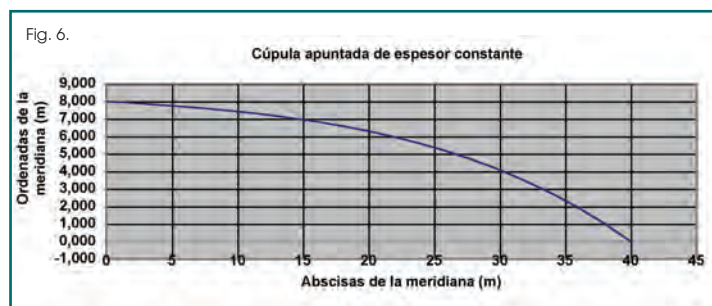
Los esfuerzos N_φ tienen la distribución de la Fig. 7 en la que se aprecia su crecimiento asintótico al acercarse al eje de revolución. En $x = 2$ vale 894.64 / kN / m (compresión).

En el arranque ($x = 40$), la compresión es 46.63 kN/m

Las tensiones de compresión en N/mm² tienen por valor numérico los de los esfuerzos axiles tabulados antes divididos por 100.

6.2. Ejemplo de cúpula esférica de espesor variable

Los parámetros del cálculo son:
Radio en la circunferencia de apoyo = 40m
Altura en la clave = 8m



Por consideraciones geométricas: Radio de la esfera = 104 m y $\cos \varphi$ en el arranque = 0.92307692 equivalente a un ángulo de $\varphi_2 = 22.61986495^\circ = 0.394791197 \text{ rad}$

El hueco en la clave tiene un radio de 4m que equivale a $\varphi_1 = 2.204227504^\circ = 0.038471027 \text{ rad}$

Peso específico del hormigón = 24.5 kN/m^3 y se toma un espesor en el arranque de 0.10 m.

$$C = 8684.308 \text{ kN}$$

La variación de espesores se indica en la figura 8

Los esfuerzos varían como indica la Fig. 9

Los corrimientos son particularmente sencillos en este caso dado que $\rho = R$, constante. Las fórmulas (4.10) y (4.11) se transforman en

$$u_1 = -\left(\frac{\gamma}{E}\right) \int_1^2 R^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \left(\frac{\gamma R^2}{4E}\right) [2\varphi_1 - 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2]$$

$$v_1 = -\left(\frac{\gamma}{E}\right) \int_1^2 \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \left(\frac{\gamma R^2}{4E}\right) [\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2]$$

Con $\gamma = 24.5 \text{ kN / m}^3$, $E = 3.5 \times 10^7 \text{ kN / m}^2$, $\varphi_1 = \arcsen(4 / 104) = 2.2^\circ = 0.038397 \text{ rad}$; $\varphi_2 = 22.6198649^\circ = 0.394791 \text{ rad}$. Operando en las fórmulas anteriores, $u_1 = 1.503 \text{ mm}$ y $v_1 = 0.554 \text{ mm}$

6.3. Ejemplo de cúpula de igual resistencia

Se calcula con los siguientes valores: $\gamma = 24.5 \text{ kN / m}^3$; Radio de la circunferencia de arranque 40 m; Flecha = 8m; Espesor en el arranque = 0.10m

Tanteando valores para σ para ajustar la directriz a las dimensiones de la cúpula, Ec. (5.12) se obtiene $\sigma = 2514.65 \text{ kN / m}^2 = 2.514 \text{ N / mm}^2$ y mediante la Ec. (4.3) $C = 9304.38$

La directriz se calcula mediante la ecuación (5.11) y tiene el aspecto que se ve en la Fig. 10.

La variación de espesores se muestra en la Fig. 11. ♦

Referencias: Timoshenko y Woinowsky-Krieger, "Theory of plate and shells"