

Mi Espiral. (Otra posible curva de transición)

My Spiral (Another possible transition curve)

Manuel Rodríguez Sánchez. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Colegiado nº 4.542. mrodsan@ciccp.es

Resumen: En este artículo se describe una espiral cuya "gracia especial", consiste en que su radio de curvatura es función lineal del ángulo que la tangente en cada punto forma con el eje de abscisas. En la clotoide el radio de curvatura es inversamente proporcional a la longitud del desarrollo del arco recorrido desde el origen.

En la espiral que nos ocupa el radio de curvatura decrece con mayor rapidez que el de la Clotoide. Este es su inconveniente o su ventaja, quizá, en algún caso.

Palabras Clave: Transición, Espiral, Radio de curvatura, Clotoide

Abstract: This article describes a spiral which is noted by the fact that its radius of curvature is a lineal function of the angle formed by the tangent at each point with the axis of the abscissa.

The radius of curvature at the clothoid or double spiral is inversely proportional to the length of the evolution of the arc running from the initial point.

In the spiral in question, the radius of curvature decreases faster than that of the clothoid.

This is its main disadvantage though, in certain cases, it could be seen as an advantage.

Keywords: Transition, Spiral, Radius of curvature, Clothoid

Preámbulo

La curva que aquí analizamos con algún detalle, y que en cierta medida está relacionada con la Involuta de la Circunferencia, posee unas características que quizás la podría hacer particularmente adecuada para complementar, o sustituir en algún caso, a la curva de transición por excelencia: La Clotoide.

A continuación desarrollamos el estudio analítico de esta espiral, para después establecer algunas conclusiones y comparaciones entre ambas curvas.

Definición

Es el lugar geométrico de los puntos del plano descritos por el centro de una circunferencia móvil, unida a otra fija mediante un hilo tenso y sin extensión que se va arrollando sobre ambas, cuando la circunferencia móvil gira alrede-

dor de la fija (sin girar respecto de su centro ninguna de las dos) y estando situadas cada una en los semiplanos opuestos definidos por el hilo. (Ver la fig. 1).

Estudio de la curva

1. Ecuación en coordenadas cartesianas

Las coordenadas x e y definidas en función del parámetro φ , que es el ángulo que forma la parte de hilo no arrollada con el eje de las y según se indica en la figura 1, vienen dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}x &= (L - 2R \varphi) \operatorname{sen} \varphi + 2R (1 - \cos \varphi) \\y &= L - (L - 2R \varphi) \cos \varphi - 2R \operatorname{sen} \varphi\end{aligned}$$

Donde "L" es la distancia entre los centros de las circunferencias proyectada sobre el eje de las ordenadas

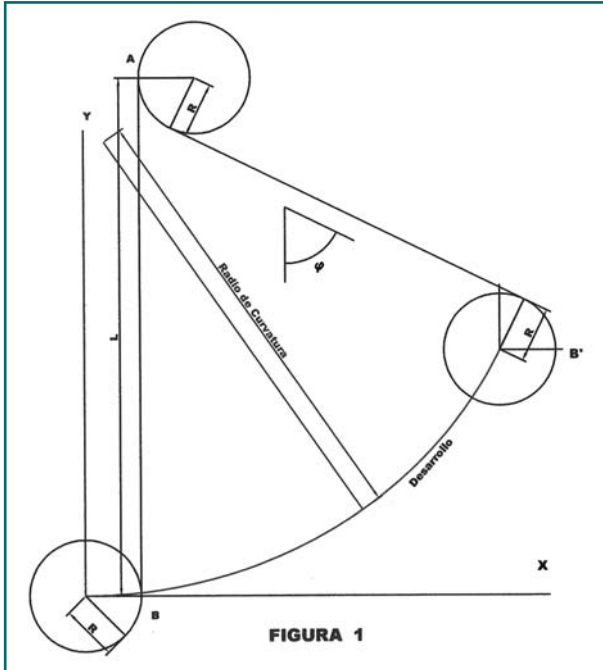


Fig 1.

