

ROTURA DE UN TALUD*

SLOPE FAILURE

JAVIER JENARO MACLENNAN. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Director de Obra. j-jenaro@hotmail.com

RESUMEN: Se aplican los principios del cálculo de variaciones aplicándolos a la determinación de dos funciones, $y(x)$ y $\sigma(x)$, que representan la tensión normal a lo largo de la línea $y(x)$, que es la línea de rotura del talud, y se relacionan entre sí al establecer las tres ecuaciones de equilibrio en un punto de las fuerzas actuantes, teniendo en cuenta la ley de Coulomb.

PALABRAS CLAVE: MÉTODO, VARIACIONAL, ROTURA, TALUD

ABSTRACT: The variational principles are applied to calculate the two functions $y(x)$ and $\sigma(x)$. These lines represent the normal stress along the line $y(x)$ which is the rupture of the slope. They also are related to each other establishing the static equilibrium equations at a certain point considering the Coulomb law.

KEYWORDS: METHOD, VARIATIONAL, FAILURE, SLOPE

1.ECUACIONES DE EQUILIBRIO

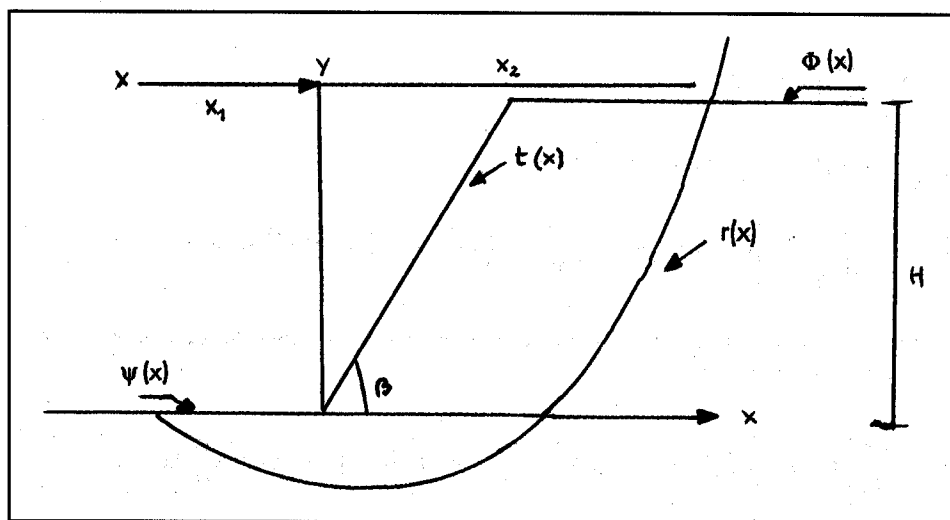


Fig. 1

Supondremos que la línea de rotura o deslizamiento del talud viene definida por una función $r=r(x)$, tal como se refleja en la figura nº 1, que corta a la línea del perfil del talud, $t=t(x)$, en los puntos $(x_1, 0)$, (x_2, H) . En un punto $P(x, y)$, cualquiera de la línea de rotura actúa la cohesión c del suelo (constante para un material homogéneo con ángulo de rozamiento φ , peso Específico γ), la tensión tangencial $\tau(x)$ y la tensión normal $\sigma(x)$. El material se comporta según la ley de Coulomb:

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi$$

se supone un sistema de referencia cartesiano con el origen en el pie del talud y los sentidos habituales.

* El derecho de Propiedad de este artículo está amparado bajo el nº 12/RTPI-010011/2003 del registro Territorial de la Propiedad Intelectual de la Comunidad de Madrid

Poniendo las condiciones de equilibrio de las tensiones actuante proyectadas sobre los ejes del sistema elegido y tomando momentos respecto del origen se tiene el sistema:

$$\left[\begin{aligned} \int_s [\tau(x) \cos \alpha - \sigma(x) \sin \alpha] ds &= 0 \\ \int_s [\tau(x) \sin \alpha + \sigma(x) \cos \alpha] - \int_{x_1}^{x_2} \gamma(t(x) - r(x)) dx &= 0 \\ \int_s [\tau(x) \cos \alpha - \sigma(x) \sin \alpha] y - [\tau(x) \sin \alpha + \sigma(x) \cos \alpha] x - \int_{x_1}^{x_2} \gamma x(t(x) - r(x)) dx &= 0 \end{aligned} \right] \quad (1)$$

α es el ángulo de la tangente a la curva del deslizamiento en el punto.

