EL MODELO SQRT-ET$_{MAX}$

THE SQRT-ET$_{MAX}$ MODEL

CARLOS ZORRAQUINO JUNQUERA. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Ingeniero Consultor SERS, S.A. czorraquino@sers.es

RESUMEN: El artículo presenta de una forma simple un modelo de evaluación de lluvias extremas desarrollado en Japón y que poco a poco va imponiéndose en España.
Este modelo está basado en tres principios, admitidos de forma tradicional, de comportamiento de las precipitaciones extremas como son la independencia de las mismas, la forma triangular del hietograma y la independencia entre intensidad máxima y duración de tormenta. Por esta razón se trata de un modelo elaborado expresamente para la Modelización de precipitaciones y que por lo tanto a priori debería representar de forma más fiable el fenómeno físico. En este artículo se elabora un método de aplicación del modelo, basado en una sencilla aproximación polinómica, y se demuestra su aplicabilidad al nordeste de la península Ibérica, mediante la comparación de resultados obtenidos con los distintos modelos existentes (Gumbel, LOG-Pearson III y SQRT-ET$_{MAX}$).

PALABRAS CLAVE: PRECIPITACIONES MAXIMAS DIARIAS, MODELO SQRT-ET$_{MAX}$, APLICABILIDAD AL NORDESTE ESPAÑOL

ABSTRACT: The article presents an overview of the extreme rainfall evaluation model developed in Japan and gradually being introduced in Spain.
The model is based on three principles which are traditionally admitted in the study of extreme rainfall behaviour and namely: the independence of the same, the triangular form of the histogram and the independence between maximum intensity and length of the storm. This is, therefore, a model which has been expressly prepared to model rainfall and should, in theory, serve as the most reliable way of evaluating the same. In this article an application method is prepared in accordance with the model, based on a simple polynomial approximation, and is applied to northeast of the Iberian peninsular and then compared with results obtained from other existing models (Gumbel, LOG-Pearson III and SQRT-ET$_{MAX}$)

KEYWORDS: MAXIMUM DAILY RAINFALL, SQRT-ET$_{MAX}$ MODEL, APPLICABILITY TO NORTHEAST SPAIN

1. INTRODUCCIÓN

La correcta estimación de los caudales máximos que se pueden dar en una cuenca es de vital importancia a la hora de diseñar obras públicas. Para realizar esta estimación se recurre, actualmente en España, a dos sistemas principalmente:

- Si se trata de un cauce permanente en el que existen estaciones de aforo cercanas al punto de análisis, se recurre a la serie de datos proporcionada por dicha estación y mediante un ajuste estadístico se estima el caudal máximo instantáneo relacionado con un período de retorno determinado.
- Si no se trata de un cauce permanente se recurre, en España, al método racional que relaciona el caudal máximo en una cuenca con el producto de la intensidad máxima de precipitación con el área de la cuenca mediante una constante de proporcionalidad *c* denominada coeficiente de escorrentía $Q = c * I * A$.

Para que este último método resulte efectivo es de vital importancia la correcta estimación del parámetro *c* y de la intensidad máxima de precipitación *I*.

Es en la estimación de este parámetro, por ejemplo mediante la utilización de curvas IDF sintéticas como las que propone la Instrucción de Carreteras *5* .2-IC:

$$I_1 = \frac{P_d}{24} * \left(\frac{I_1}{I_d}\right)^{\frac{28^{0,1} - D^{0,1}}{0,4}}$$

donde se pone de manifiesto la importancia que tiene la correcta estimación de la precipitación máxima diaria Pd.

Se admiten comentarios a este artículo que deberán ser remitidos a la Redacción de la ROP antes del 15 de noviembre de 2004. | Recibido: mayo 2001. Aceptado: junio 2004.

La estimación de P_d se realiza a través de las series de precipitación diaria registradas por los pluviógrafos de la zona estudiada. Dado que la realización de una estimación directa resultaría inviable (para obtener una precipitación con una probabilidad de no superación de 0,99 harían falta más de 100 años seguidos y representativos de datos) se recurre al tratamiento estadístico de las series existentes analizando los máximos anuales de precipitación registradas en la zona.

Según la normativa actual en la materia, Instrucción de Carreteras 5.2-IC, las series de máximos anuales de precipitación diaria se distribuyen según una variable aleatoria (v.a.) tipo Gumbel

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-b}{a}\right)\right)$$

Aunque otras publicaciones como las *Recomendaciones para el cálculo Hidrometerológico de avenidas* (F.J. Ferrer Polo) publicado por el CEDEX admiten e incluso recomiendan otras distribuciones como pueden ser la LOG-Pearson III, utilizada en EE.UU., o la SQRT-ET_{MAX}.

