

LOS ELEMENTOS FINITOS Y SU APLICACIÓN A LOS MODELOS DIGITALES DEL TERRENO

RUBÉN MARTÍNEZ MARÍN. Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Prof. Titular de la U.P. de Madrid. E.T.S.I. de Caminos e Ingenieros Geólogos.

CARLOS GORDO MURILLO. Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Prof. Titular de la U.P. de Madrid. E.T.S.I. de Caminos e Ingenieros Geólogos.

JUAN CARLOS OJEDA MANRIQUE. Ingeniero Superior en Geodesia y Cartografía.
Pof. Asociado de la U.P. de Madrid.

RESUMEN: La generación automática de curvas de nivel suavizadas, pertenecientes a un modelo digital del terreno (MDT) y definido a partir de un conjunto de puntos aislados, que se han obtenido mediante técnicas topográficas, bien por levantamiento topográfico clásico o bien a través de la fotogrametría, es un problema que se puede abordar mediante la utilización de la técnica de los elementos finitos (FEM). Para ello se parte de la red irregular de triángulos (TIN) extendida a todo el dominio y se define la función de forma que permita el grado de continuidad deseado. El presente artículo expone una metodología y un algoritmo para la generación automática de las isolíneas suavizadas partiendo de una red irregular de triángulos, aplicando la técnica de los elementos finitos. Además se comparan las diferentes funciones de forma y sus ventajas e inconvenientes a la hora de elaborar los programas de ordenador correspondientes.

PALABRAS CLAVE: MODELO DIGITAL DEL TERRENO (MDT), RED IRREGULAR DE TRIÁNGULOS (TIN), CURVAS DE NIVEL SUAVES, CONTINUIDAD

ABSTRACT: Based on a set of points obtained by normal topographic methods, surveying or photogrammetry, it can be obtained a triangulated irregular network (TIN) for the whole domain. Automatic generation of fit isolines, adapted or smooth contour lines, in a digital terrain model (DTM) defined throughout a set of scattered points and its associated TIN, can be obtained using finite element techniques (FEM). This paper shows a methodology and algorithm to achieve an automated generation process to define smooth contour lines knowing the triangulated irregular network based on finite element method. Also it compares different shape functions showing advantages and disadvantages when they are programmed and implemented at computers.

KEYWORDS: DIGITAL TERRAIN MODELLING (DTM), TRIANGULATED IRREGULAR NETWORK (TIN), SMOOTH CONTOUR LINES, CONTINUITY

INTRODUCCIÓN

El punto de partida es la obtención de un modelo digital del terreno basado en una red irregular de triángulos (TIN), cuyos vértices sean los puntos del terreno que se han levantado previamente, bien por que se ha realizado un trabajo topográfico clásico, o bien por que se ha efectuado un proceso de restitución fotogramétrica a partir de los pares de fotografías procedentes de un vuelo.

El terreno a modelizar, denominado dominio, puede ser simplemente conexo o no, ya que el proceso de triangulación produce una red de triángulos caracterizada por:

- 1º Disponer de un contorno convexo. Condición conveniente pero no necesaria.
- 2º Admitir islas o zonas de exclusión en las que no se realizará la triangulación.
- 3º En esta red irregular de triángulos cada vértice es un punto en el que se conoce su cota y su posición en planta.

La base geométrica del modelo digital del terreno la constituye la red de triángulos y la simulación matemática del mismo es la generada por los triángulos de dicha red, de tal forma que el terreno natural, en una primera aproxi-

