

ANÁLISIS A ROTURA DE ESTRIBOS DE FÁBRICA

LIMIT ANALYSIS OF MASONRY BUTTRESSES

JOHN A. OCHSENDORF. Dr. Ingeniero

Profesor Ayudante. Building Technology Program. Department of Architecture.

Massachusetts Institute of Technology. jao@MIT.EDU

JOSÉ IGNACIO HERNANDO GARCIA. Dr. Arquitecto

Profesor Titular. Departamento de Estructuras. E.T.S. Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid. johernan@aq.upm.es

SANTIAGO HUERTA FERNÁNDEZ. Dr. Arquitecto

Profesor Titular. Departamento de Estructuras. E.T.S. Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid. shuerta@aq.upm.es

RESUMEN: Este artículo estudia el colapso de estribos de fábrica sometidos a cargas laterales puntuales. Dada la falta de resistencia a tracción de la fábrica, en el momento de colapso se forma una fractura que disminuye significativamente la resistencia al vuelco. Considerando la fábrica como un continuo, infinitamente resistente a compresión, sin resistencia a tracción y suponiendo el deslizamiento imposible (hipótesis de Heyman para el análisis límite de las estructuras de fábrica), los autores demuestran la forma que tiene la fractura y determinan la carga crítica de colapso para algunas formas típicas de estribo. Se proponen procedimientos generales para el análisis a vuelco de estructuras de fábrica, incluyendo ejemplos de cálculo. Finalmente se tratan métodos posibles para evaluar la seguridad de estribos existentes.

PALABRAS CLAVE: MATERIALES UNILATERALES, ESTRUCTURAS DE FÁBRICA, ESTABILIDAD ESTRUCTURAL, ESTRIBOS, ARQUITECTURA GÓTICA, HISTORIA DE LA INGENIERÍA, HISTORIA DE LA CONSTRUCCIÓN, ANÁLISIS LÍMITE

ABSTRACT: This paper investigates the collapse of masonry buttresses under concentrated lateral loads. A fracture forms at the collapse state, significantly decreasing the resistance to overturning. Conventional analysis assumes that a masonry buttress acts monolithically to resist lateral loads. The current paper demonstrates that this approach is clearly unsafe, and the possibility of a fracture at the collapse state must be considered in the design and assessment of masonry buttresses. By treating the masonry as a continuum, infinitely strong in compression, with no resistance to tension and no possibility for sliding, the authors demonstrate the form of the fracture and determine the critical failure load for typical buttress forms. This approach follows in the tradition of limit analysis of masonry structures as developed by Heyman. General methods are proposed for the overturning analysis of masonry buttresses, and calculation examples are provided. Finally, methods for evaluating the safety of existing buttresses are presented and discussed.

KEYWORDS: NO-TENSION MATERIALS, MASONRY, STRUCTURAL STABILITY, FRACTURE, MASONRY BRIDGES, BUTTRESS, GOTHIC ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING HISTORY, CONSTRUCTION HISTORY, LIMIT ANALYSIS

INTRODUCCIÓN

La seguridad de las estructuras de fábrica abovedadas depende de la estabilidad de los estribos que soportan el empuje de los arcos y las bóvedas. Mientras el comportamiento de los arcos ha sido tratado con profundidad en las publicaciones existentes, los investigadores no han estudiado suficientemente la seguridad de los estribos. Sin embargo, el fallo de los estribos conduciría a un colapso catastrófico de la estructura. Resulta significativo que la mayoría de las reglas tradicionales de proyecto (por ejemplo, en la Edad Media y en el Renacimiento) se refieran al dimensionado de los estribos. (Heyman 1995; Huerta 1990, 1999)

Aparentemente, conocido el empuje del arco o bóveda, el análisis o cálculo de los estribos es un problema sencillo de estática: El momento desestabilizante que produce el empuje debe ser contrarrestado por el peso del estribo. Usualmente se considera que los estribos son monolíticos, considerando todo el peso del estribo para resistir las fuerzas laterales. Ésta fue la hipótesis usual desde los inicios del cálculo científico de estribos (La Hire 1712; Belidor 1729), y continúa aplicándose en la actualidad. (Boothby 1992; Gilbert and Melbourne 1994).

Sin embargo, un estribo de fábrica está formado por una serie de piedras (o ladrillos) dispuestas en hiladas más o menos horizontales, tomadas con algún tipo de mortero o

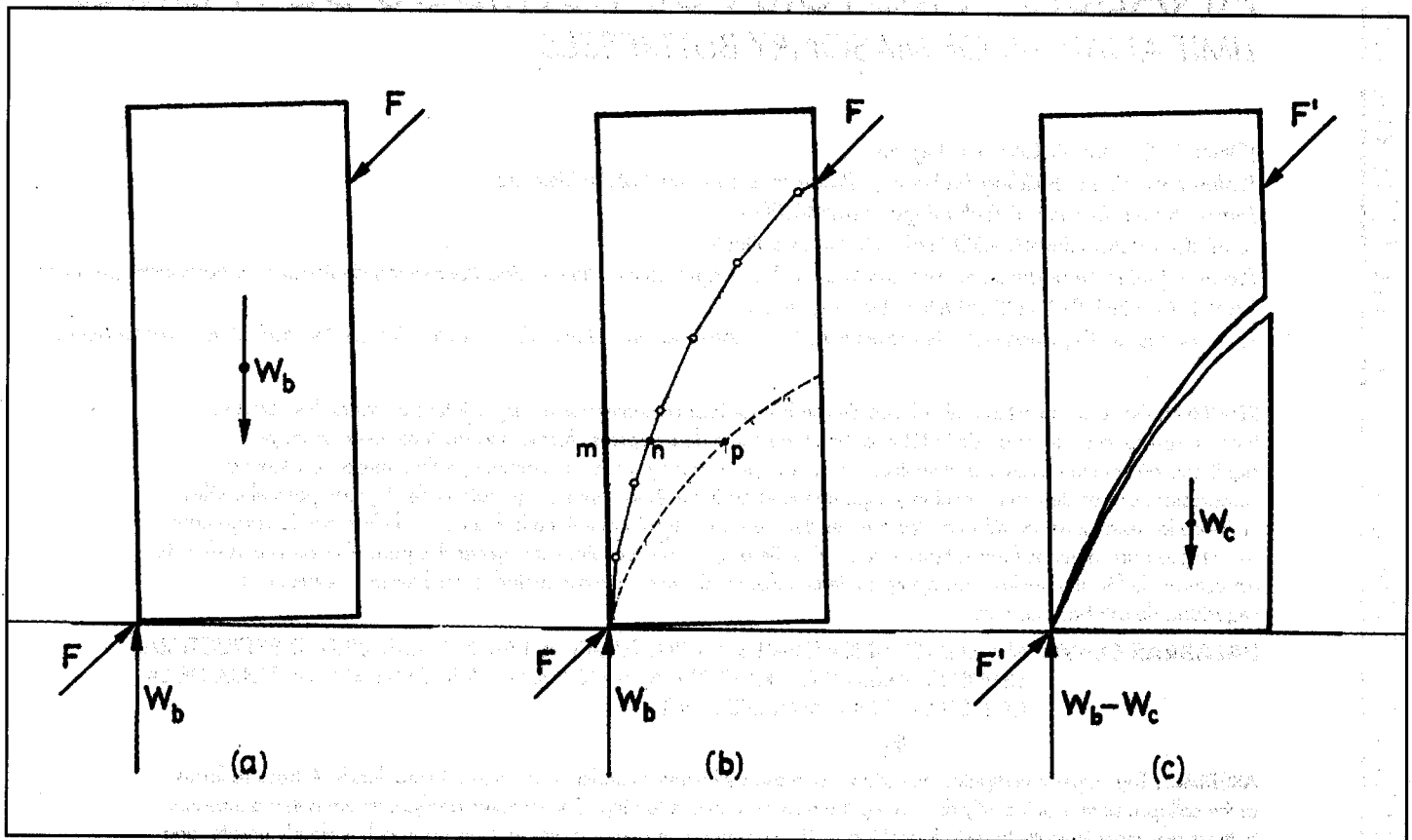


Figura 1.
Colapso de un
estribo de
fábrica
sometido a una
carga
inclinada:
a) estribo
considerado
monolítico;
b) estribo
formado por
hiladas
horizontales de
fábrica; se ha
dibujado la
línea de
empuje;
c) separación
de una parte
del estribo en
el colapso.

en seco. El material puede únicamente transmitir esfuerzos de compresión, y los esfuerzos de tracción separarían las piezas, ya que la adhesión que proporciona el mortero es muy pequeña: la fábrica es un material unilateral. A esto hay que añadir que las tensiones de compresión son típicamente muy bajas en las construcciones de fábrica tradicionales y generalmente el material no fallará por compresión. Por tanto se puede considerar la fábrica como un material rígido e infinitamente resistente a compresión. Finalmente, el coeficiente de rozamiento entre las piedras es muy alto; las piezas no deslizan y por tanto las estructuras de fábrica mantienen su forma y el fallo por deslizamiento no es posible. (Por supuesto las piedras deben tener unas dimensiones mínimas; es imposible construir un muro de arena). Las tres afirmaciones anteriores caracterizan el material "fábrica" y fueron usadas, implícita o explícitamente, en el análisis de arcos y bóvedas de fábrica durante los siglos XVIII y XIX. En el siglo XX han sido sistematizadas por el profesor Heyman incluyendo el análisis de arcos y bóvedas de fábrica dentro del marco del análisis límite (Heyman 1966, 1995).

Como consecuencia del carácter unilateral del material es posible que se produzca un agrietamiento o fractura del estribo durante el colapso, del mismo modo que ocurre con las torres inclinadas (Heyman, 1992). En el equilibrio inestable, justo antes de volcar, parte del estribo permanecería

apoyado en la base y se formaría una superficie inclinada de fractura. La cuestión se expresa con claridad en la Figura 1. Bajo la acción de una fuerza lateral oblicua, F , un estribo monolítico volcará si el momento desestabilizante es mayor que el momento estabilizante producido por el peso total del estribo, Figura 1 (a). Si consideramos que el estribo está construido de fábrica con juntas horizontales se puede dibujar la línea de empujes, esto es, el lugar geométrico de la resultante de las fuerzas por encima de una familia de planos dada (en este caso, las juntas horizontales), que para la carga de colapso anterior está contenida dentro del estribo, Figura 1 (b). (En realidad el trazado de la línea depende de la familia de juntas o planos de corte que se consideren. Un detallado análisis de sus propiedades puede encontrarse en Milankovitch 1907.)

De acuerdo con la teoría elástica simple cuando el empuje está fuera del tercio central de una sección rectangular aparece un zona libre de tensiones; su límite se ha representado con una línea punteada, definida por la condición $mp = 2nm$. Debido a que la fábrica no resiste tracciones una parte se separará del resto del estribo modificándose las condiciones de equilibrio. Obviamente, la carga de colapso $F' < F$ y, como consecuencia de la variación en las ecuaciones de equilibrio, la forma de la superficie de fractura también se modificará.

El análisis que sigue conduce a la determinación de la ecuación de ésta superficie y al modo de calcular la correspondiente carga de colapso. El estudio se limitará a estribos exentos que resisten cargas puntuales (estribos góticos), pero el enfoque podría aplicarse también a muros de contención, presas, o torres sometidos a cargas repartidas (presión de terrenos, agua o viento) y/o puntuales.

