

SOBRE LA ECUACIÓN DE EULER EN EL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO. ACCIÓN SOBRE UN CODO EN UNA TUBERÍA*

THE EULER EQUATION OF FLUID MOVEMENT. ACTION ON A PIPE ELBOW

JAVIER JENARO MAC-LENNAN. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Director de Obra

Dirección: j-jenaro@hotmail.com

RESUMEN: En este trabajo se demuestra que la presión del flujo no ejerce acción alguna sobre los codos en régimen forzado en contra de lo habitualmente aceptado.

PALABRAS CLAVE: ACCIONES DE UN FLUJO FORZADO

ABSTRACT: This work shows that, contrary to common belief, forced fluid pressure does not exert any action at the pipe elbow.

KEYWORDS: FORCED FLOW ACTION

1. ECUACIÓN DE EULER

Supuesto un elemento de un fluido moviéndose a lo largo de un tubo de corriente, la fuerza que actúa sobre este volumen si la presión es $p(x,y,z)$ en un instante dado es

$$\bar{F} = -\int_s p d\bar{N}$$

Siendo N el vector normal a la superficie que bordea el volumen considerado, $|N| = 1$, transformándola en una integral de volumen se tiene:

$$\bar{F} = -\int_v \text{grad} p dv$$

Esta fuerza se invierte en modificar la cantidad de movimiento del volumen considerado. Nuestro punto de vista consiste en analizar dinámicamente un elemento de corriente y seguirle en su trayectoria, de manera que a menos que el fluido esté estático, con lo que sus velocidades son nulas, las variaciones de la velocidad de cada partícula ocasionan fuerzas medibles en ella y forman parte de la historia de dicha partícula que es toda su trayectoria, consideración fundamental que está en confrontación con la mantenida por Leonard Euler, pues mientras que éste considera la variación de velocidad del agua que llega a un determinado punto fijo del fluido nosotros consideramos que las fuerzas dinámicas que se desarrollan son las que actúan sobre el elemento de volumen considerado que está en constante movimiento y que es variado si lo hace el vector velocidad, bien en magni-

*El derecho de Propiedad Intelectual de éste artículo está amparado bajo el nº 105.164 del Registro General de la Propiedad Intelectual de la Oficina Provincial de Madrid.

Se admiten comentarios a este artículo, que deberán ser remitidos a la Redacción de la ROP antes del 30 de enero de 2003.

Recibido: octubre/2001. Aprobado: octubre/2001

tud o bien en dirección o ambas cosas a la vez y que dependerá del gradiente de presiones. Por lo tanto podemos establecer la ecuación:

$$-\int_v \overline{\text{grad} p} dv = \int_v \rho \frac{dv}{dt} v dv$$

o bien $-\overline{\text{grad} p} = \rho \frac{dv}{dt}$ o $-\overline{\text{grad} p} = \rho \frac{dv}{dt} \frac{ds}{dt}$

o bien finalmente $\left[\overline{\text{grad} p} + \rho \frac{dv}{ds} v = 0 \right] \quad (1)$

(1) Es nuestra ecuación fundamental de la dinámica de fluidos.

2. ACCIÓN SOBRE UN CODO DE UNA CONDUCCIÓN

Para un elemento de corriente desplazándose por la tubería a lo largo de una línea de corriente de tangente T ($r=R(\cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j})$) es válida la ecuación (1).

$$\overline{\text{grad} p} + \rho \frac{dv}{ds} v = 0$$

Tomando la tangente a la línea de corriente

$$\bar{T} = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j}$$

se tiene:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} \right) = \rho v \frac{d\bar{T}}{ds} v$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} \right) = \frac{\rho v^2}{R} (-\cos \theta \bar{i} - \sin \theta \bar{j})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \cos \theta \frac{\rho v^2}{R} \quad p = \frac{\rho v^2 x^2}{2R^2} + p_0 + f(y)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sin \theta \frac{\rho v^2}{R} \quad p = \frac{\rho v^2 y^2}{2R^2} + p_0 + g(x)$$

luego entonces la presión en el codo es:

$$p = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 \quad (2)$$

p_0 es la presión constante en régimen uniforme antes y después del codo y no ocasiona sobre esta fuerza alguna (ya que la fuerza es $\text{grad } p_0 = 0$). Este resultado aligera los macizos de anclaje que habitualmente se calculan con base a una errónea fórmula que se encuentra en diferentes textos de enseñanza y manuales de aplicación, y que adopta el Canal Isabel II para sus cálculos estructurales. Sin embargo si es necesaria una revisión del cálculo de las tuberías en los codos al aparecer como consecuencia de la impulsión una sobrepresión de valor $\rho v^2/2$

La fuerza por unidad de superficie es

$$\frac{\rho v^2}{R} (-\cos \theta \bar{i} - \sin \theta \bar{j})$$

y por lo tanto la variación de la fuerza de impulsión a lo largo del codo y a lo ancho de la sección de la tubería es: (admitiendo en este cálculo que la velocidad es constante en toda la sección)

$$\bar{I} = \rho v^2 S \int_0^{\theta_0} (-\cos \theta \bar{i} - \sin \theta \bar{j}) d\theta$$

$$= \rho v^2 S (\sin \theta_0 \bar{i} + (\cos \theta_0 - 1) \bar{j})$$

$$|\bar{I}| = 2\rho Q v \sin \frac{\theta_0}{2} \quad (3)$$

Como se ve si la presión es constante (p_0) como ocurre en las conducciones normales dado el escaso recorrido de los codos, aquella no influye en la acción de la tubería sobre la sustentación.

Como comprobación calcularemos la fuerza utilizando el primer término de la ecuación (1). A los efectos del cálculo de la presión aunque se ha calculado para una línea de corriente que pasará por el centro de gravedad del elemento de volumen considerado y ya que la variación a lo largo del diámetro es proporcional al radio de giro hemos supuesto en los cálculos anteriores que esta variación es pequeña y por tanto en la sección del tubo de corriente que se considera así lo hemos supuesto. Pero esta suposición no es válida a la hora de hallar el gradiente por lo que nos proponemos calcular la acción sobre el codo utilizando aquel debidamente modificado. En efecto se tiene:

$$v_r = \frac{r}{R} v \quad ; \quad p = \frac{\rho}{2} v^2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + p_0$$

$$p = \frac{\rho}{2} v^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) + p_0$$

$$\overline{\text{grad} p} = \frac{\rho v^2}{R^2} (x \bar{i} + y \bar{j})$$

este gradiente se aplica en el centro de gravedad del elemento de corriente considerado, con lo cual se obtiene:

$$\bar{F} = \rho v^2 S \int_0^{\theta_0} (\cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j}) d\theta = \rho v^2 S (\sin \theta_0 \bar{i} - \cos \theta_0 \bar{j})$$

desarrollando queda finalmente:

$$|\bar{F}| = 2\rho Q v \sin \frac{\theta_0}{2}$$

Tal como queríamos demostrar.