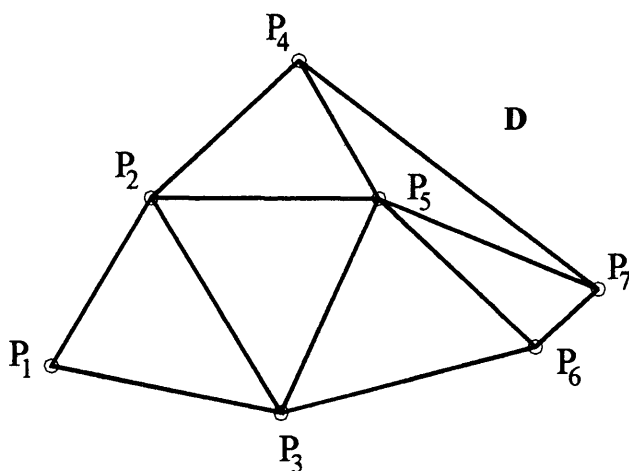


Figura N° 1. Triangulación del dominio D. Red irregular de triángulos.

mación, es sustituido por la superficie poliédrica definida mediante los triángulos situados a la elevación adecuada.

El proceso de obtención de las curvas de nivel consiste en seccionar la superficie poliédrica por planos situados a las cotas requeridas. El resultado es una poligonal cuyos lados son segmentos rectos y la interpolación que se lleva a cabo es una interpolación lineal.

Existen técnicas para obtener curvas de nivel suavizadas que manteniendo la exactitud de los valores de las cotas en los vértices de la red triangular, permite disponer de una apariencia suave. En el presente artículo se propone abordar el problema de la interpolación de puntos pertenecientes al modelo digital del terreno utilizando la técnica de los elementos finitos que permite resolver, tanto el problema de la interpolación, como el de la obtención de las curvas de nivel suavizadas.

LA RED IRREGULAR DE TRIANGULOS

La triangulación del dominio se puede realizar a través de diversos algoritmos de teselación, básicamente consiste en generar una red de triángulos cuyos vértices sean los puntos de partida que se han obtenido mediante fotogrametría clásica (levantamiento topográfico) o por fotogrametría (restitución de los pares de fotogramas). El dominio D, figura n° 1, se divide en triángulos cuyas características principales son:

- 1º La circunferencia circunscrita a un triángulo no contiene ningún otro punto del conjunto inicial.
- 2º Tomados cuatro puntos pertenecientes a dos triángulos adyacentes, nos encontramos con un cuadrilátero que admite dos posibles triangulaciones. Se adoptará la

— Triangulación buena
- - - Solución peor

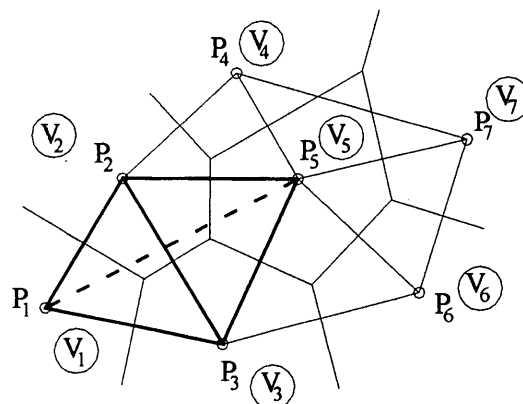


Figura N° 2. Malla triangular regular y polígonos de Voronoi.

que corresponde a los triángulos más regulares, figura n° 2.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Si el modelo matemático está formado por un número elevado de puntos tomados directamente del terreno, modelo determinístico, la calidad del mismo será alta. No obstante la realidad es muy diferente y el número de puntos que constituyen el modelo suele ser pequeño en relación con la superficie o dominio representar. Será necesario disponer de las herramientas matemáticas que permitan estimar la cota de un punto del dominio que no coincida con ninguno de los vértices de la red triangular. En definitiva, y en una primera fase, se necesita una función $Z(x,y)$ tal que para cada punto $P(x_p, y_p)$ del dominio, la función tome el valor de la cota z_p de dicho punto:

$$z_p = Z(x_p, y_p) \quad [1]$$

Ahora bien, no es suficiente que la función sea capaz de interpolar la cota de cualquier punto del dominio, sino que se necesita que al menos sea una función continua C^0 en todo el dominio y si se quiere suavidad en la transición entre triángulos adyacentes, será necesaria la continuidad C^1 .