La fractura de un estribo durante el colapso debió ser conocida por los arquitectos e ingenieros desde la antigüedad. La primera mención publicada a este fenómeno la realiza Gauthey (1809): "La chute d'un pont ne porrait guère arriver sans qu'il ne se fit quelques disjonctions dans ses culées." Navier encuentra confirmación experimental en uno de los ensayos realizados por Mainy en 1808, y él mismo discute esta fractura en el contexto de sus estudios sobre muros de contención en las lecciones correspondientes de su *Resumé des leçons* (1826 y ediciones posteriores), así como en sus notas a las distintas ediciones del citado tratado de puentes de Gauthey.

La única contribución que estudia con detalle las consecuencias de la fractura de los estribos se debe a un ingeniero español y ha permanecido inédita hasta hoy. Joaquín Monasterio escribió hacia 1800 una memoria, que no se llegó a publicar, con el título *Nueva teórica sobre el empuje de las bóvedas* (Huerta, Foce 2003), que se conserva en la Biblioteca de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid. La obra consta de cuatro capítulos y el último está dedicado a explorar las consecuencias de la fractura de los estribos, en el colapso del sistema bóveda-estribos. Monasterio advierte que usualmente se ha considerado «cada pie derecho formado de un solo trozo de piedra, y de consiguiente capaz de oponer al tiempo de volcarse una resistencia mayor de la que tiene realmente». Monasterio toma como un dato la inclinación de la fractura, que, en el caso de una sillaría, considera que depende sólo de la forma y tamaño de los bloques, Fig.2. Monasterio se dio cuenta de que la rotura del estribo en el colapso afectaría las cargas de colapso del sistema bóveda-estribo, y concentra su estudio en este aspecto general, considerando un aparejo isodomo de piedras iguales y manteniendo constante la inclinación de la fractura.

Durante el siglo XIX sólo hay menciones aisladas —la Fig. 1 está inspirada en el análisis de Dupuit 1870— al problema de la fractura de estribos en el colapso (Huerta, Foce 2003). Unos ensayos sobre muros de contención (Burgoyne 1853; Harkness et al. 2000), Fig.3, confirmaron las observaciones de Gauthey, Monasterio y Navier, pero sus consecuencias para el análisis de estribos de fábrica fueron ignoradas. Más de un siglo después Heyman (1992) estudió la formación de superficies de fractura en muros y torres inclinadas. El trabajo de Heyman y estudios recientes sobre la seguridad de los estribos (Huerta y López 1997) sugirieron la necesidad del presente estudio. De modo independiente, trabajos recientes sobre el colapso de muros de bloques rígidos

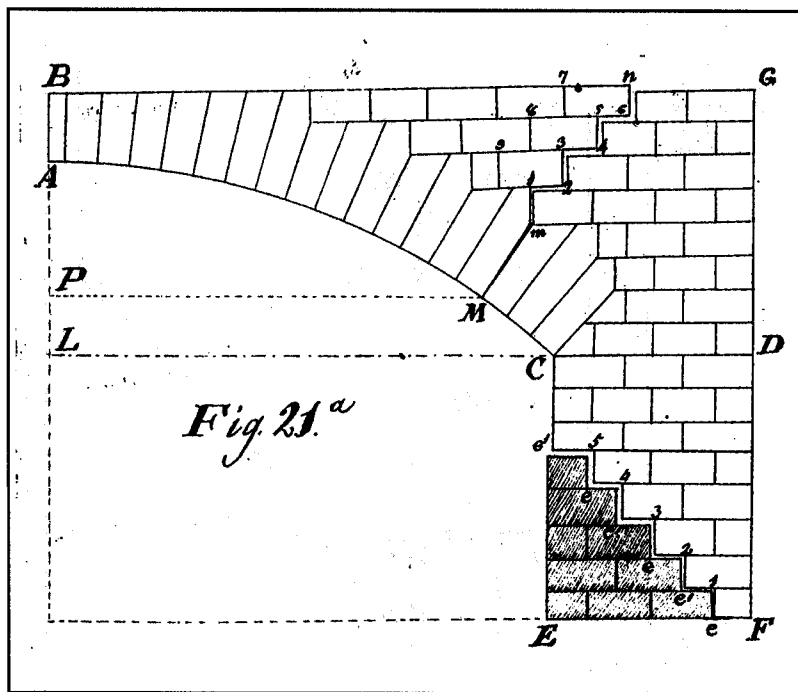


Figura 2. Colapso simétrico de un puente de fábrica por hundimiento de la clave. Nótese que se ha considerado la fractura del estribo. (Monasterio ca. 1800).

sometidos a acciones sísmicas, han observado la formación de una superficie de fractura (Carocci 2001). Además, Baggio y Trovalusci (1995) emplearon el enfoque de bloques rígidos para estudiar muros inclinados y para determinar la influencia del tipo de aparejo en la resistencia de los estribos. La fractura se observó en ensayos de estructuras de fábrica a escala real realizados por Pinto y otros (2001) y en

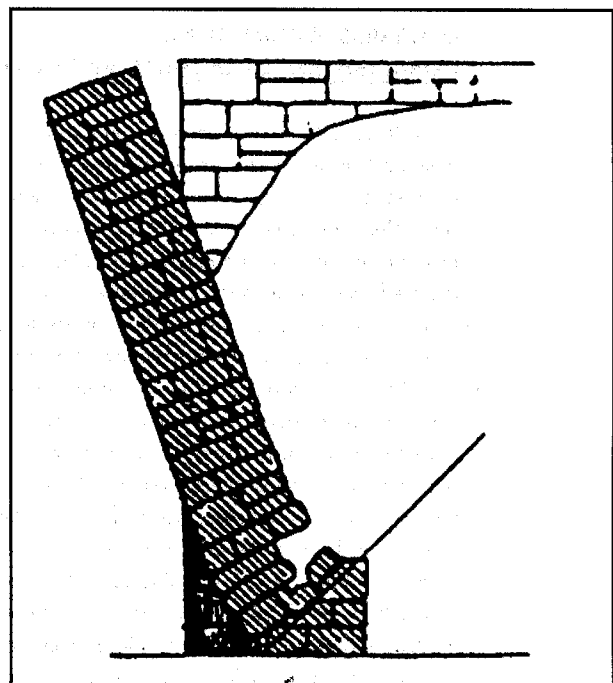
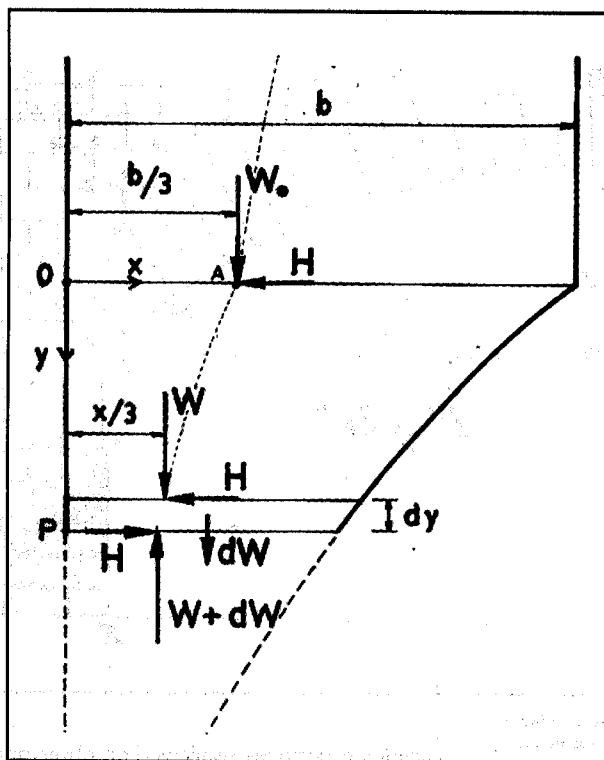


Figura 3.

Figura 4.
Equilibrio de
una rebanada
diferencial de
estribo en la
zona
agrietada.



ensayos de modelos realizados por Huerta, con modelos de cartulina, y Ochsendorf (2002), con modelos de ladrillos a escala. Ochsendorf ha explorado con detalle las consecuencias de la fractura en el caso de estribos inclinados y de acciones sísmicas (Ochsendorf 2002).

EL ESTRIBO RECTANGULAR: DEMOSTRACIÓN DE LA FRACTURA PLANA

Este artículo se propone determinar la forma de la superficie de fractura y el correspondiente valor de la carga de colapso de un estribo exento de fábrica sometido a cargas puntuales. El estudio comienza con el caso sencillo de un estribo de sección uniforme rectangular. Para determinar la forma de la superficie de fractura en el momento del colapso, es necesario suponer una distribución de tensiones de compresión en la zona fracturada del estribo. Es razonable adoptar una distribución lineal, con una tensión de compresión nula en el punto de fractura, de acuerdo con la teoría elástica simple. Esto conduce a la regla del tercio central: para una sección transversal rectangular aparecerán tracciones si la fuerza normal se aplica fuera del tercio central de la sección. El enfoque está inspirado en el estudio de Heyman (1992) sobre torres inclinadas. Otros autores (La Mendola y Papiá 1993) han empleado el mismo enfoque.

Esta hipótesis lleva a un resultado sencillo e inesperado. En una zona rectangular de un estribo, la superficie de frac-

tura, que define el límite en el que la tensión de compresión es nula, es una superficie plana y no curva como se suponía en la Figura 1(c). En efecto, la función de error que implicaba la solución de Heyman (1992) para los muros y torres inclinadas sugería una función complicada análoga, o que no existiera solución exacta al problema. Sin embargo los resultados de sucesivos cálculos por ordenador, de estribos rectangulares de formas variadas, con cargas puntuales diferentes, dieron todos la misma solución: una fractura plana. De este modo, en el momento del colapso, la parte inferior del estribo es una cuña triangular con la resultante situada a un tercio de la base, sobre la que se encuentra, sin agrietar, la parte superior del estribo.

El trabajo teórico de demostración de la fractura plana se desarrolló en contacto con los profesores J. Heyman y C. Calladine. La elegante demostración de la fractura plana se debe a Heyman (2001).

En la Figura 4, se muestra una parte de un estribo rectangular sometido a una carga inclinada con una componente horizontal H . La línea de empujes puede calcularse con facilidad (el problema está estáticamente determinado) y tiene la forma de una hipérbola rectangular (Rankine 1864). El empuje se va aproximando al borde exterior y a una altura determinada alcanza el límite del tercio central. A esa altura se inicia la superficie de fractura. Por debajo de este punto parte de la fábrica se separa del estribo y las condiciones de equilibrio se deben recalcular. La forma de la línea de empujes cambia, y en A aparece una discontinuidad en su curvatura. Como se explicó con anterioridad, en la zona agrietada existe una relación directa entre la línea de empujes y la curva de fractura.

Para determinar la forma de la fractura, se analiza el equilibrio de una rebanada horizontal de la zona agrietada. Suponiendo que el empuje actúa a un tercio de su espesor (el extremo del núcleo central de inercia para una sección rectangular), se analiza una rebanada horizontal delgada (Fig. 4). La rebanada tiene un grosor dy , y está sometida a una fuerza horizontal constante, H , y a una fuerza vertical variable, W . Como el problema se considera como si fuera bidimensional, es conveniente definir un peso específico por unidad de superficie medida en alzado, γ , que tiene en cuenta el espesor del estribo y el peso específico del material.