De otra parte la condición de plastificación del suelo es la dada por la ecuación de Coulomb:

$$\tau(x) = c + \sigma(x) \tan \varphi$$

Según la Geometría diferencial tenemos las relaciones:

$$\sin \alpha = \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}}; \quad ds = \sqrt{1+r'^2} dx; \quad r' = \tan \alpha$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[(c + \sigma(x) \tan \varphi) - \sigma(x) \frac{dr}{dx} \right] dx &= 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \left[(c + \sigma(x) \tan \varphi) \frac{dr}{dx} + \sigma(x) \right] dx - \int_{x_1}^{x_2} \gamma(H - r(x)) dx &= 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \left[(c + \sigma(x) \tan \varphi) - \sigma(x) \frac{dr}{dx} \right] y - \left[(c + \sigma(x) \tan \varphi) \frac{dr}{dx} + \sigma(x) \right] x - \gamma x(H - r(x)) dx &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

En las ecuaciones anteriores las expresiones de $\sigma(x)$ y $r(x)$ que andamos buscando son los extremales del funcional F que determinamos a continuación. Para buscarlo formamos la expresión:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[(c + \sigma(x) \tan \varphi) - \sigma(x) \frac{dr}{dx} \right] dx + \lambda_1 \int_{x_1}^{x_2} \left[(c + \sigma(x) \tan \varphi) \frac{dr}{dx} + \sigma(x) \right] dx - \int_{x_1}^{x_2} \gamma(H - r(x)) dx + \\ \lambda_2 \int_{x_1}^{x_2} \left[\left[(c + \sigma(x) \tan \varphi) - \sigma(x) \frac{dr}{dx} \right] y - \left[(c + \sigma(x) \tan \varphi) \frac{dr}{dx} + \sigma(x) \right] x - \gamma x(H - r(x)) \right] dx = 0 \end{aligned}$$

Las funciones de $y(x)$ y $\sigma(x)$ que hacen máxima a (2) son los extremales del funcional

$$\begin{aligned} F = & \left(c + \sigma \tan \varphi - \sigma \frac{dr}{dx} + \lambda_1 \left((c + \sigma \tan \varphi) \frac{dr}{dx} + \sigma - \gamma(t - r) \right) + \lambda_2 \left(\left((c + \sigma \tan \varphi) - \sigma \frac{dr}{dx} \right) y - \right. \right. \\ & \left. \left((c + \sigma \tan \varphi) \frac{dr}{dx} + \sigma \right) x - \gamma x(t - r) \right) \end{aligned}$$

Aplicándole las ecuaciones de Euler (ver Apéndice):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \sigma'} = 0$$

Obtenemos de la segunda donde hacemos $r=y$

$$\tan \varphi - \frac{dy}{dx} + \lambda_1(k+1) + \lambda_2 \left(yk - y \frac{dy}{dx} - xk \frac{dy}{dx} - x \right) = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-k \left(\frac{1}{\lambda_2} + y \right) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x \right)}{- \left(\frac{1}{\lambda_2} + y \right) + k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x \right)}$$

La solución es:

$$\sqrt{\left(x - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_2} + y \right)^2} = K_1 \exp \left(-\tan \varphi \arctan \frac{\frac{1}{\lambda_2} + y}{x - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)$$

Pero también haciendo el cambio:

$$x = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \rho \cos \theta; \quad y = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \rho \sin \theta \quad (4)$$

Se llega a la ecuación:

$$\frac{\frac{d\rho}{d\theta} \tan \theta + 1}{\frac{d\rho}{d\theta} + \tan \theta} = \frac{\tan \varphi \tan \theta + 1}{-\tan \theta + \tan \varphi}$$

Con lo que integrando se tiene la ecuación de la línea de rotura o deslizamiento en polares referido al sistema (ρ, θ) :

$$\rho = K_1 e^{\theta \tan \varphi} \quad (5)$$

El origen de cinco esta referido al sistema original (x, y) , en el punto $(a, b) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_2} \right)$ mediante la transformación (4).