2. EL MODELO SQRT-ET_{MAX}

En 1986 los ingenieros japoneses Etoh y Murota [ET] se plantean la problemática que presentan las distribuciones estadísticas utilizadas para modelizar los máximos anuales de precipitación diaria:

a) La distribución de Gumbel infravalora los valores de precipitación asociados a períodos de retorno altos, creando una incertidumbre sobre la seguridad de las obras diseñadas bajo este criterio.
b) La distribución LOG-Pearson III no infravalora estos valores pero cuenta con 3 parámetros a estimar y la precisión del ajuste se resiente con ello.
c) Ambas distribuciones son muy sensibles a la presencia de valores erráticos en la serie, comúnmente denominados outliers.

Con el objetivo de superar estas dificultades plantean 3 hipótesis de partida:

a) La duración y la intensidad máxima de una tormenta individual son variables estadísticamente independientes entre sí.
b) La duración se distribuye según una v.a. exponencial y la intensidad máxima según una v.a. de tipo Gamma.
c) La cantidad de lluvia caída en una tormenta es proporcional al producto de la duración y la intensidad máxima de precipitación siendo la constante de proporcionalidad de 0,50. Lo que conduce a una forma triangular del hietograma, este patrón fue propuesto por Chow (1980) [CH] tras el análisis de una larga serie de lluvias en Illinois y ha sido comúnmente aceptado como válido para las lluvias ciclónicas.

Aplicando estas tres hipótesis tenemos que la función de distribución de la cantidad de lluvia total de una tormenta individual sigue una distribución, que Etoh y Murota denominaron SQRT-ET, como la que sigue:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \left(1 + \sqrt{\alpha * x}\right) * \exp\left(-\sqrt{\alpha * x}\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

Si se tiene en cuenta que las tormentas son fenómenos que describen un proceso de Poisson, el tiempo transcurrido entre dos tormentas sigue una distribución exponencial, podemos aplicar una maximización del proceso de Poisson obteniéndose así la distribución estadística de los máximos, que fue denominada SQRT-ET_{MAX}

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \exp\left(-k * \left(1 + \sqrt{\alpha * x}\right) * \exp\left(-\sqrt{\alpha * x}\right)\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

donde k es un factor que se denomina de forma y α es un factor que se denomina de escala.

Esta distribución cuenta con la ventaja de haber sido planteada de forma específica para modelizar los máximos anuales de precipitación con lo que no es de prever que se produzcan infravaloraciones de los valores asociados a períodos de retorno elevados. Además al contar solo con dos parámetros para caracterizarla el ajuste de esta distribución cuenta con la misma precisión que el ajuste de la distribución de Gumbel.

3. APLICACIÓN

La estimación directa de los parámetros de la función SQRT-ETMAX no se puede hacer de forma analítica ya que *F(x)* carece de primitiva conocida.

Por esta causa se debe realizar de forma aproximada mediante métodos numéricos.

Actualmente los métodos utilizados para la aplicación de la función SQRT-ETMAX son:

i) Una tabla de conversión entre esta función y la función de Gumbel para series con coeficiente de variación (*Cv*) que oscile entre 0,30 y 0,99 publicada por el CEDEX.

ii) La utilización de los mapas de isohietas de la publicación Máximas lluvias diarias en la España Peninsular publicada por el CEDEX [MAXPLU]. Estos mapas proporcionan un valor para P_d y para Cv y posteriormente mediante la aplicación de coeficientes tabulados se obtienen los datos para el período de retorno deseado.

iii) La aplicación de la metodología propuesta por Javier Ferrer Polo [JF] en su tesis doctoral cuyo rango de aplicación oscila entre 0,25 y 0,90 para los valores de Cv.

En esta situación se realiza la tesina de especialidad ESTUDIO DE LA FUNCIÓN SQRT-ET$_{MAX}$ [CZ] dirigida por Eusebio Jarauta y Manuel Gómez de la E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona de la UPC.

El primer objetivo del mencionado trabajo ha consistido en la realización de un método de aplicación, fácilmente implementable, para la función de distribución propuesta por Etoh y Murota.

Para la consecución de este objetivo se ha utilizado el método de estimación de parámetros de los momentos convencionales ya que posee gran sencillez y es de una alta fiabilidad.