Para que haya equilibrio, tomado momentos respecto a P para la rebanada horizontal de longitud x se verifica

$$\frac{Wx}{3} + \frac{xdW}{2} = \frac{Wx}{3} + d\left(\frac{Wx}{3}\right) + Hdy \quad (1)$$

Simplificando y despejando W

$$W = \frac{x}{2} \left(\frac{dW}{dx} \right) - 3H \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (2)$$

pero

$$dW = \gamma x dy \quad (3)$$

Combinando (2) y (3) se obtiene

$$W = \frac{\gamma x^2}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right) - 3H \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (4)$$

Diferenciando (4) respecto a x, y combinando con (3)

$$\frac{dW}{dx} = \gamma x \frac{dy}{dx} = \gamma x \frac{dy}{dx} + \frac{\gamma x^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) - 3H \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \quad (5)$$

que simplificando queda

$$\left(\frac{\gamma x^2}{2} - H \right) \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = 0 \quad (6)$$

Para satisfacer (6) en el caso general

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = 0 \quad (7)$$

De esto se deduce que dy/dx es una constante y la curva de fractura es una línea recta. La ecuación (6) también se satisface con la condición

$$H = \frac{\gamma x^2}{2} \quad (8)$$

como H es una constante, x debe serlo también y, en consecuencia, la fractura es una línea vertical. Esta solución particular corresponde al caso en el que la línea de empujes es también vertical, lo que ocurre cuando un estribo rectangular está sometido a la acción de una fuerza horizontal en lo alto, considerando juntas horizontales planas. (Dupuit 1870; Milankovitch 1910; Huerta 1990; y Harvey 1991)

Resumiendo, en un estribo de fábrica en el límite del vuelco se originará una fractura en la zona de la base; la fractura será plana cuando el estribo sea rectangular tanto en alzado como en sección transversal. En un estribo real la línea de fractura no será perfectamente plana y se verá influida por el aparejo de la fábrica. Por otra parte, la distribución de tensiones no se puede determinar y puede ser no exactamente lineal como se ha supuesto. Sin embargo, ésta es la hipótesis más sencilla y razonable y permite llegar a comprender la respuesta de los estibos ante fuerzas laterales.

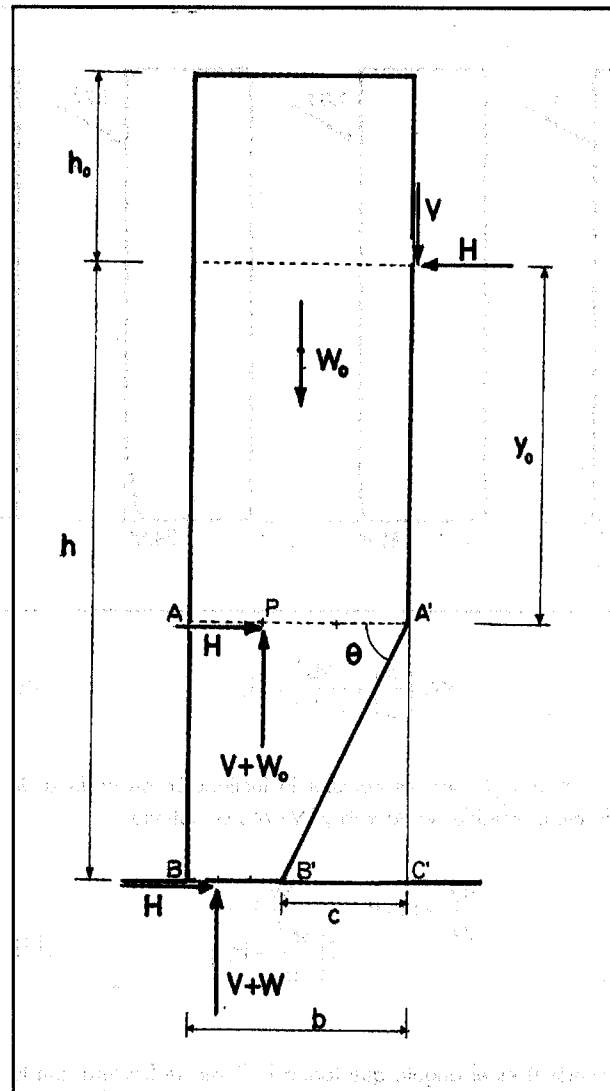


Figura 5. Estribo prismático sometido a un empuje inclinado. Parámetros geométricos implicados.

PROGRESIÓN DE LA GRIETA HASTA EL COLAPSO

Un estribo rectangular está sometido a la acción de un empuje inclinado, dividido en sus componentes vertical y horizontal, V y H (Fig. 5). Para un valor concreto de esta fuerza el empuje pasa por el límite exterior del tercio central a una distancia y_0 , por debajo del punto de aplicación de la fuerza. Justo a esta altura, se iniciará una grieta en la cara interior del estribo que se extenderá hacia abajo. El valor de la fuerza puede determinarse con los siguientes pasos, y se puede estudiar el avance de la grieta a medida que se aumenta la carga. El peso de la parte superior del estribo es

$$W_0 = b\gamma(h_0 + y_0) \quad (9)$$

y tomando momentos respecto a P

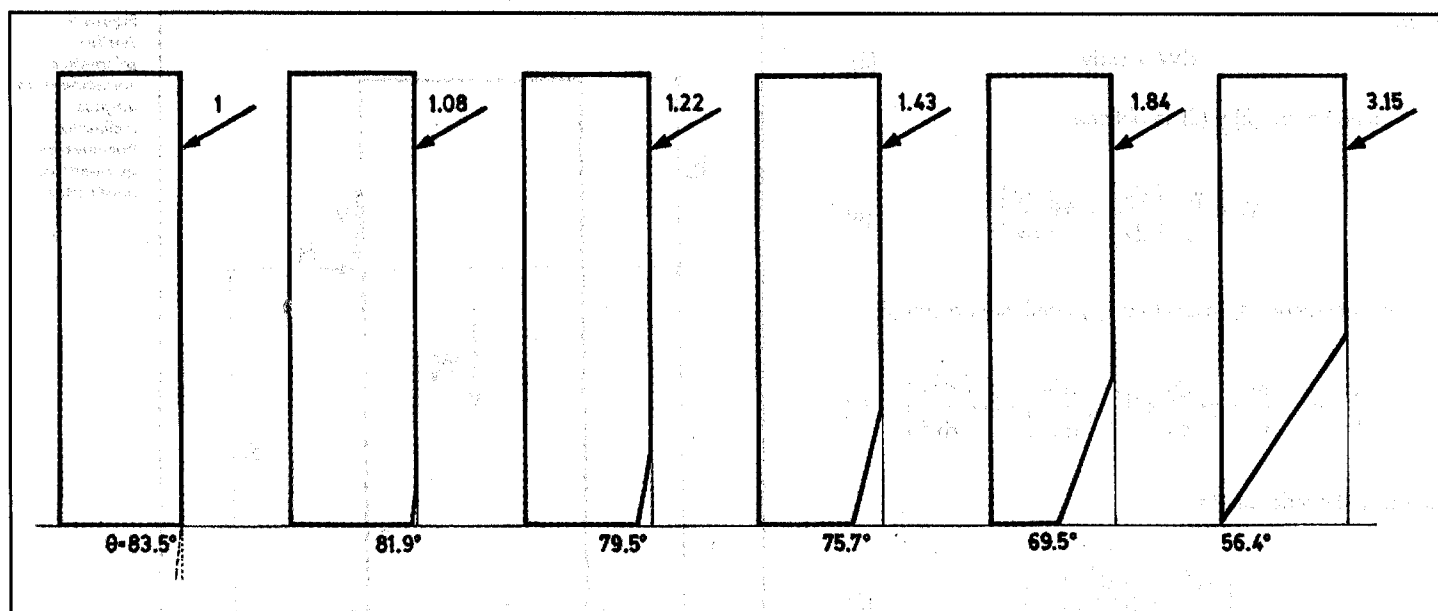


Figura 6. Progresión de la grieta hasta el colapso en un estribo prismático sometido a un empuje inclinado. Se ha tomado como unidad la fuerza para la que se inicia la fractura justo en la base del estribo.

$$W_0 \left(\frac{b}{6} \right) + \left(\frac{2b}{3} \right) = Hy_0 \quad (10)$$

Ahora (4) permite calcular la inclinación de la línea de fractura. Estableciendo $x=b$ y $W=W_0$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{W_0}{3 \left(\frac{\gamma b^2}{6} - H_0 \right)} \quad (11)$$

donde θ es el ángulo que forma la línea de fractura con la horizontal. En la base, la zona B-B' sostiene todo el estribo (Fig. 5). La cuña prismática A'B'C' está separada del estribo, se apoya en el terreno y no contribuye de ningún modo a resistir el momento desestabilizante que produce la carga inclinada.

La situación de la Figura 5 tiene lugar entre el estado no agrietado y el estado de colapso. El estribo se ha fracturado pero aún es capaz de resistir el empuje exterior. A medida que la fuerza horizontal, H , aumenta, el plano A-A' se traslada hacia arriba y se obtienen nuevos valores del ángulo de fractura, θ . Cuando la fractura alcanza el borde exterior de la base, el estribo está justo a punto de colapsar. Esto ocurre cuando

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{h - y_0}{b} \right) \quad (12)$$

De este modo, se puede emplear un algoritmo muy sencillo para seguir la evolución de la grieta hasta el colapso. Es-

te proceso se ha dibujado en la Figura 6, para $h_0 = h/5$; $h/b = 3$ y una inclinación de la fuerza de 30° . La magnitud de la fuerza que inicia la grieta en la base se ha tomado como unidad. La fractura se ha calculado para intervalos de altura de $h/10$. En este caso, el colapso tiene lugar aproximadamente para $y_0 = h/2$. El valor de la carga de colapso ($F = 3,15$) puede compararse con el valor para el estribo monolítico ($F_s = 4,37$). En este ejemplo la fractura reduce la resistencia del estribo ante el vuelco un 28%. La reducción de la resistencia variará dependiendo de la geometría del estribo y del punto de aplicación y ángulo de la fuerza inclinada, pero este resultado justifica el presente estudio. La hipótesis habitual que considera el estribo monolítico es claramente insegura.

La inclinación de la línea de fractura varía a medida que va creciendo la carga, es casi vertical en el estado inicial de agrietamiento, y llega al ángulo mínimo en el estado de colapso. El proceso de formación y transmisión de la grieta en un estribo real se representa en la Figura 7. El avance de la fractura por la fábrica es similar a la inclinación progresiva de un muro o torre. Como Heyman (1992) explicó, un aumento de la fuerza aplicada «transferirá algunos de los ladrillos situados justo por encima de la fisura a la zona situada por debajo, donde ya no podrán contribuir a la estabilidad de la fábrica».

ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN EL COLAPSO

Los párrafos anteriores presentaban un método para obtener la carga de colapso de un estribo de fábrica mediante cálculos iterativos. Cuando la fractura en el momento de colapso es plana, esto es, cuando se produce enteramente

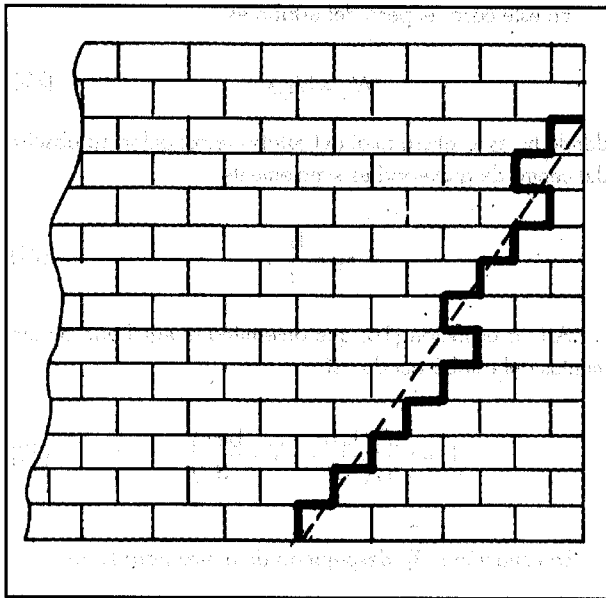


Figura 7. Ilustración esquemática de una fractura real, según Heyman (1992), modificada para hacer la fractura aproximadamente recta.

una zona prismática, se pueden obtener algunas fórmulas generales. La Figura 8 representa un estribo gótico típico y las variables asociadas.