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Introduciendo en la ecuación anterior los valores de y' e y'' en función del parámetro φ , el valor del radio de curvatura resulta ser:

$$\rho = L - 2R\varphi$$

4. Desarrollo de la espiral en función del parámetro φ

El desarrollo de la espiral se obtiene mediante la integral de $\rho d\varphi$, o sea:

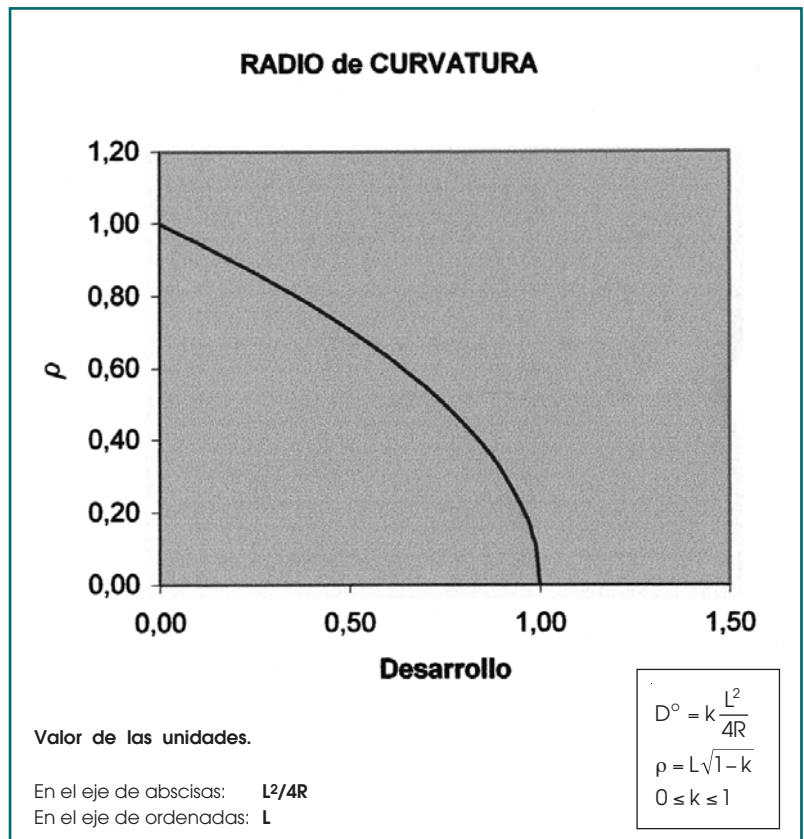
$$\int \rho d\varphi = \int (L - 2R\varphi) d\varphi = L\varphi - R\varphi^2 = D^\circ$$

5. Relación entre el radio de curvatura en un punto y el desarrollo de la curva desde el origen hasta ese punto

Se obtiene eliminando el parámetro φ entre las ecuaciones que definen el radio de curvatura en el punto y el desarrollo de la espiral hasta ese punto (figura 2):

$$\rho^2 = L^2 - 4RD^\circ$$

Fig 2.



en el origen del movimiento, ($\varphi = 0$), y "R" el radio de cada una de las dos circunferencias.

Cuando los radios de las circunferencias son distintos, el valor $2R$ se convierte en $R_1 + R_2$.

2. Primera y segunda derivadas en función del parámetro φ

La primera derivada de y respecto de x en función del parámetro φ resulta ser:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \text{tg } \varphi$$

Esto implica que el ángulo que la tangente a la curva forma con el eje de abscisas sea φ . Es el correspondiente con la τ de la Clotoide.

y la segunda derivada de y respecto de x en función de φ :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{1}{(L - 2R\varphi) \text{sen}^3 \varphi}$$

3. Radio de curvatura en función del parámetro φ

El radio de curvatura en un punto de la curva, en coordenadas cartesianas, viene dado por la ecuación:

6. Corolarios

a). Puesto que el valor del radio de curvatura en un punto es $L-2R\varphi$ (que equivale a la cantidad de hilo aún no arrollada sobre los círculos) y el radio es perpendicular a la tangente en el punto citado, el lugar geométrico de los centros de curvatura de la espiral es una circunferencia de radio $2R$ y centro el de la circunferencia fija sobre la que también se arrolla el hilo.

b). Cuando cualquiera de los círculos se convierte en un punto, las ecuaciones anteriores quedan así:

$$\begin{aligned} \rho &= L - R\varphi \\ D^\circ &= L\varphi - \frac{1}{2}R\varphi^2 \\ \rho^2 &= L^2 - 2RD^\circ \end{aligned}$$

c). Cuando los dos círculos se convierten en dos puntos, la espiral toma la forma de una circunferencia de radio L y centro el punto de coordenadas $(0,L)$.

Comentarios y conclusiones

En base a las ecuaciones establecidas anteriormente y a las gráficas que aquí se indican, se pueden establecer algunas consideraciones como las siguientes:

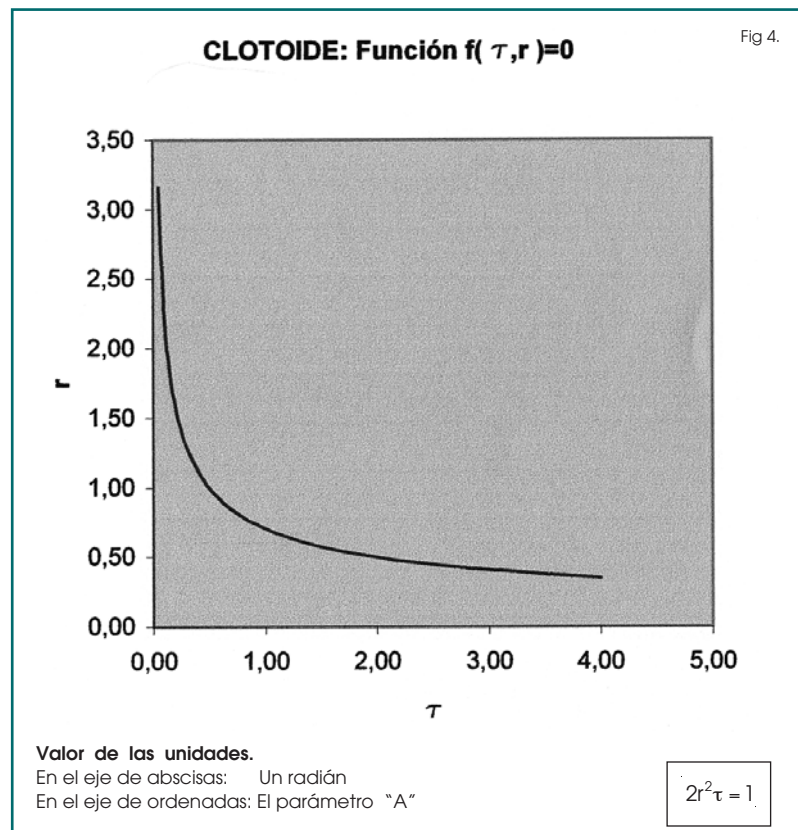
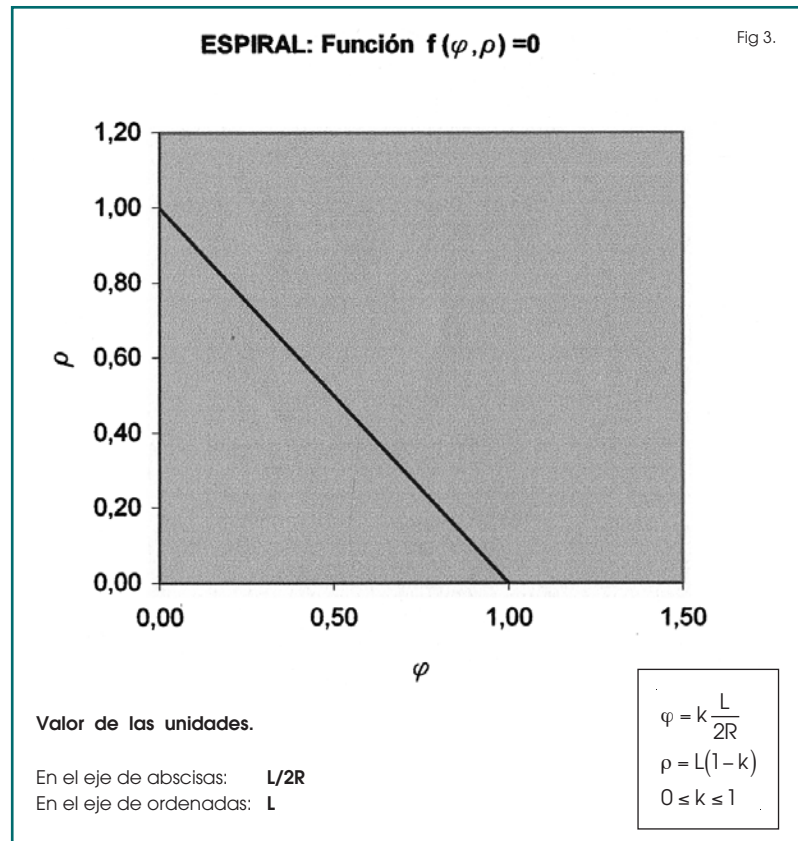
a). La característica fundamental de esta espiral (figura 3) es que el radio de curvatura en un punto depende linealmente del ángulo φ (que es el parámetro y también el ángulo que forma el eje de abscisas con la tangente a la espiral en ese punto). Este ángulo es el correspondiente al ángulo τ de la clotoide.