El método de los momentos convencionales se basa en igualar los parámetros poblacionales con los parámetros muestrales, así pues los momentos de primer y segundo orden toman los siguientes valores para la muestra:

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \alpha_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_2}{n} \Rightarrow \quad \overline{x} = \alpha_1 \qquad Cv = \frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2}}{\alpha_1}$$

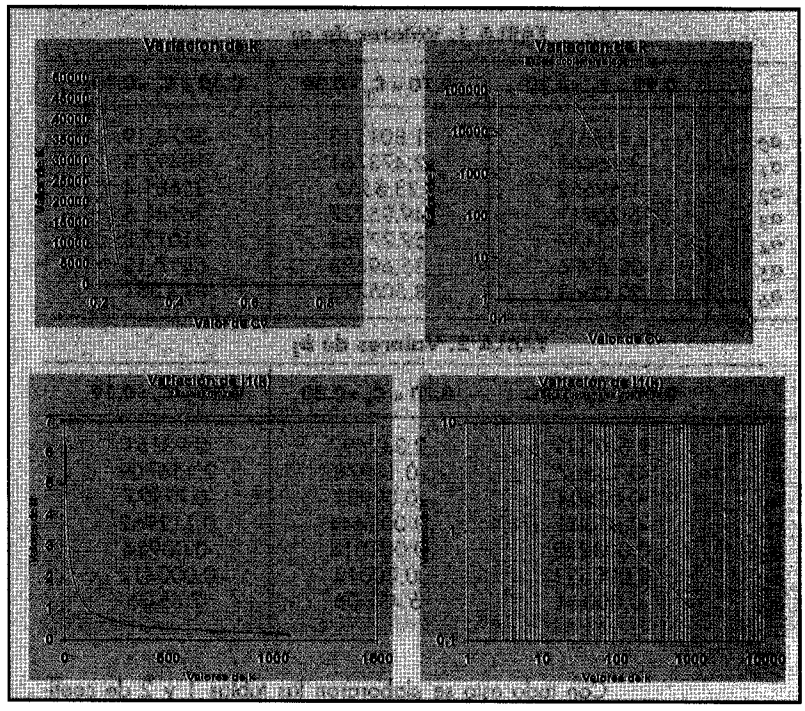
Aplicando estos valores a la formulación de la distribución SQRT-ET$_{MAX}$ se obtiene:

$$\alpha_1 = \frac{k}{1-e^{-k}} * \frac{I_1}{2*\alpha}$$

$$Cv = \frac{\sqrt{2*\left(\frac{1-e^{-k}}{k}\right)*I_2 - I_1^2}}{I1}$$

$$I_r = \int_0^{+\infty} z^r * \exp\left(-\sqrt{z}\right) * \exp\left(-k*\left(1+\sqrt{z}\right)*\exp\left(-\sqrt{z}\right)\right) dz$$

La realización de la integral I_r de forma analítica no resulta posible al carecer la misma de primitiva conocida por lo que en la tesina de especialidad se propone estimar numéricamente el valor k y de I_1 para después resolver de forma analítica el valor de α.



Para la estimación de los valores de k y de I_1 se procede a observar las gráficas que representan los valores de $k(Cv)$ y de I_1 (k).

De la observación de las gráficas se puede ver que tanto la dependencia de $k(Cv)$ como la de I_1 (k) sigue la forma:

$$\ln(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i * \ln(C_v)^i \qquad \ln(I_1) = \sum_{i=0}^{h} b_i * \ln(k)^1$$

La determinación del grado óptimo para los polinomios se realizó mediante ajustes con grados desde 3 hasta 8 observándose que la precisión aumentaba conforme lo hacía el grado hasta que éste último tomó el valor de 6, para valores mayores de n o h la precisión del ajuste se resentía y el coste computacional se incrementaba notablemente. Así mismo durante el proceso de ajuste, que se realizó mediante el método de los mínimos cuadrados, se observó que para ganar en precisión convenía dividir todo el rango de variación de Cv en 3 tramos a saber:

- Tramo 1: 0,999 ≥ Cv > 0,700
- Tramo 2: 0,700 ≥ Cv > 0,3 00
- Tramo 3: 0,300 ≥ Cv > 0,190

El valor del límite inferior de 0,190 se tomó debido a que todo el proceso se realizó en un ordenador personal compatible tipo PC y para valores menores se entraba dentro de los errores de la máquina y no se pudieron obtener valores fiables de integración numérica para I_1 e I_2.