Suponiendo que el estribo no está fracturado, el peso del estribo junto con la componente vertical de la carga aplicada, V , contribuyen a estabilizar el estribo. El momento estabilizante del estribo es

$$M_s = W_b x_b + Vb \quad (13)$$

donde x_b es la abscisa del centro de gravedad del estribo medida desde el punto de vuelco. En el momento del colapso, la cuña triangular inferior se desprende, Figura 8(b), y estableciendo equilibrio de momentos se llega a

$$M_s - W_c \left(\frac{2b}{3} \right) - Hh = 0 \quad (14)$$

El momento estabilizante disminuye al no poder contar con la zona fracturada, cuyo peso es

$$W_c = \frac{bey}{2} \quad (15)$$

Sustituyendo los valores de M_s y W_c en (14) se obtiene

$$W_b x_b + Vb - \frac{b^2 ey}{3} - Hh = 0 \quad (16)$$

La ecuación (16) es la ecuación general para la fuerza que volcaría un estribo de la forma representada en la Figura

8(b) con la fractura comenzando a una altura e . Hay dos incógnitas: la carga de colapso y la altura crítica de fractura, e . Para resolver las dos incógnitas, hace falta una ecuación adicional que se obtiene analizando el equilibrio interno del estribo en la región fracturada inferior, Figura 8(c).

La cuña triangular se encuentra sometida a la resultante de las fuerzas implicadas en la parte superior del estribo, aplicada a un tercio del espesor, para que se inicie la propagación de la fractura desde una altura e . El peso de la cuña fracturada, W_c , también actúa a un tercio. Aplicando equilibrio de momentos a la Figura 8(c) se obtiene

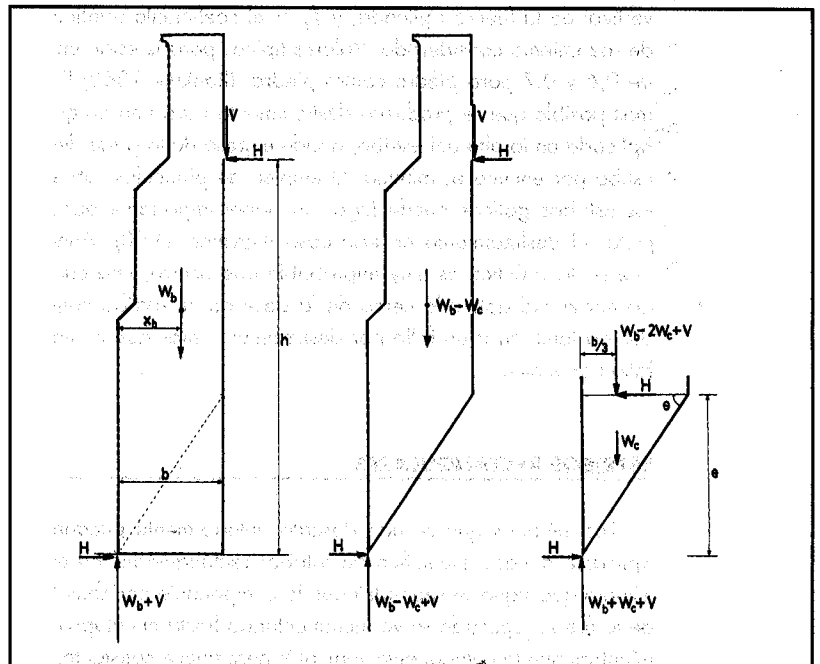
$$(W_b - W_c + V) \left(\frac{b}{3} \right) - He = 0 \quad (17)$$

que se puede expresar así

$$W_b b - \frac{b^2 ey}{2} + Vb - 3He = 0 \quad (18)$$

Combinando las ecuaciones (16) y (18) se elimina la incógnita e , y resulta una ecuación cuadrática de donde se obtiene el valor de la carga de colapso. En general hay dos incógnitas; la altura a la que se produce la fractura, e , y el valor de la carga de colapso, H . Las ecuaciones (16) y (18) se pueden resolver para estas dos incógnitas. Las ecuaciones anteriores se pueden adaptar para estribos con diferentes perfiles y cargas laterales más complejas, como cargas inclinadas aplicadas a alturas distintas (como podría ser en el caso de estribos góticos de gran altura). La solución es válida siempre que:

Figura 8. Equilibrio de un estribo fracturado, en el momento de colapso.



- i) la zona fracturada inferior del estribo sea rectangular en alzado, y tenga peso específico constante en todo su espesor;
- ii) no haya cargas exteriores aplicadas en la zona fracturada y
- iii) no haya deslizamiento.

Finalmente, la condición de cedencia debe comprobarse en todo el estribo: la línea de empujes debe de estar contenida en todo momento dentro de la fábrica. Puede ser que exista otro mecanismo con una carga de colapso menor, para una rótula situada en un punto más alto del estribo. Se debe verificar que la parte superior del estribo no ceda antes de que se alcance el valor de la carga de colapso calculada para el estribo completo. Además se debe comprobar el fallo por deslizamiento, para asegurarse que el colapso se produce por vuelco.

LÍMITES PARA EVITAR EL FALLO POR DESLIZAMIENTO

Aunque el fallo por vuelco determinará la estabilidad de la mayoría de los estribos, también puede producirse el fallo por deslizamiento. El peligro de deslizamiento sería mayor a la altura de aplicación de la carga, y las cargas verticales deben proporcionar el rozamiento suficiente para evitar esta posibilidad. Para que no se produzca el deslizamiento

$$H < (W + V)f_s \quad (19)$$

donde W es el peso de la parte de estribo que se encuentra por encima de la altura considerada, V es la componente vertical de la fuerza aplicada, y f_s es el coeficiente estático de rozamiento considerado. Valores típicos para f_s están entre 0,6 y 0,7 para piedra contra piedra. (Rankine 1863) Es más posible que se produzca deslizamiento para una carga aplicada en lo alto del estribo, donde el peso de la parte del estribo por encima es mínima. El empleo de pináculos sobre los estribos góticos puede jugar un papel importante para evitar el deslizamiento en este caso (Heyman 1968). Aunque en la práctica es muy improbable que ocurra, una carga horizontal aplicada cerca de la base de un estribo conduciría también a un fallo por deslizamiento mas que a un fallo por vuelco.

ESTRIBOS RECTANGULARES

Los métodos que se han descrito anteriormente pueden aplicarse al caso específico de estribos rectangulares. En el estudio que sigue se supondrá que la componente horizontal de la fuerza aplicada se va incrementando hasta el colapso, mientras que la componente vertical V permanece constante.

En este caso, el peso del estribo es

$$W_b = b h_b \lambda \quad (20)$$

donde h_b es la altura total del estribo rectangular. La abscisa del centro de gravedad es simplemente

$$x_b = \frac{b}{2} \quad (21)$$

Así, la ecuación (16) que determina el equilibrio de momentos del estribo queda así

$$H = \left(\frac{b}{h} \right) \left(\frac{h_b b \gamma}{2} + V - \frac{b e \gamma}{3} \right) \quad (22)$$

La ecuación (18), despejando de nuevo para H da

$$H = b \left(\frac{h_b b \gamma + V}{3e} - \frac{b \gamma}{6} \right) \quad (23)$$

Tres factores adimensionales, para el estribo rectangular, simplifican el problema:

$$\xi = \frac{e}{h} \quad (24)$$

que relaciona la altura de la fractura con la altura de la fuerza aplicada;

$$\mu = \frac{h}{h_b} \quad (25)$$

que relaciona la altura de la fuerza aplicada con la altura total del estribo; y

$$\psi = \frac{V}{b h_b \gamma} \quad (26)$$

que relaciona la carga vertical con el peso del estribo.

Sustituyendo estos tres factores en la ecuación (22) queda

$$H = b^2 \gamma \left(\frac{1 + 2\psi}{2\mu} - \frac{\xi}{3} \right) \quad (27)$$

y la ecuación (23) queda

$$H = b^2 \gamma \left(\frac{1 + \psi}{3\mu\xi} - \frac{1}{6} \right) \quad (28)$$

De estas dos ecuaciones se pueden determinar los valores de H y ξ . Combinando (27) y (28) para eliminar la incógnita H se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para la altura de fractura:

$$\xi^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\mu} + \frac{3\psi}{\mu} \right) \xi + \left(\frac{\psi + 1}{\mu} \right) = 0 \quad (29)$$

Despejando ξ en la ecuación (29) se obtiene la posición de la fractura que conduce al colapso en un estribo rectangular. (La raíz correcta debe estar entre 0 y 1). Este valor puede sustituirse luego en (27) ó (28) para encontrar la carga crítica de colapso. Como puede verse en (27) y (28) la resistencia al vuelco es proporcional al cuadrado del espesor b , al peso específico de la fábrica, y a cierta función de parámetros adimensionales. Esta función depende de la forma del estribo (en este caso considerado rectangular), de la altura de aplicación de la carga horizontal, y del valor relativo de V respecto al peso total del estribo.

Por ejemplo, si consideramos un estribo rectangular de fábrica con una altura de 13,5 m y una fuerza horizontal aplicada a una altura de 10 m ($\mu = 0,74$). El ancho del estribo es constante de 1,5 m y el peso específico del material es 20 kN/m³, el peso específico que resulta si consideramos el problema bidimensional, y es entonces 30 kN/m². El espesor del estribo en la base, b , es de 3,5 m. El estribo está sometido a una carga vertical, V , de 100 kN que supone aproximadamente un 7% del peso total del estribo, W_b , de 1420 kN ($\psi = 0,07$).

Introduciendo estos valores en (29) se obtiene $\xi = 0,68$, que corresponde a una altura de fractura $e = 6,8$ m y el valor de H para el colapso es de 200 kN. Éste se puede comparar con la carga teórica de vuelco para el estribo monolítico que es de 283 kN. En este ejemplo, la fractura reduce la resistencia del estribo aproximadamente en un 30%. De la ecuación (19) se obtiene que el deslizamiento se produciría para una carga horizontal de 327 kN considerando $f_s = 0,7$. Esto verifica que el colapso se produce por vuelco y no por deslizamiento.

Los resultados serían muy diferentes para una carga aplicada en la que sus componentes V y H se incrementarían proporcionalmente, ya que la componente V tiene un efecto estabilizador. Este hecho se tratará más tarde cuando se considere la determinación de la seguridad de los estribos. Por ejemplo, en el caso anterior si $V = H$, correspondiendo a un empuje que forma 45° con la horizontal, las ecuaciones (22) y (23) darían unos valores para el colapso de $V = H = 252$ kN en el caso del estribo fracturado, que podemos comparar con una carga de colapso para el estribo monolítico de $V = H = 382$ kN.