La primera de las ecuaciones de Euler nos da la ecuación diferencial:

$$\lambda_1 \gamma + \gamma_2 (c + \sigma \tan \varphi - \sigma \gamma') + \lambda_2 \gamma x - (-\sigma' + \lambda_1 \sigma' \tan \varphi - \lambda_2 (\sigma' \gamma + \sigma' \gamma') - \lambda_2 \sigma' x - \lambda_2 (c + \sigma \tan \varphi)) = 0$$

$$\sigma' = -\frac{2\lambda_2 \sigma k + \lambda_2 \gamma x + 2\lambda_2 c + \lambda_1 \gamma}{1 + \lambda_2 \gamma + \lambda_2 x k - \lambda_1 k} \quad \circ \quad \frac{d\sigma}{dx} = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x\right) - 2(c + \sigma \tan \varphi) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\gamma - 1)}{\left(\frac{1}{\lambda_2} + \gamma\right) + k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x\right)}$$

Haciendo el cambio (4), la ecuación queda: ($k = \tan \varphi$)

$$\frac{d\sigma}{d\theta} - \rho \cos \theta + 2(c + \sigma k) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\gamma - 1) = 0$$

Teniendo en cuenta la solución para ρ obtenida anteriormente:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} + 2\sigma = A e^{\theta \tan \varphi} \cos \theta - B \quad \text{llamando} \quad B = \left(2c + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\gamma - 1)\right) \quad \text{y} \quad k = \tan \varphi$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} + 2\sigma = A e^{\theta k} \cos \theta - B$$

Integrando y desarrollando en serie deteniendonos en el primer orden:

$$\sigma(\theta) = \frac{2k_1 e^{k\theta} \cos \theta + k_1 (\cos \theta) k e^{k\theta} + k_1 (\sin \theta) e^{k\theta} - \frac{5}{2} B - 2Bk - \frac{1}{2} Bk^2 + 5k_2 e^{-2\theta} + 4k_2 k e^{-2\theta} + k_2 k^2 e^{-2\theta}}{5 + 4k + k^2} =$$

$$\frac{2k_1 + 5k_2 - \frac{5}{2} B + k k_1 + 4k_2 k - 2Bk}{5 + 4k + k^2} - \frac{k_2 k^2 - \frac{1}{2} Bk^2}{5 + 4k + k^2} + \frac{-10k_2 - 8k_2 k - 2k_2 k^2 + k_1 + 2k k_1 + k^2 k_1}{5 + 4k + k^2} \theta$$

El máximo valor se obtiene cuando $\frac{d\sigma}{d\theta}$

$$\sigma = \frac{1}{2} (k_1 e^{k\theta} \cos \theta - B) = \left(\frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{2} B\right) + \frac{1}{2} k k_1 \theta + \left(-\frac{1}{4} k_1 + \frac{1}{4} k_1 k^2\right) \theta^2$$

Identificando los dos valores que delimitan σ , se tiene

$$\left(\frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{2} B\right) + \frac{1}{2} k k_1 \theta + \left(-\frac{1}{4} k_1 + \frac{1}{4} k_1 k^2\right) \theta^2 - (X + Y\theta) = 0$$

Donde:

$$X = \frac{2k_1 + 5k_2 - \frac{5}{2} (2c + \alpha(\gamma - 1)) + k k_1 + 4k_2 k - 2(2c + \alpha(\gamma - 1))k + k_2 k^2 - \frac{1}{2} (2c + \alpha(\gamma - 1))k^2}{5 + 4k + k^2}$$

$$Y = \frac{-10k_2 - 8k_2 k - 2k_2 k^2 + k_1 + 2k k_1 + k^2 k_1}{5 + 4k + k^2}$$

Resolviendo en θ hasta el primer orden se obtiene finalmente:

$$\theta = \frac{-10k_2 - 8k_2k - 2k_2k^2 + k_1 + 2kk_1 + k^2k_1}{4k_2k^2 + kk_1 + 16k_2k + 2k_1k^2 + k_1k^3 + 20k_2 - 2k_1}$$

Eligiendo este valor para θ que da el máximo σ_R , e introduciéndolo en la ecuación de $\sigma(\theta)$ se obtiene:

$$\sigma_R = \frac{2k_1 + 5k_2 - \frac{5}{2} \left(2c + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\gamma - 1) \right) + \tan \varphi k_1 + 4 \tan \varphi k_2 - 2 \left(2c + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\gamma - 1) \right) \tan \varphi + k_2 \tan^2 \varphi - \frac{1}{2} \left(2c + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\gamma - 1) \right) \tan^2 \varphi}{5 + 4 \tan \varphi + \tan^2 \varphi} + \frac{-10k_2 - 8k_2 \tan \varphi - 2k_2 \tan^2 \varphi + k_1 + 2 \tan \varphi k_1 + \tan^2 \varphi k_1 \left(-\frac{10k_2 - 8k_2k - 2k_2k^2 + k_1 + 2kk_1 + k_1k^2}{4k_2k^2 + kk_1 + 16k_2k + 2k_1k^2 + k_1k^3 + 20k_2 - 2k_1} \right)}{5 + 4 \tan \varphi + \tan^2 \varphi} \quad (6)$$