TABLA 1. Valores de a_i

	$0.99 \geq C_v > 0.70$	$0.70 \geq C_v > 0.30$	$0.30 \geq C_v > 0.19$
a_0	1.318615	1.801513	-3978.19
a_1	-3.16463	2.473761	-18497.5
a_2	-1.59552	23.5562	-35681.4
a_3	-6.26911	49.95727	-36581.5
a_4	-11.3177	59.77564	-21017.8
a_5	-22.6976	35.69688	-6417.12
a_6	-22.0663	8.505713	-813.381

TABLA 2. Valores de b_i

	$0.99 \geq C_v > 0.70$	$0.70 \geq C_v > 0.30$	$0.30 \geq C_v > 0.19$
b_0	2.307319	2.342697	-0.93151
b_1	-0.13667	-0.14978	2.156709
b_2	-0.07504	-0.09931	-0.77977
b_3	-0.01346	0.003444	0.112962
b_4	0.003228	0.001014	-0.00934
b_5	0.000521	-0.00014	0.000412
b_6	-0.00014	5.49E-06	-7.5E-06

Con todo esto se elaboraron las tablas 1 y 2 de coeficientes, correspondientes a los polinomios de grado 6, para los valores de a_i y b_i.

Con estos coeficientes se obtienen unos errores en la estimación de k, en base a series teóricas generadas de forma aleatoria (Tabal 3).

Como se puede observar los errores cometidos en la estimación de I_1 son despreciables y los de k son perfectamente asumibles, ya que en casi todos los casos son inferiores al 1% y en todo el rango de aplicación son inferiores al 10%, error que se considera pueden tener los datos de origen en una serie de precipitación.

Para contrastar la aplicabilidad del método en la zona Noroeste de la península ibérica se siguió la siguiente metodología:

i) En primer lugar se escogieron cuatro estaciones meteorológicas que se consideró representaban los diferentes climas a estudiar.

ii) En segundo lugar se realizaron los ajustes de las series de dichas estaciones, según las distribuciones SQRT-ET_{MAX}, Gumbel y LOG-Pearson III.

iii) En todos los ajustes se realizó el test de bondad de ajuste Chi cuadrado y se ha procedido a comparar los resultados obtenidos con cada ajuste, eliminando aquellos ajuste que no pasaron el test de confianza.

Los resultados obtenidos en el ajuste de las series completas pueden resumirse en la Tabla 4.

El análisis de los resultados permite llegar a la conclusión de que el modelo SQRT-ET_{MAX} es aplicable, con la metodología expuesta anteriormente, al noroeste de la península ibérica. Además se puede observar que proporciona unos valores de precipitación superiores a los otros modelos cuando nos alejamos de los efectos de la costa y valores superiores a los proporcionados por la función de Gumbel e inferiores a los de la LOG-Pearson III en las zonas de costa.

También se realiza un estudio a la sensibilidad de datos erráticos mediante la depuración de las series de datos eliminando recursivamente aquellos que no entraban en la horquilla de valores proporcionada por el test de Chebychev

TABLA 3

Cv	K	Kaprox	Error	I_1	I_1aprox	Error
0.9795	3.9894	3.9895	0.0025%	7.0454	7.0454	0.00000%
0.8709	5.6925	5.6924	0.0018%	6.0846	6.0846	0.00000%
0.8003	7.3579	7.3578	0.0014%	5.4057	5.4057	0.00000%
0.7493	9.0613	9.0611	0.0022%	4.8772	4.8772	0.00000%
0.7049	11.1052	11.1051	0.0009%	4.3872	4.3872	0.00000%
0.5365	32.2635	32.2513	-0.03781%	2.3485	2.3489	0.01703%
0.4490	76.7880	76.7552	-0.04272%	1.3250	1.325	-0.00323%
0.4005	146.1760	146.3904	0.14667%	0.8435	0.8434	-0.01276%
0.3530	325.0116	324.2814	-0.22467%	0.4699	0.47	0.02128%
0.3261	563.2428	563.0532	-0.03366%	0.3102	0.3102	0.00000%
0.3017	1030.8035	1028.7111	-0.20299%	0.1941	0.1941	0.00000%
0.2468	6056.27	6122.06	1.086395%	0.046890	0.046889	0.00153%
0.2257	16334.75	15726.47	3.72385%	0.020631	0.020632	0.00325%
0.200382	65157.53	59038.86	9.39057%	0.006416	0.006416	0.00294%
0.193849	70296.77	74794.75	6.39857%	0.006013	0.006014	0.01468%
0.189257	80575.25	79647.38	1.15155%	0.005352	0.005352	0.01380%