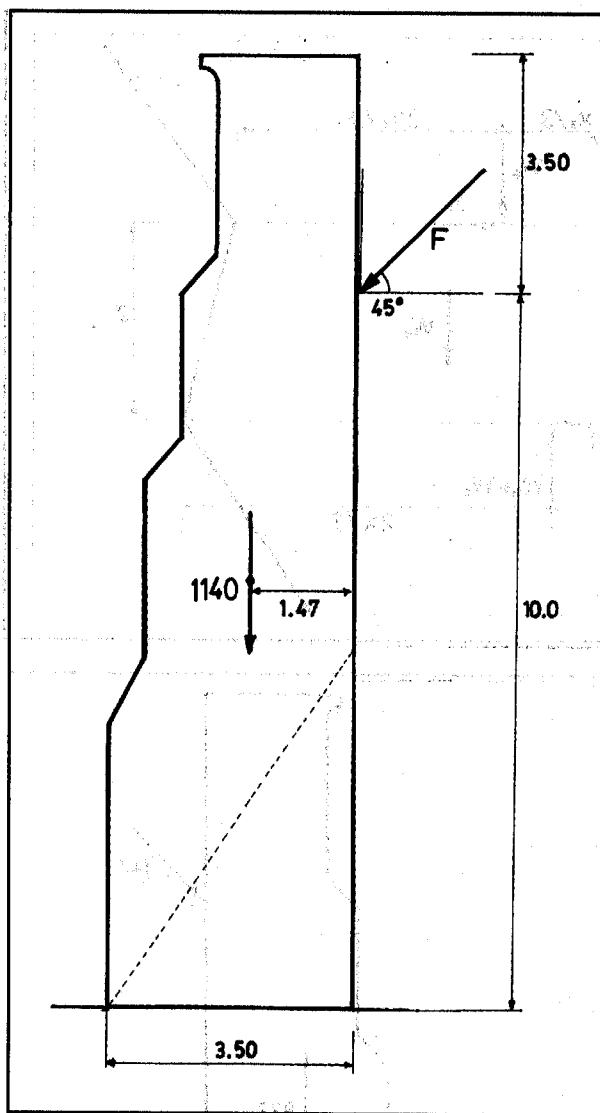


Figura 9.
Estribo gótico
escalonado

ESTRIBOS GÓTICOS: SUPERFICIE DE FRACTURA COMPLEJA

En el análisis precedente, la fractura siempre tenía lugar dentro de una zona rectangular del estribo y era, por tanto, plana. En algunos casos la fractura se puede extender por una zona escalonada del estribo, provocando un brusco cambio de dirección en la superficie de fractura. La cuestión se puede ilustrar con un sencillo ejemplo.

El estribo gótico de la Figura 9 está sometido a un empuje activo que le transmite un arbotante, y se considera constantes la inclinación y posición del empuje, así $V = H$ y $h = 10$ m. (Este incremento podría deberse a la acción del viento sobre la techumbre superior, transmitiéndose a través del muro y de la bóveda superiores, como en Heyman 1995). El ancho del estribo es constante y tiene un valor de 1,5 metros y como en el caso anterior el peso específico su-

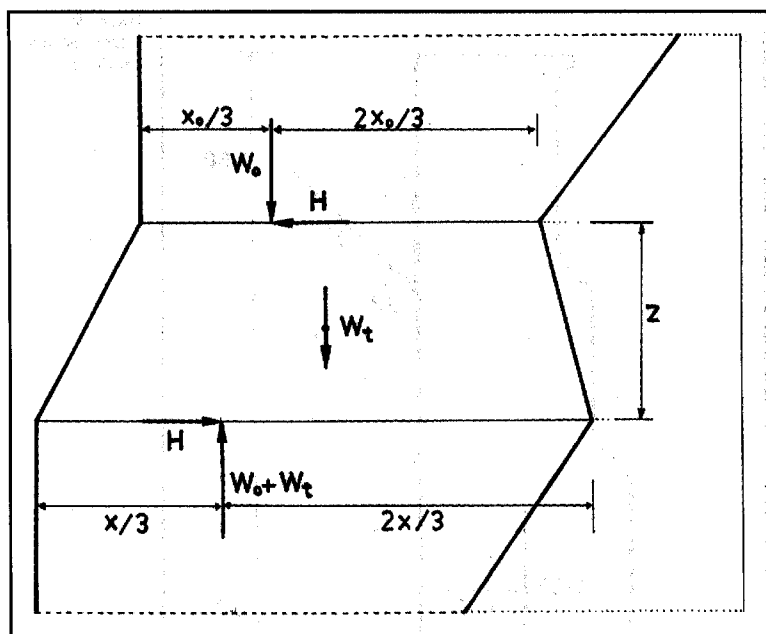


Figura 10.
Equilibrio
de la zona
escalonada,
fracturada
(Huerta y
López 1996).

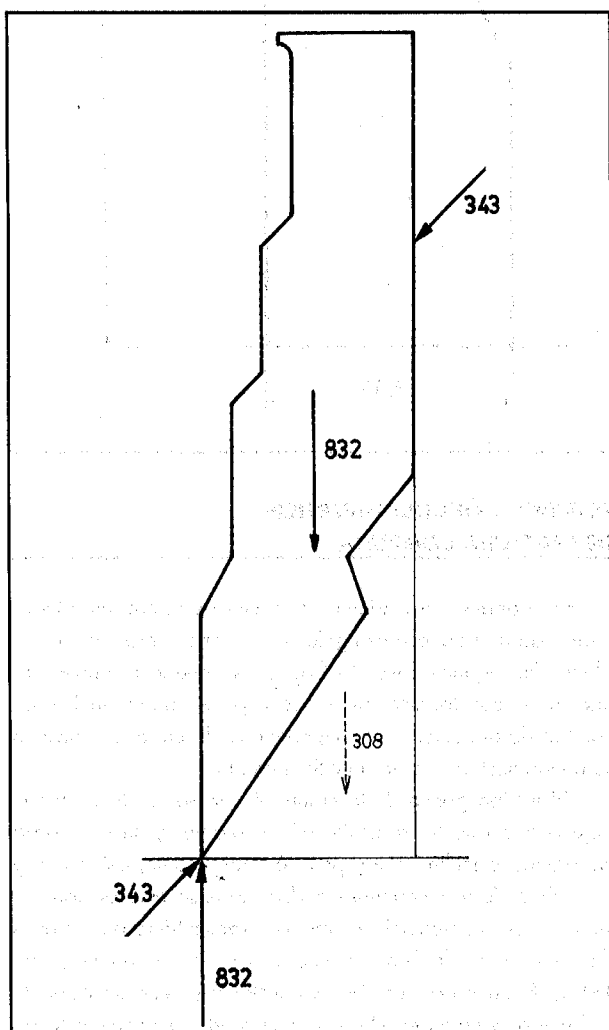


Figura 11.
Colapso de un
estribo
escalonado.

periférica al considerar el problema bidimensional, γ , es como en ejemplo anterior de 30 kN/m^2 . La superficie en alzado del estribo es de 28 m^2 , y su peso es por tanto 1140 kN . Este estribo tiene las mismas dimensiones globales que en el caso del estribo rectangular que se planteó antes, pero su forma escalonada reduce su peso en un 20%.

Resolviendo las ecuaciones (16) y (18) se obtiene $e = 5,1 \text{ m}$ y la fractura dibujada a puntos en la Figura 9 atravesaría la zona escalonada inferior, violándose de este modo la condición de que la sección sea rectangular en la zona fracturada. La carga de colapso correspondiente es $H = V = 260 \text{ kN}$ ó $F = 368 \text{ kN}$. Esta solución no es válida y se debe estudiar el cambio de la forma de la superficie de fractura al pasar por una zona escalonada.

Un enfoque para abordar el problema podría consistir en integrar la ecuación diferencial del equilibrio para una serie de rebanadas infinitesimales en toda la altura del estribo. Otro enfoque más práctico sería suponer la fractura plana y calcular su inclinación estableciendo el equilibrio de cuerpo libre de la zona escalonada. Si el escalonamiento es pequeño en relación con las dimensiones globales, el error cometido en el segundo caso es despreciable y la fractura se podría considerar plana.

Para cada valor de H y V el punto de aplicación del empuje puede hallarse fácilmente (Fig. 10). Es entonces posible calcular la posición y valor de las reacciones en la base, y por tanto la extensión de la fractura. Con esta información la ecuación (11) nos da la inclinación del plano de fractura. El caso límite se da cuando la fractura alcanza el borde del estribo. Se puede entonces conseguir una solución exacta, pero también es posible obtener una solución suficientemente aproximada con pocos tanteos.

La Figura 11 representa la situación calculada de colapso. De modo inesperado la fractura cambia su dirección en la zona escalonada, y la forma completa de la fractura se asemeja a un «rayo de Júpiter». La solución aproximada, suponiendo la fractura intermedia plana, se ha comparado con la solución exacta obtenida integrando la ecuación diferencial, y en este caso el error es menor del 0,1%. La carga de colapso correspondiente es $H = V = 243 \text{ kN}$ ó $F = 343 \text{ kN}$. Finalmente se debe comprobar que la línea de empujes está contenida completamente dentro de la fábrica, cosa que es evidente en este caso.

La carga de colapso para el estribo monolítico habría sido $F_s = 504 \text{ kN}$, y la disminución de la resistencia al vuelco es del 32% en este caso. Comparando con el estribo rectangular con las mismas dimensiones globales, el escalonamiento ha reducido el peso en un 20% pero la disminución de la resistencia es menor del 4%. La economía de material es evidente, y los maestros constructores góticos conocían sin duda este hecho.

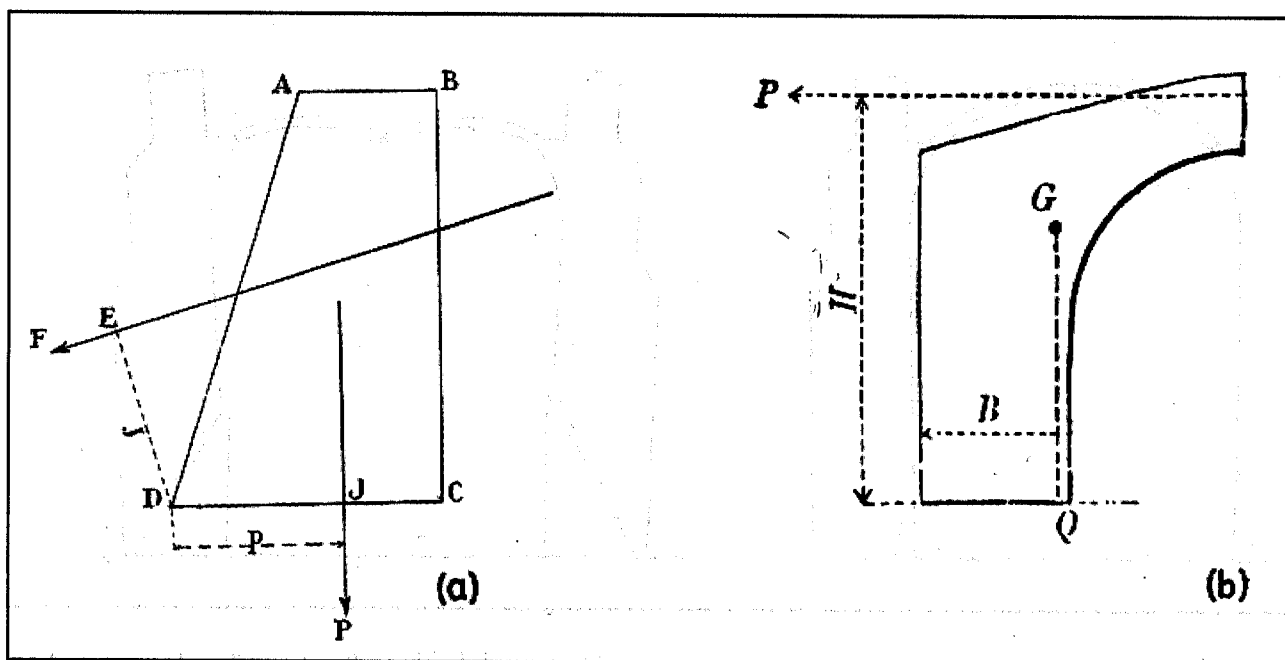


Figura 12. Estabilidad de estribos: a) Se aumenta la fuerza aplicada (Aragon 1909); b) Se aumenta la componente horizontal (Croizette-Desnoyers 1885).