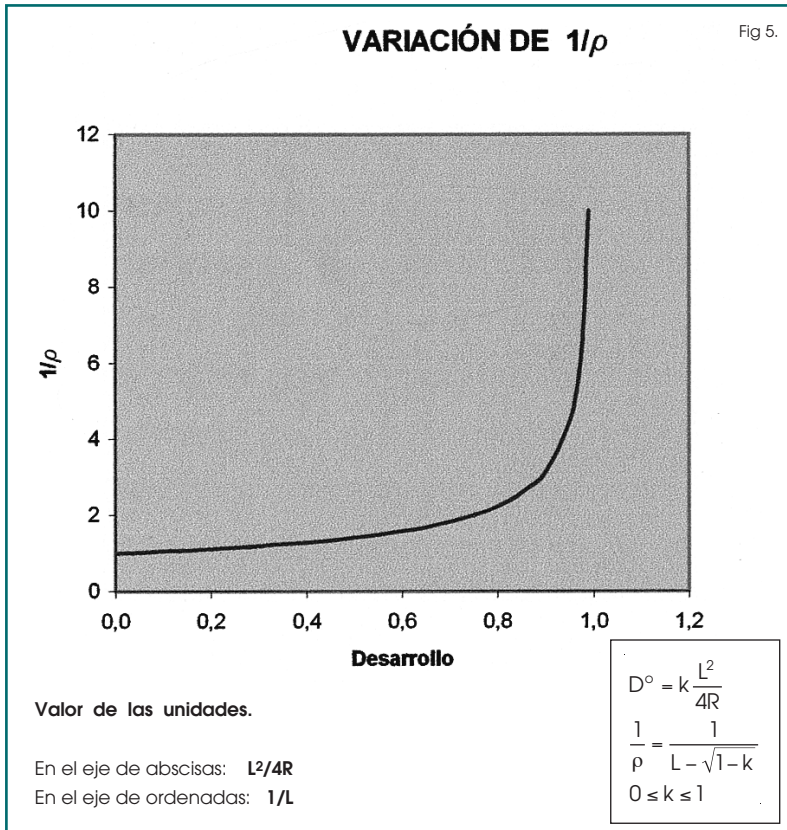
valor máximo para $\varphi=0$. es $\rho=L$, y se anula para $\varphi=L/2R$.