Asumimos que basta la rotura en un punto del suelo para que sobrevenga la de todo el talud. Como σ_R puede ser determinada mediante ensayos podemos obtener una relación entre $K_1, K_2, \lambda_1, \lambda_2$. Además tenemos las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(x_1) = 0 \\ y(x_2) = H \end{cases} \quad (7)$$

Estas condiciones se plasman, teniendo en cuenta las funciones ya calculadas:

$$\sqrt{\left(\left(x_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_2} \right)^2 \right)} = K_1 \exp \left(-\tan \varphi \arctan \frac{\frac{1}{\lambda_2}}{x_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)$$

$$\sqrt{\left(\left(x_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 + \left(H + \frac{1}{\lambda_2} \right)^2 \right)} = K_1 \exp \left(-\tan \varphi \arctan \frac{\frac{1}{\lambda_2} + H}{x_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)$$

Por otra parte, tenemos dos ecuaciones de transversabilidad (ver Apéndice) que son:

$$\begin{cases} |F_{y'} \psi' - y' F_{y'} + F_{\sigma'} \psi' - y' F_{\sigma'} + F|_{x=x_1} = 0 \\ |F_{y'} \Phi' - y' F_{y'} + F_{\sigma'} \Phi' - y' F_{\sigma'} + F|_{x=x_2} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Estas ecuaciones se plasman en nuestro caso así:

$$\begin{cases} |-y' F_{y'} + F|_{x=x_1} = 0 \\ |-y' F_{y'} + F|_{x=x_2} = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores calculados con anterioridad para y e y' , se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{-k\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_1\right)}{-\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) + k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_1\right)} \lambda_2 c x_1 + c + \lambda_1 c \frac{-k\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_1\right)}{-\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) + k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_1\right)} + \lambda_2 \left(-c \frac{-k\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_1\right)}{-\left(\frac{1}{\lambda_2} + y\right) + k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_1\right)} x_1 \right) = 0 \\ & \frac{-k\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_2\right)}{-\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) + k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_2\right)} \lambda_2 c x_2 + c - \lambda_1 c \frac{-k\left(\frac{1}{\lambda_2} + H\right) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_2\right)}{-\left(\frac{1}{\lambda_2} + H\right) + k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_2\right)} + \lambda_2 H - \lambda_2 \left(c \frac{-k\left(\frac{1}{\lambda_2} + H\right) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_2\right)}{-\left(\frac{1}{\lambda_2} + H\right) + k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - x_2\right)} x_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Tenemos como incógnitas, λ_1 , λ_2 , x_1 , x_2 , β ó K_1 , K_2 , H , y tenemos las tres ecuaciones (1), dos de transversabilidad (8), una de la condición (6) y dos mas de (7), el problema queda resuelto.

Es de destacar que es necesario determinar la forma de la curva mediante la aplicación al funcional H de la primera de las ecuaciones de Euler y que esta es independiente de las tensiones, no lo es así la determinación de la posición de la línea de deslizamiento que como es lógico debe depender de la resistencia del suelo, es decir, de c y σ .

II. APÉNDICE. DETERMINACIÓN DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES QUE DEBE CUMPLIR EL FUNCIONAL

El funcional que deriva la condición de equilibrio del talud, en general sería de la forma:

$$F(x, y(x), \sigma(x), y'(x), \sigma'(x))$$

Siendo x , la posición, y , la función de la línea de rotura, y σ la tensión normal sobre la línea de rotura del taluz.

Y la condición de equilibrio de las tensiones a lo largo de la línea de rotura del talud será de la forma:

$$H = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), \sigma(x), y'(x), \sigma'(x)) dx$$

En general x_1 , x_0 estarán cada una de ellas sobre la curva(s) que delimita(n) el taluz, estas, en principio dos funciones que definen el talud en los extremos de la línea de rotura quedarán definidas por dos funciones $\psi(x)$, $\Phi(x)$.