LA SEGURIDAD DE LOS ESTRIBOS

El proyecto y análisis de los estribos se ha considerado históricamente como un tema de interés secundario, el problema principal era obtener el empuje de la bóveda. Una vez que el empuje era conocido, el estribo se consideraba rígido y monolítico y determinar si el estribo volcaría era un sencillo problema de estática. A lo largo de la Historia y en la actualidad, el problema real es cómo evaluar la seguridad del estribo tanto en el proyecto como en el análisis.

Belidor (1729) fue el primero en abordar este problema, simplificando la teoría de La Hire (1712) con objeto de obtener el empuje de la bóveda más fácilmente. El estribo se calculaba luego para que los momentos estabilizante y desestabilizante fueran iguales. Esto significaba que la resistencia del estribo era exactamente igual al empuje de la bóveda, lo que dejaba a la estructura en el punto de colapso. Consciente de este peligro, Belidor sugería añadir unas pulgadas al espesor calculado. Es dudoso que tal incremento pudiera garantizar la seguridad de un estribo de varios metros, particularmente cuando es posible la fractura en el momento de colapso. De cualquier forma, la teoría incorrecta de La Hire conducía a empujes mayores y con mayor inclinación, que garantizaban la seguridad del estribo. Además los estribos proyectados siguiendo el método de La Hire eran satisfactorios si se comparaban con los estribos existentes o las reglas tradicionales de proyecto.

Cuando Audoy (1820) calculó los estribos considerando el empuje correcto según la teoría de Coulomb (1773), obtuvo estribos mucho más esbeltos y, evidentemente, inestables. Era necesario aumentar el espesor del estribo de algún mo-

do y Audoy sugirió multiplicar el empuje horizontal por un cierto factor, el «coefficient de stabilité». El problema era determinar el valor de ese coeficiente. Audoy decidió que la teoría de La Hire había funcionado correctamente durante más de cien años, y calculó el coeficiente de tal modo, que el espesor fuera el mismo que el obtenido por la teoría, incorrecta, de La Hire. (De esta manera, la seguridad de la nueva teoría, correcta, se estableció en base a la experiencia de la antigua teoría.) La llamada «stabilité de La Hire» fue una referencia durante la primera mitad del siglo XIX en Francia (Huerta 1996; Huerta y Hernando 1998). Audoy obtuvo un coeficiente de 1,9 que con frecuencia se redondeaba a 2, como aparece en muchos manuales de Ingeniería franceses del siglo XIX y principios del XX.

El problema puede parecer evidente para un ingeniero o arquitecto actual, pero todavía existe ambigüedad y no hay un acuerdo respecto a los diferentes modos de determinar el coeficiente de estabilidad. Respecto a la Figura 12 (a) de Aragon (1909), la fuerza F se multiplica por el coeficiente de estabilidad, c , y el estribo se proyecta de tal modo que $(cF)(ED) = (DJ)(P)$. En esta hipótesis el empuje crece hasta que alcanza el valor de colapso. Este parece en un principio, ser el mismo enfoque que el de Audoy, pero no es así. La Figura 12 (b) de Croizette-Desnoyers (1885) se puede emplear para ilustrar la diferencia. El empuje en la coronación de la media bóveda, P , multiplicado por el coeficiente de estabilidad c debe estar en equilibrio con el momento estabilizante producido por el peso. Tomando momentos respecto al borde exterior del estribo, con el peso total Q de la bóveda más el peso del estribo, tenemos $(cP)(H) = (B)(Q)$. La diferencia esencial es que en el primer caso la componente

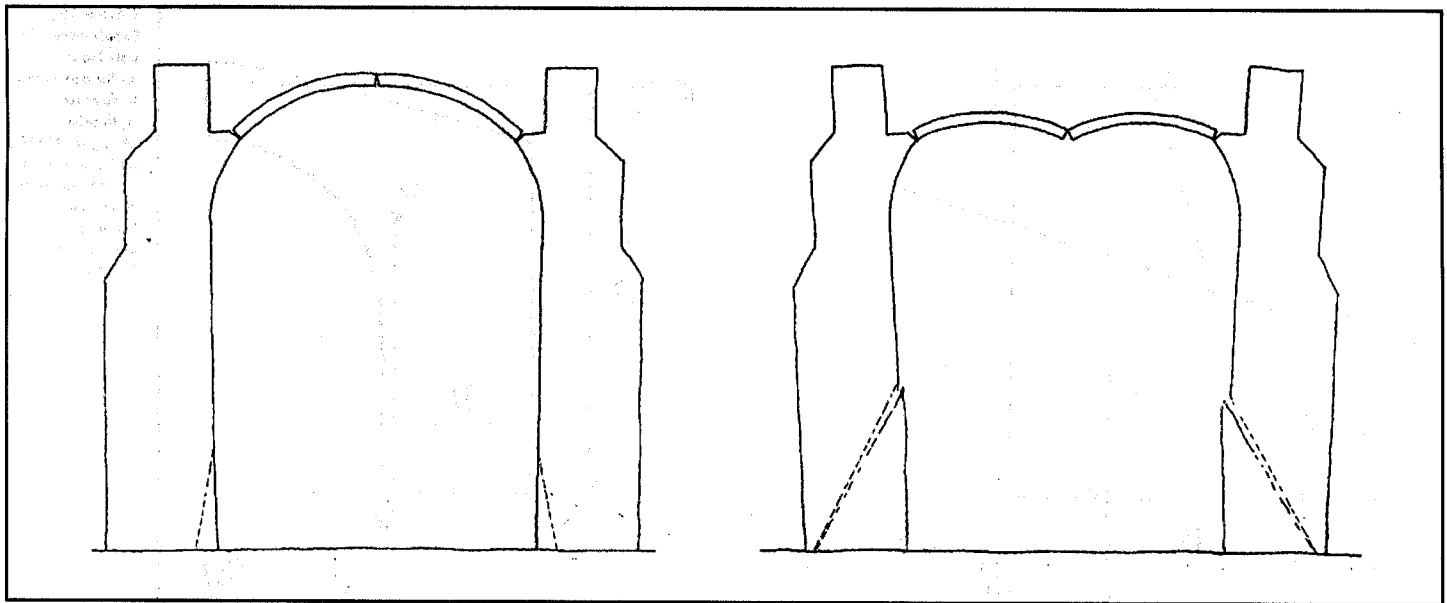


Figura 13.
Colapso de una bóveda de cañón al inclinarse los estribos (Huerta y otros 1997; modificado añadiendo la fractura de los estribos)

vertical del empuje, que estabiliza, crece, mientras que en el segundo caso sólo aumenta la componente horizontal desestabilizante. Los resultados pueden variar considerablemente como se veía en el ejemplo anterior del estribo rectangular.

De cualquier forma, el método del «coefficient de stabilité» mide la seguridad de un modo indirecto. La cuestión de la seguridad en cualquier estructura de fábrica, ya sea un arco o un estribo, depende de que exista una línea de empujes conte-

nida dentro de la fábrica. Para los estribos el empuje no debería aproximarse al borde exterior de la fábrica; si el empuje toca este borde se formaría una rótula y el estribo colapsaría por vuelco. Es una cuestión de geometría y el empleo de coeficientes de seguridad adecuados garantiza que la línea de empujes se aleje suficientemente del borde de la fábrica.

Moseley (1843) fue el primero en estimar la seguridad de un estribo limitando la distancia entre la línea de empujes y el

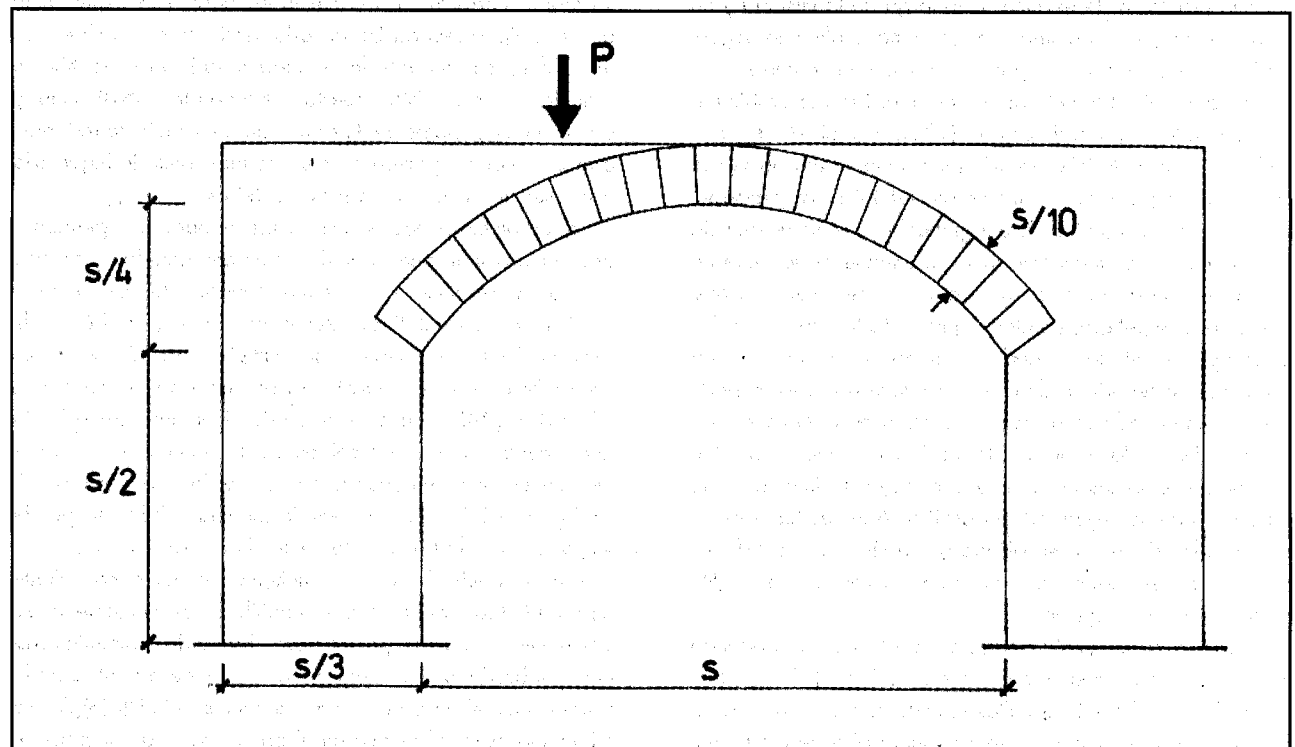


Figura 14.
Puente de fábrica sometido a una carga puntual.