En la Clotoide unitaria la variación del radio de curvatura en función del ángulo τ viene dada por la ecuación $2r^2\tau=1$, (figura 4). Como es sabido todas las clotoides son homotéticas respecto de la clotoide unitaria con razón de homotecia su parámetro A . Por lo tanto su ecuación general es $2R^2\tau=A^2$.

b). La variación del radio de curvatura en función del desarrollo del arco recorrido expresada en la figura 2, es una parábola de segundo grado de eje horizontal cuyo máximo valor para $D^\circ=0$ es $\rho=L$, y se anula para $D^\circ=L^2/4R$

En la clotoide esta variación viene dada por la clásica hipérbola equilátera definida por la relación



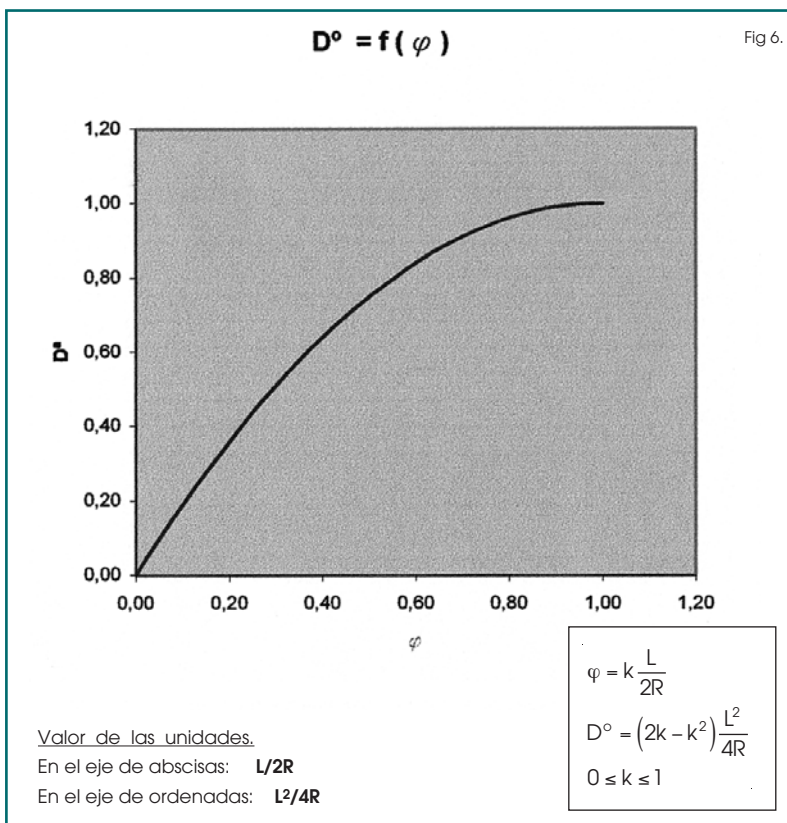


$RL=A^2$ donde siguiendo la nomenclatura que aquí hemos adoptado sería $\rho D^\circ=A^2$

c). En cuanto a la variación del inverso del radio de curvatura en función del desarrollo del arco (que en la clotoide es su característica principal, ya que es función lineal de éste), aquí conviene hacer algunas puntualizaciones (figura 5):

1.- La función $1/\rho$ no parte de 0; arranca con el valor de $1/L$ y una pendiente creciente de $2R/L^3$.

2.- Es una función continuamente creciente, no lineal y cóncava hacia arriba, que puede considerarse casi-lineal hasta no más allá del 50% del valor máximo del desarrollo (50% de $L^2/4R$). Por este motivo hay que resaltar que la fuerza centrífuga que aparecería en un móvil que recorriese esta espiral, no crecería linealmente como lo haría si discurriera por una clotoide. Como se ve, (figura 6), el desarrollo en función del ángulo φ es una parábola de eje vertical que crece más lentamente conforme se acerca al vértice, por lo tanto, el inverso del radio de curvatura crece con mayor rapidez al aumentar el valor del desarrollo.



d). Esta espiral depende de dos parámetros: L y $2R$; o L y $L/2R$. La clotoide únicamente depende del valor de A .