La variación del funcional entre dos puntos próximos, quedará establecido de la manera siguiente:

$$\delta H = H(y + h, \sigma + k) - H(y, \sigma)$$

O lo que es lo mismo:

$$\delta H = \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + h, \sigma + k, y' + h', \sigma' + k') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \sigma, y', \sigma') dx \quad (1)$$

Por la conocida propiedad de la asociatividad de la integración respecto de la suma, se tiene:

$$\int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} - \int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0}$$

Pudiendo entonces escribir (1) así:

$$\delta H = \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y+h, \sigma+k, y'+h', \sigma'+k') - F(x, y, \sigma, y', \sigma')) dx + \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+h, \sigma+k, y'+h', \sigma'+k') dx - \int_{x_0}^{x_1+\delta x_0} F(x, y+h, \sigma+k, y'+h', \sigma'+k') dx$$

Podemos escribir con base a la citada propiedad asociativa, para la primera integral:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y+h, \sigma+k, y'+h', \sigma'+k') - F(x, y, \sigma, y', \sigma')) dx &= \\ \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y+h, \sigma+k, y'+h', \sigma'+k') - F(x, y, \sigma, y'+h', \sigma'+k') + F(x, y, \sigma, y'+h', \sigma'+k') - F(x, y, \sigma, y', \sigma')) dx &= \\ \int_{x_0}^{x_1} (F_y h' + F_y h) dx + \int_{x_0}^{x_1} (F_{\sigma'} k' + F_{\sigma} k) dx \end{aligned}$$

Ahora bien, estas integrales se pueden integrar por partes, con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} (F_y h' + F_y h) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) h dx + F_{y'} h \Big|_{x_0}^{x_1} \\ \int_{x_0}^{x_1} (F_{\sigma'} k' + F_{\sigma} k) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{\sigma} - \frac{d}{dx} F_{\sigma'} \right) k dx + F_{\sigma'} k \Big|_{x_0}^{x_1} \end{aligned}$$

Observamos ahora que las dos restantes integrales de la expresión δH son, cuando $\delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+h, \sigma+k, y'+h', \sigma'+k') dx &= F|_{x=x_1} \delta x_1 \\ \int_{x_1}^{x_1+\delta x_0} F(x, y+h, \sigma+k, y'+h', \sigma'+k') dx &= F|_{x=x_0} \delta x_0 \end{aligned}$$

En consecuencia con los cálculos anteriores, la variación total del funcional es:

$$\delta H = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) h dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{\sigma} - \frac{d}{dx} F_{\sigma'} \right) k dx + F_{y'} h \Big|_{x_0}^{x_1} + F_{\sigma'} k \Big|_{x_0}^{x_1} + F|_{x=x_1} \delta x_1 + F|_{x=x_0} \delta x_0$$

Por otra parte ya sabemos que:

$$\begin{aligned} h(x_1) &= \delta y_1 - y' \delta x_1 ; h(x_0) = \delta y_0 - y' \delta x_0 \\ k(x_1) &= \bar{\delta} y_1 - y' \bar{\delta} x_1 ; k(x_0) = \bar{\delta} y_0 - y' \bar{\delta} x_0 \end{aligned}$$

Y sustituyendo en la expresión para la variación del funcional:

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) h dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{\sigma} - \frac{d}{dx} F_{\sigma'} \right) k dx + F_{y'} ((\delta y_1 - y' \delta x_1) - (\delta y_0 - y' \delta x_0)) + \\ &F_{\sigma'} ((\bar{\delta} y_1 - y' \bar{\delta} x_1) - (\bar{\delta} y_0 - y' \bar{\delta} x_0)) + F|_{x=x_1} \delta x_1 + F|_{x=x_0} \delta x_0 \end{aligned}$$

Ya que todos los incrementos son arbitrarios y teniendo en cuenta que los extremos x_0, x_1 se mueven en las curvas definidas por las funciones ψ, Φ , con lo que también podemos escribir que $\delta y_1 = \psi' \delta x_1$ y $\delta y_0 = \Phi' \delta x_0$, se tiene las ecuaciones resultantes:

$$\left(\begin{array}{l} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) = 0 \\ \left(F_\sigma - \frac{d}{dx} F_{\sigma'} \right) = 0 \\ \left[F_{y'} \psi' - y' F_{y'} + F_{\sigma'} \psi' - y' F_{\sigma'} + F \right]_{x=x_1} = 0 \\ \left[F_{y'} \Phi' - y' F_{y'} + F_{\sigma'} \Phi' - y' F_{\sigma'} + F \right]_{x=x_2} = 0 \end{array} \right) \quad (2)$$

Las dos primeras ecuaciones son las conocidas ecuaciones extremales de Euler y las otras dos se corresponden con las de transversabilidad'. ■

REFERENCIAS

- 1. PETROV, I. "Variational methods in optimun control theory".
- 2. GARBER, M&R. BAKER. 1979. Extreme-value problems of limiting equilibrio. J. of the Geotechnic Engineeering Div. asce.