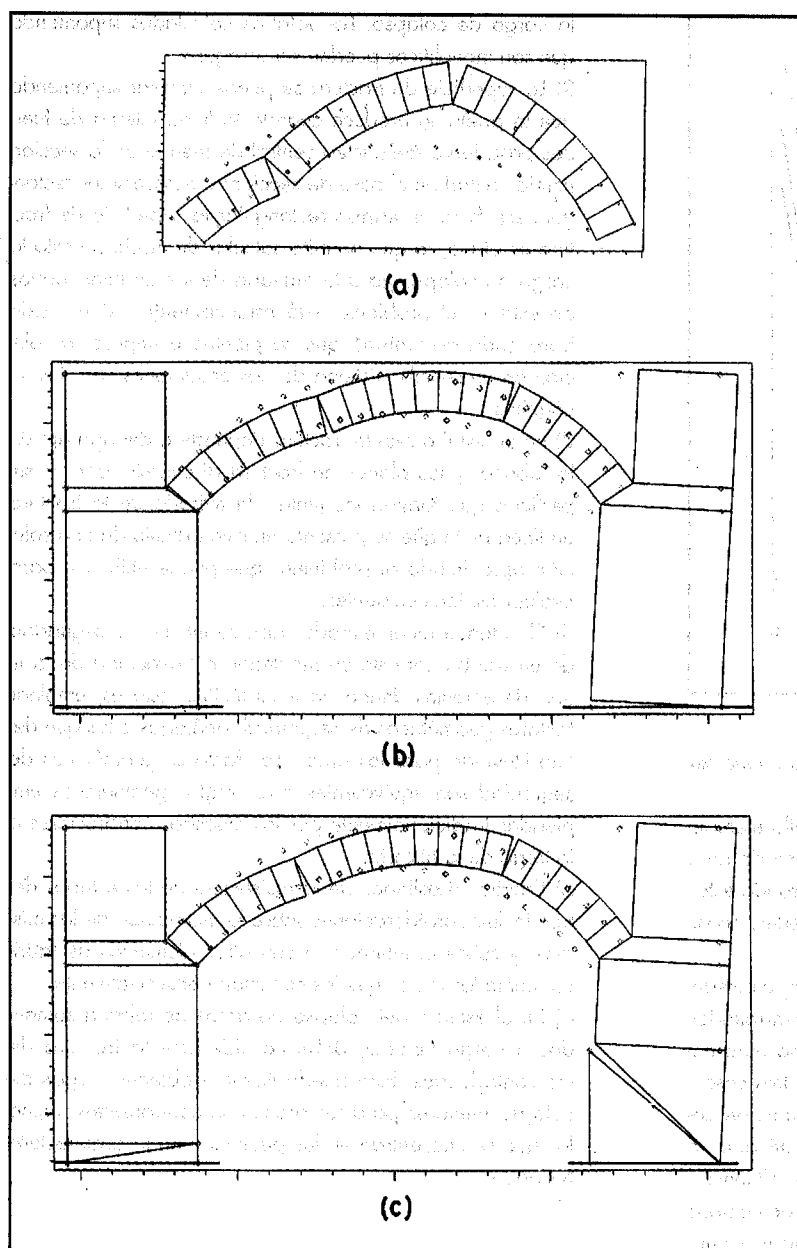


Figura 15.
Mecanismo de
colapso:
a) arco;
b) arco sobre
contrafuertes
rígidos
monolíticos;
c) arco sobre
contrafuertes
fracturados.

borde del estribo. Llamó a esta distancia módulo de estabilidad, pero no proporcionó valores para este módulo, dejándolo al juicio del ingeniero o arquitecto. Rankine (1858) desarrolló la idea de Moseley y propuso la idea de estabilidad de posición, obtenida limitando la desviación de la línea de empujes respecto al centro del diámetro correspondiente. Esta distancia q se definió como una fracción del diámetro. Resulta muy revelador que Rankine diera diferentes valores de q dependiendo del tipo de estructura. Para los estribos de edificios recomienda un valor de $1/6$, de tal forma que el empuje pase cerca de la base por el extremo del tercio central. Para otros tipos de «estribos» como los de los muros de contención, Rankine consideraba valores mucho más grandes de $3/8$ o $3/10$. Para un estri-

bo rectangular, el valor de $1/6$ evita la aparición de esfuerzos de tracción en la sección, pero esto no preocupaba a Rankine, que aceptaba cierto agrietamiento en otras estructuras de fábrica. Los esbeltos estribos góticos pueden tener valores más restrictivos aún. Por ejemplo en el caso de la catedral de Gerona el valor de q es menor de $1/8$, lo que significa que el empuje en la base del estribo está dentro del cuarto central (Huerta 1998). Un valor análogo se encontró en los estribos de la catedral de Palma de Mallorca (Huerta 2001).

Otro modo de evaluar la localización del empuje consiste en dividir el diámetro entre dos veces la desviación de la fuerza respecto al centro. La cantidad que se obtiene puede compararse con el factor geométrico de seguridad que definido por Heyman (1969, 1982) para los arcos de fábrica. Mientras el coeficiente de Heyman se refiere a la totalidad de la estructura, en el caso de los estribos se deben comprobar las secciones de modo local. Heyman sugiere para el caso de puentes coeficientes geométricos de seguridad de 2. Como se ha visto los estribos requieren coeficientes de al menos 3. El método explicado en el presente artículo puede emplearse para determinar el punto de aplicación del empuje en la sección más crítica del estribo y estimar la seguridad geométrica con precisión. Como se ha mencionado anteriormente esta sección crítica se encontrará con frecuencia en la base del estribo, pero esto no siempre es cierto, particularmente en el caso de los estribos escalonados.

La razón para un coeficiente de seguridad más elevado no se debe tanto a la seguridad del estribo, sino más bien a la seguridad de la bóveda. Un empuje excéntrico en la base del estribo tendería a producir asentamientos diferenciales lo que ocasionaría el desplome del estribo. Una inclinación de 1° no pondría en peligro un estribo gótico de los estudiados anteriormente. Sin embargo en el arranque de las bóvedas, quizá 20 metros por encima, esta pequeña inclinación provocaría un movimiento de 0,34 m en cada lado, y la luz total se incrementaría en 0,68 m. Esto provocaría enormes deformaciones en la bóveda, un aumento del empuje, más inclinación, y posiblemente el colapso de la bóveda por dislocación hacia abajo. (Huerta y López 1997; Ochsendorf 2002) (Fig. 13). El colapso de estribos inclinados requiere un estudio específico y ha sido tratado en detalle por Ochsendorf (2002).

ANÁLISIS DEL COLAPSO DE PUENTES

Un último ejemplo recalcará la importancia de considerar la fractura del estribo. En los puentes de fábrica la carga de colapso se calcula de modo típico, considerando el colapso del arco del puente (Heyman 1982). Si el arco es relativamente grueso se pueden obtener valores menores de la carga de colapso si se tiene en cuenta el posible colapso de los estribos. El valor de la carga de colapso puede incluso ser menor si se considera la posibilidad de la fractura de los estri-

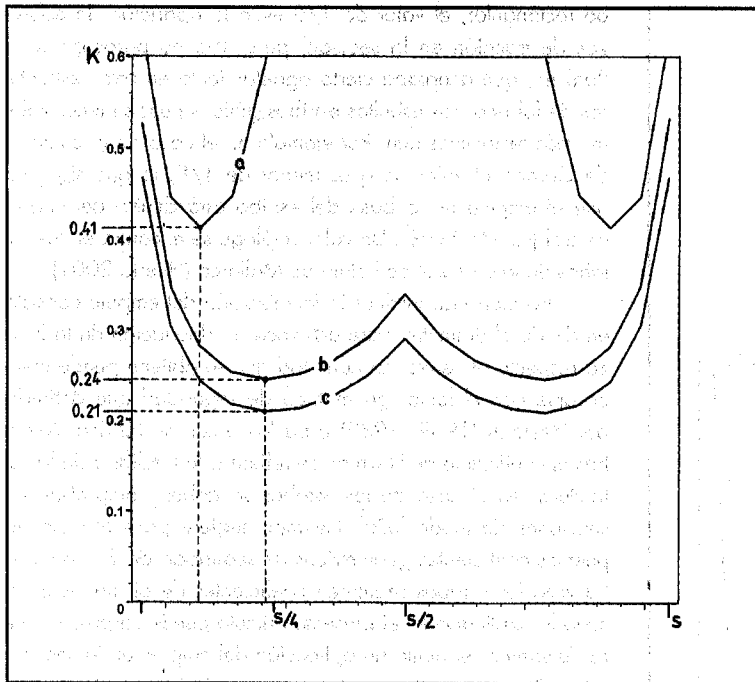


Figura 16.
Cargas de
colapso del
puente.

bos, como en la Figura 2 de Monasterio. Este caso puede ser crítico para algunos puentes.

El problema se ilustrará en relación a un sencillo ejemplo (Fig. 14.). Se han realizado tres análisis: a) colapso de arco aislado; b) colapso del arco y los estribos, considerando éstos monolíticos; c) colapso del arco y de los contrafuertes, considerando la fractura de los mismos.

Los análisis se han realizado de modo numérico, empleando métodos de programación lineal como los desarrollados por Livesley (1978), calculando la carga de colapso para cada posición de la carga móvil en cada uno de los tres casos. En la Figura 15 se han representado los mecanismos de colapso para cada caso, y los resultados se han sintetizado en la Figura 16 representándolos mediante líneas de influencia. La cantidad k representa la relación entre la carga de colapso y el peso total del puente, de unas dimensiones dadas. Como puede verse, la carga de colapso del arco es muy superior a la obtenida considerando el sistema arco-estribos. La fractura de los estribos reduce aproximadamente en un 14% la carga de colapso, respecto a la consideración de estribos monolíticos. Una mayor reducción de la carga de colapso se hubiera obtenido en el caso de contrafuertes más esbeltos.

CONCLUSIONES

En resumen:

- 1) El colapso por vuelco de los estribos de fábrica implica la formación de una superficie de fractura, lo que reduce

la carga de colapso. Los estribos calculados suponiendo que son monolíticos pueden ser inseguros.

- 2) La superficie de fractura se puede calcular suponiendo que la grieta se produce cuando la línea interna de fuerzas pasa fuera del núcleo central de inercia de la sección (tercio central en el caso de secciones transversales rectangulares). Para un estribo rectangular la superficie de fractura es plana, lo que permite calcular de modo sencillo la carga de colapso para la mayoría de las distintas formas de estribo. El problema está estáticamente determinado para cada mecanismo que se plantee e implica la solución de un sencillo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- 3) En un estribo real la fractura dependerá del aparejo de la fábrica, y los planos de fractura discurrirán por las superficies que forman las juntas. El método de la fractura en línea recta que se presenta en este artículo da una solución aproximada al problema, que puede utilizarse para evaluar estribos existentes.

- 4) El enfoque recomendado para cuantificar la seguridad de un estribo consiste en mantener la trayectoria de la línea de empujes dentro de unos límites, esto es, emplear factores geométricos de seguridad, análogos a los que define Heyman para los arcos. Los factores geométricos de seguridad son equivalentes a las reglas geométricas empleadas tradicionalmente por los maestros constructores a lo largo de la historia.

- 5) Estudios detallados de la resistencia de los estribos deben incluir consideraciones sobre la inclinación de los mismos, y sobre la interacción con otros elementos de fábrica, como los muros que los conectan transversalmente.

- 6) En el estudio del colapso de arcos de fábrica sometidos a carga vertical, debe considerarse la fractura de los contrafuertes. Esto puede llevar a obtener cargas de colapso menores para los arcos con contrafuertes, como los que se encuentran en los puentes o en la arquitectura histórica.