La tabla de la figura 7 muestra la variación del ángulo φ en función del parámetro $L/2R$ y del valor de "k" que es la parte de desarrollo recorrido hasta ese punto respecto del desarrollo total ($L^2/4R$).

De modo similar a la clotoide, el ángulo φ , una vez fijados "k" y $L/2R$, se mantiene constante para cualquier valor de L .

Puesto que φ no suele superar nunca el valor de $3\pi/4$ (las tablas alemanas de clotoides de KASPER, SCHÜRBA y LORENZ, cuya primera edición es de 1954, terminan en el valor de $\tau=2,42$ radianes) en la tabla de la figura 7 se indican los límites de aplicación práctica para cada valor de $L/2R$.

Por otra parte, y ya que decimos que la función $1/\rho$ de la figura 6 deja de ser casi-lineal en el entorno del 50% del desarrollo máximo ($L^2/4R$), el límite del valor de φ lo debiéramos fijar también en el entorno del 30% del valor de $L/2R$, tal como se despren-

Figura 7. VALORES de f en función de L/2R y de k.

L/2R	k									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,051	0,106	0,163	0,225	0,293	0,368	0,452	0,553	0,684	1
2	0,103	0,211	0,327	0,451	0,586	0,735	0,905	1,106	1,368	2
3	0,154	0,317	0,490	0,676	0,879	1,103	1,357	1,658	2,051	3
4	0,205	0,422	0,653	0,902	1,172	1,470	1,809	2,211	2,735	4
5	0,257	0,528	0,817	1,127	1,464	1,838	2,261	2,764	3,419	5
6	0,308	0,633	0,980	1,352	1,757	2,205	2,714	3,317	4,103	6
7	0,359	0,739	1,143	1,578	2,050	2,573	3,166	3,870	4,786	7
8	0,411	0,845	1,307	1,803	2,343	2,940	3,618	4,422	5,470	8
9	0,462	0,950	1,470	2,029	2,636	3,308	4,070	4,975	6,154	9
11	0,564	1,161	1,797	2,479	3,222	4,043	4,975	6,081	7,521	11
12	0,616	1,267	1,960	2,705	3,515	4,411	5,427	6,633	8,205	12
13	0,667	1,372	2,123	2,930	3,808	4,778	5,880	7,186	8,889	13
14	0,718	1,478	2,287	3,156	4,101	5,146	6,332	7,739	9,573	14
15	0,770	1,584	2,450	3,381	4,393	5,513	6,784	8,292	10,257	15
16	0,821	1,689	2,613	3,606	4,686	5,881	7,236	8,845	10,940	16
17	0,872	1,795	2,777	3,832	4,979	6,248	7,689	9,397	11,624	17
18	0,924	1,900	2,940	4,057	5,272	6,616	8,141	9,9501	2,308	18
19	0,975	2,006	3,103	4,283	5,565	6,983	8,593	10,503	12,992	19
20	1,026	2,111	3,267	4,508	5,858	7,351	9,046	11,056	13,675	20

$$\varphi = \left(1 - \sqrt{1 - k}\right) \frac{L}{2R}$$

Nota: "k" es la parte del desarrollo total L²/4R

de la figura 6 si queremos que la fuerza centrífuga siga creciendo de una manera cuasi-lineal.

e). Por último pensamos que el campo de utilidad práctica de esta espiral pudiera, básicamente, estar en aquellos casos en los que sea necesario partir de un cierto radio de curvatura, y que quien proyecte el trazado considere oportuno, o al menos no tenga inconveniente, en que la rapidez de decrecimiento

del radio de curvatura sea superior a la que tendría si proyectase una clotoide.

En particular, probablemente pueda tener aplicación en trazado de intersecciones, bucles, isletas, vías de aceleración o deceleración, terrenos accidentados, ..etc; y en aquellos otros casos en los que algún amable lector crea que pueda tener aplicación la curva que aquí comentamos. ♦