ALGUNAS FUNCIONES INTERPOLANTES

Los interpolantes habitualmente utilizados en la ingeniería civil son: el modelo gravitacional y el lineal. El primero consiste en ponderar con mayor peso a los puntos más cercanos al

punto a calcular, existiendo diferentes variantes según el exponente de la función interpoladora.

$$Z(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{d_i^p}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i^p}} \quad [2]$$

siendo,

n el número de puntos que influyen en la interpolación.

p el exponente de la función. Un buen valor, contrastado por la experiencia, es $p=2$.

d_i la distancia del punto P_i al punto a interpolar.

z_i la cota de cada punto que interviene en la interpolación.

En el caso de aplicar este interpolante a un modelo digital triangular, las condiciones particulares serán:

- Número de puntos que influyen en la interpolación: los tres vértices del triángulo en el que se encuentre el dato a calcular.
- Condición de continuidad en las fronteras entre triángulos: solo intervienen los vértices de la frontera dada.

Para P_1, P_2, P_3 vértices del triángulo en el que se encuentra P_x , se tendrá:

$$Z(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{z_i}{d_i^2}}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i^2}} \quad \text{si } P_1, P_2, P_3 \quad [3]$$

siendo,

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

el cuadrado de la distancia del punto P_i al punto P_x .

La condición de continuidad a lo largo de las fronteras se logra haciendo que, si el punto P_x está sobre un lado, la influencia del vértice opuesto sea nula o lo que es igual su distancia infinita, es decir, supuesto P_x sobre el lado P_1P_2 , la función interpolante será:

$$Z(x, y) = \frac{\frac{z_1}{d_1^2} + \frac{z_2}{d_2^2}}{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}}$$

y si el punto P_x coincide con un vértice, por ejemplo el P_1 , la función tomará el valor: $Z(x, y) = z_1$.

Para otros tipos de modelos, por ejemplo, los basados en una malla regular en vez de triangular, la función interpolante, expuesta anteriormente, admite la siguiente variante: establecido un radio de influencia R , se consideran datos interpolantes todos aquellos puntos cuya distancia al punto a interpolar sea menor o igual al radio de influencia R .

El interpolante lineal consiste en calcular el plano definido por los tres vértices de cada triángulo, con lo que se tiene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde los coeficientes A, B, C y D se calculan sabiendo que este plano pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, por lo que si se plantea el sistema de ecuaciones y se opera, los coeficientes se obtienen con las siguientes expresiones:

$$A = y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)$$

$$B = z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)$$

$$C = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$$

En definitiva, la función interpolante es:

$$z = Z(x, y) = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C} \quad [4]$$

que se utilizará para interpolar la cota de cualquier punto P_x interior al triángulo que define el plano dado por la expresión [4], y que constituye el subdominio de la función.

La función lineal [4], es continua C^0 y permite interpolar cualquier punto interior al dominio D , no así extrapolar puntos fuera de dicho dominio, propiedad que está disponible en la función interpolante definida mediante la expresión [3].

INTERPOLANTE PROPUESTO

Basado en la técnica de los elementos finitos, se propone una metodología para definir un interpolante con las siguientes características:

- 1º Que permita calcular la cota de cualquier punto interior al dominio D, es decir, no será posible realizar extrapolaciones.
- 2º Que sea continuo en el dominio, es decir, una función C^0 .
- 3º Que disponga de un buen comportamiento topográfico, simulando tanto las tendencias locales del terreno como las globales.
- 4º Que permita realizar curvas de nivel suavizadas.