NOTA Y AGRADECIMIENTOS

El presente artículo es una versión modificada de otro artículo previo aceptado para su publicación en el *Journal of Architectural Engineering* de la American Society of Civil Engineers (ASCE). Las investigaciones conducentes al presente estudio se realizaron, principalmente, entre marzo y junio de 2001 en el Departamento de Estructuras de la ETS de Arquitectura de Madrid. Los autores quieren dar las gracias al profesor J. Heyman y al profesor C. R. Calladine, del Departamento de Ingeniería de la Universidad de Cambridge, por sus comentarios y aportaciones a este artículo. El primer autor agradece a la J. William Fulbright Foundation y a la National Science Foundation su apoyo económico. ■

APÉNDICE. NOTACIÓN

Estos símbolos se emplearon en el artículo:

b = espesor del estribo en su base

c = coeficiente de estabilidad con el que se multiplica el momento de vuelco para conseguir seguridad

e = altura de la fractura medida desde la base del estribo

f_s = coeficiente de rozamiento estático que se considerado para la fábrica

F = magnitud de la fuerza aplicada que volcaría un estribo fracturado

F_{cr} = magnitud de la fuerza aplicada que volcaría un estribo monolítico

h = altura de la fuerza aplicada medida desde la base del estribo

h_b = altura total de un estribo rectangular

H_0 = fuerza horizontal aplicada/ componente horizontal de la fuerza aplicada

H_{cr} = fuerza horizontal para la que se inicia la fractura

H_s = fuerza horizontal para volcar un estribo monolítico

H = fuerza horizontal que ocasiona el colapso del estribo

M_s = momento estabilizante debida al peso del estribo y a la componente vertical

q = medida de la estabilidad propuesta por Rankine

V = componente vertical de la fuerza aplicada

W = peso del estribo por encima de la sección considerada

W_b = peso total del estribo

W_c = peso de la región/pieza fracturada, que no colabora a la estabilidad

W_0 = peso de la región/pieza superior del estribo, no fracturada

W_{v1} = peso del «trapezoides» fracturado en la zona escalonada de un estribo gótico

x, y = sistema especial de coordenadas cartesianas

x_b = abscisa del centro de gravedad de un estribo monolítico medida desde el punto de vuelco

γ = peso específico superficial del estribo al considerar el problema bidimensional, kN/m²

μ = coeficiente de la altura a la cual se aplica la fuerza en un estribo rectangular

θ = ángulo de inclinación de la fractura medida respecto a la horizontal

REFERENCIAS

–ARAGON, E. (1909). *Ponts et ouvrages en maçonnerie*. Dunod, Paris, France.

–AUDOY (1820). «Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau». *Mémorial de l'Officier du Génie*, 4, plates I-VI, Paris, France, 1-96.

–BAGGIO, C. and P. TROVALUSCI. (1995). «Stone assemblies under in-plane actions. Comparison between nonlinear discrete approaches», *Computer Methods in Structural Masonry*, Third Intl. Symposium, Lisbon, Portugal, G.N. Pande and J. Middleton, Eds., Swansea, U.K., 184-193.

–BÉLIDOR, B.F. (1729). *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile*. Paris, France.

–BÉLIDOR, B. F. (1813). *La Science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile*,... Nouvelle édition avec des notes par M. Navier, F. Didot, Paris, France.

–BOOTHBY, T.E. (1994). «Stability of masonry piers and arches including sliding». *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 120(2), 304-319.

–BURGOYNE, J. (1853). «Revetments or retaining walls». *Corps Royal Engrs. Papers*, 3, London, U.K., 154-159.

–CAIN, W. M. (1879). *Voussoir arches applied to stone bridges, tunnels, domes and groined arches*. Van Nostrand, New York.

–CAROCCI, C.F. (2001). «Guidelines for the safety and preservation of historical centres in seismic areas». *Historical Constructions 2001. Proc. of 3rd Intl. Seminar*. Guimaraes, November 7-9, P.B. Lourenço and P. Roca, Eds. Univ. do Minho, Portugal, 145-165.

–COULOMB, C.A. (1773). «Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture». *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Savants et lus dans ses Assemblées*, 7, Paris, France, 343-382.

–CROIZETTE-DESNOYERS, P. (1885). *Cours de construction des ponts*. Vve. Dunod, Paris, France.

–DUPUIT (1870). *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie*. Dunod Editeur, Paris, France.

–GAUTHEY, E.M. (1809-1813). *Traité de la construction des ponts*,... Publié par M. Navier. 2 vols. F. Didot, Paris, France. (2a ed. 1832; 3a ed. 1843).

–GILBERT, M. and MELBOURNE, C. (1994). «Rigid-block analysis of masonry structures», *Structural Engineer*, 72, London, U.K., 356-361.

–HARKNESS, R.M., POWRIE, W., ZHANG, X., BRADY, K.C., and O'REILLY, M.P. (2000). «Numerical modelling of full scale tests on drystone masonry retaining walls». *Geotechnique*, 50(2), London, U.K., 165-179.

–HARVEY, W.J. (1991). «Stability, strength, elasticity, and thrustlines in masonry structures». *The Structural Engineer* 69(9), London, U.K., 181-184.

- HAUPT, H. (1853). *General theory of bridge construction*. Appleton, New York.
- HEYMAN, J. (1966). «The stone skeleton». *International Journal of Solids and Structures*, 2, Oxford, U.K., 249-279. Trad. esp., «El esqueleto de piedra», Cap. 1 en: J. Heyman (1995). *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*. Colección de ensayos. (edit. por S. Huerta). Instituto Juan de Herrera / CEHOPU, Madrid, pp. 1-34.
- HEYMAN, J. (1968). «On the rubber vaults of the Middle Ages and other matters», *Gazette des Beaux-Arts*, 71, Paris, France, 177-188. Trad. esp., «Sobre las bóvedas 'de goma' de la Edad Media y otros temas», Cap. 5 en: J. Heyman (1995). *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*. Colección de ensayos. (edit. por S. Huerta). Instituto Juan de Herrera / CEHOPU, Madrid, pp. 83-92.
- HEYMAN, J. (1969). «The safety of masonry arches». *International Journal of Mechanical Sciences*, 11, Oxford, U.K., 363-385. Trad. esp., «La seguridad de los arcos de fábrica», Cap. 6 en: J. Heyman (1995). *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*. Colección de ensayos. (edit. por S. Huerta). Instituto Juan de Herrera / CEHOPU, Madrid, pp. 93-112.
- HEYMAN, J. (1982). *The Masonry Arch*. Ellis Horwood, Chichester, U.K.
- HEYMAN, J. (1992). «Leaning towers», *Meccanica*, 27, Dordrecht, The Netherlands, 153-159. Trad. esp., «Torres inclinadas», Cap. 27 en: J. Heyman (1995). *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*. Colección de ensayos. (edit. por S. Huerta). Instituto Juan de Herrera / CEHOPU, Madrid, pp. 345-54.
- HEYMAN, J. (1995). *The Stone Skeleton*. Structural engineering of masonry architecture. Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K. Trad. esp.: (1999) *El esqueleto de piedra*, Instituto Juan de Herrera / CEHOPU, Madrid.
- HEYMAN, J. (2001). *Letter to S. Huerta*, Cambridge, U.K., March 13, 2001.
- HUERTA, S. (1990). *Diseño estructural de arcos, bóvedas y cúpulas en España, ca. 1500- ca. 1800*. PhD thesis, Univ. Politécnica de Madrid, E.T.S. de Arquitectura, Madrid, Spain.
- HUERTA, S. (1996). «La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico». *Obra Pública* (Número especial sobre Ingeniería e Historia) NE38, 18-29.
- HUERTA, S. y G. LÓPEZ MANZANARES. (1996). *Informe sobre la estabilidad de la iglesia de Guimarei*. Departamento de Estructuras de la ETSAM. Dirección Xeral do Patrimonio Cultural. Xunta de Galicia.
- HUERTA, S. y G. LÓPEZ MANZANARES. (1997). «Stability and consolidation of an ashlar barrel vault with great deformations: the church of Guimarei». *Structural Studies, Repairs, and Maintenance of Historical Buildings*, (Ed. Sánchez and Brebbia), Computational Mechanics Publications, Southampton, U.K., 587-596.
- HUERTA, S. (1998). «Mecánica de las bóvedas de la catedral de Girona». *Las grandes bóvedas hispanas*, Curso celebrado en Madrid 19-23 mayo de 1997, S. Tarragó (ed.). CEDEX, Madrid, Spain, 53-65.
- HUERTA, S. y R. HERNANDO DE LA CUERDA. (1998). «La teoría de bóvedas en el siglo XVIII: la contribución de Philippe de La Hire», *Actas del Segundo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, Coruña, October. Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, Universidad de la Coruña, Spain, 233-44.
- HUERTA, S. (1999). «The medieval 'scientia' of structures: the rules of Rodrigo Gil de Hontañón». *Omaggio a Edoardo Benvenuto*, Univ. of Genoa, Genoa, Italy, Nov. 29-30.
- HUERTA, S. (2001). «Revisión del estudio de José Rubió i Bellver sobre la catedral de Palma de Mallorca». *Seminario sobre el estudio y la restauración estructural de las Catedrales Góticas de la Corona Catalano-Aragonesa*, 14, 15 y 16 de junio de 2001. Girona y Palma de Mallorca. (Inédito.)
- HUERTA, S. y F. FOCE (2003). «Vault theory in Spain between XVIIIth and XIXth century: Monasterio's unpublished manuscript 'Nueva Teórica de las Bóvedas'». *Proceedings of the First International Congress on Construction History* (Madrid 20th-24th January 2003), S. Huerta (ed.). Madrid: Instituto Juan de Herrera, pp. 1155-66.
- LA HIRE, P. (1712). «Sur la construction des voûtes dans les édifices». *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, Paris, France, 70-78.
- LA MENDOLA, L. and PAPIA, M. (1993). «Stability of masonry piers under their own weight and eccentric load». *J. of Struct. Engrg.*, ASCE, 119(6), 1678-1693.
- MAYNIEL (1808). *Traité expérimental, analytique et pratique de la poussée des terres et des murs de revêtement*, D. Colas, Paris, France.
- MELBOURNE, C. (1997). «The collapse behaviour of multispans brickwork arch bridges». *The Struct. Engr.*, 75, London, U.K., 297-305.
- MILANKOWITCH, M. (1907). «Theorie der Druckkurven». *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 55, 1-27.
- MILANKOVITCH, M. (1910). «Zu der Statik massiven Widerlager». *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 58, Germany, 120-128.
- MONASTERIO (ca. 1800). «Nueva teoría sobre el empuje de bóvedas». *Manuscrito inédito*. Biblioteca de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Univ. Politécnica de Madrid.
- NAVIER, C.M.L. (1826). *Resumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique à l'Etablissement des Constructions et des Machines*. Didot, Paris. (2nd ed. 1839)
- OCHSENDORF, J.A., (2002). *Collapse of Masonry Structures*, PhD thesis, Department of Engineering, Univ. of Cambridge, Cambridge, U.K.
- PINTO, A., MOLINA, J., PEGON, P. and RENDA, V. (2001). «Protection of the cultural heritage at the ELSA Laboratory», *Historical Constructions 2001. Proc. of 3rd Intl. Seminar*. Guimaraes, November 7-9, P.B. Lourenço and P. Roca, Eds. Univ. do Minho, Portugal, 973-982.
- RANKINE, W.J.M. (1863). *A Manual of Civil Engineering*. 2nd Ed. Griffin Bohn and Company, London, U.K. (1a ed. 1862).
- RANKINE, W.J.M. (1864). *Manual of Applied Mechanics*, 3rd ed. Charles Griffin, London, U.K. (1a ed. 1858).