TABLA 4

AJUSTE	RETORNO			
	5	50	500	1000
TOSSA DE MAR				
Gumbel	92,75	155,65	216,18	234,34
LP III	83,62	163,17	272,07	313,82
SQRT-ET$_{MAX}$	88,77	162,86	252,86	283,39
Media	**88,38**	**160,56**	**247,04**	**277,18**
TORDERA				
Gumbel	100,43	160,51	218,33	235,68
LP III	100,93	162,02	220,70	238,58
SQRT-ET$_{MAX}$	96,96	166,39	249,00	276,78
Media	**99,44**	**162,97**	**229,34**	**250,35**
ZARAGOZA-OBSERVATORIO				
Gumbel	49,71	82,80	114,64	124,19
LP III	49,34	78,91	104,73	112,13
SQRT-ET$_{MAX}$	47,60	86,41	133,41	149,33
Media	**48,88**	**82,71**	**117,59**	**128,55**
CANFRANC-LOS ARAÑONES				
Gumbel	95,05	135,86	175,13	186,92
LP III	96,51	129,08	154,55	161,51
SQRT-ET$_{MAX}$	93,31	138,53	189,82	206,68
Media	**94,96**	**134,49**	**173,17**	**185,04**

TABLA 5

AJUSTE	RETORNO			
	5	50	500	1000
TOSSA DE MAR				
Gumbel	—	—	—	—
LP III	—	—	—	—
SQRT-ET$_{MAX}$	—	—	—	—
Media	—	—	—	—
TORDERA				
Gumbel	79,43	111,20	141,78	150,95
LP III	81,28	106,95	126,49	131,75
SQRT-ET$_{MAX}$	78,26	113,57	153,29	166,30
Media	**79,66**	**110,57**	**140,52**	**149,67**
ZARAGOZA-OBSERVATORIO				
Gumbel	—	—	—	—
LP III	38,17	48,93	55,68	57,29
SQRT-ET$_{MAX}$	—	—	—	—
Media	**38,17**	**48,93**	**55,68**	**57,29**
CANFRANC-LOS ARAÑONES				
Gumbel	—	—	—	—
LP III	—	—	—	—
SQRT-ET$_{MAX}$	89,70	128,85	172,73	187,08
Media	**89,70**	**128,85**	**172,73**	**187,08**

para una banda de confianza del 75%, obteniéndose los resultados que se reflejan en la Tabla 5.

4. CONCLUSIONES

a) El método propuesto en la tesina Estudio de la función SORT-ET$_{MAX}$ es un método de fácil aplicación y proporciona una herramienta sencilla para la estimación de los parámetros de la función.

b) El modelo SQRT-ET$_{MAX}$ es de perfecta aplicación en el noreste de la península Ibérica.

c) La función SQRT-ET$_{MAX}$ tiene una menor sensibilidad a los valores erráticos que las funciones de Gumbel o LOG-Pearson III lo que permite un mejor estudio de las series completas sin pérdidas de información, que si bien se trata de datos muy alejados de la normalidad y muchas veces poco fiables también es cierto que se trata de medidas obtenidas y por lo tanto deben tenerse en cuenta. ■

REFERENCIAS

–[ET] TAKEHARU ETOH, AKIRA MUROTA & MASSAMORI NAKAMISHI. SQRT-EXPONENTIAL TYPE DISTRIBUTION OF MAXIMUN. *Hydrologic frecuency modeling*. Procedings of the international symposium on flood frecuency and risk analyses. 14-17 May 1986 Louisuana State, Baton Rouge USA. Ed. D. Reidel (1987).

–[MAXPLU] *Máximas precipitaciones diarias en la España Peninsular*. Serie Monografias CEDEX (1999).

–[CH] VEN TE CHOW, DAVID R. MAIDMENT & LANY W. MAYS. *Hidrologia aplicada*. Ed. Mc Graw Hill (1994).

–[JF] FRANCISCO JAVIER FERRER POLO. *El modelo SQRT-ET$_{MAX}$ en el análisis regional de máximos hidrológicos: Aplicación a lluvias diarias*. (Tesis doctoral). Universidad Politécnica de Madrid (1996)

–[CZ] CARLOS ZORRAQUINO JUNQUERA. *Estudio de la función SQRT-ET$_{MAX}$*. (Tesina de especialidad) Universitat Politécnica de Catalunya (2000).