Fundamento teórico

Se considera el dominio D discretizado en una red de triángulos en la que cada vértice es un punto real del terreno. Se define un elemento triangular de seis nodos, figura nº 3, cuyas coordenadas locales y globales cumplen las siguientes expresiones:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

con

$$c_1 = A_{23} + y_{23}x + x_{32}y$$

$$c_2 = A_{31} + y_{31}x + x_{13}y$$

$$c_3 = A_{12} + y_{12}x + x_{21}y$$

donde, si se denomina A al área del triángulo, cada coeficiente es:

$$A_{23} = \frac{1}{2A}(x_2y_3 - x_3y_2)$$

$$A_{31} = \frac{1}{2A}(x_3y_1 - x_1y_3)$$

$$A_{12} = \frac{1}{2A}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$y_{23} = \frac{1}{2A}(y_2 - y_3)$$

$$y_{31} = \frac{1}{2A}(y_3 - y_1)$$

$$y_{12} = \frac{1}{2A}(y_1 - y_2)$$

$$x_{32} = \frac{1}{2A}(x_3 - x_2)$$

$$x_{13} = \frac{1}{2A}(x_1 - x_3)$$

$$x_{21} = \frac{1}{2A}(x_2 - x_1)$$

En definitiva las expresiones:

$$N_1 = c_1(2c_1 - 1)$$

$$N_2 = c_2(2c_2 - 1)$$

$$N_3 = c_3(2c_3 - 1)$$

$$N_4 = 4c_1c_2$$

$$N_5 = 4c_2c_3$$

$$N_6 = 4c_3c_1$$

se denominadas funciones de forma del elemento y permiten interpolar tanto la geometría como la cota, es decir, que las coordenadas cartesianas globales en un punto interior al triángulo vendrán dadas por las funciones:

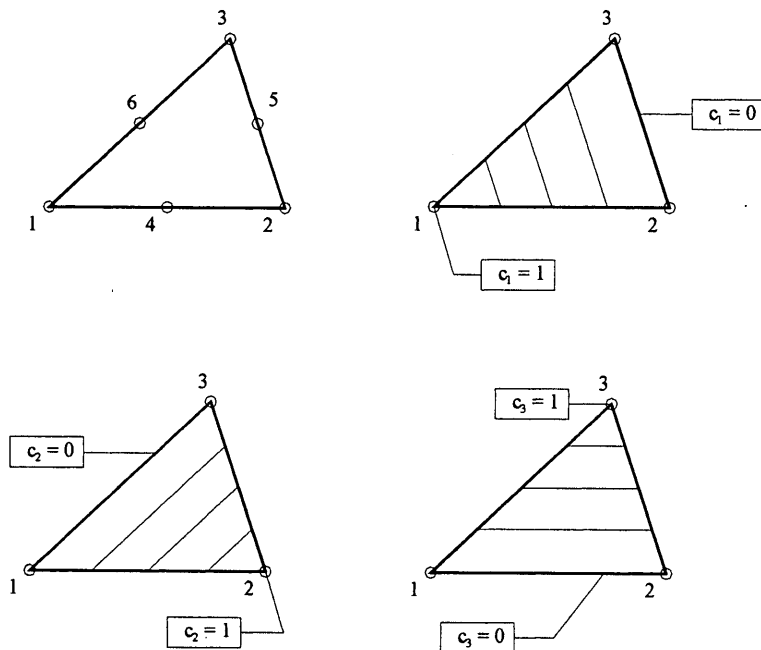
$$x = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 \quad [5]$$

$$y = y_1c_1 + y_2c_2 + y_3c_3 \quad [6]$$

y la función de interpolación cuadrática para calcular la cota, será:

$$z = Z(x, y) = z_1N_1 + z_2N_2 + z_3N_3 + z_4N_4 + z_5N_5 + z_6N_6 \quad [7]$$

La función expresada en [7] cumple las dos primeras condiciones que se han especificado para el interpolante buscado, es decir, permite calcular la cota en cualquier punto del dominio y además es continua. Para garantizar un buen comportamiento topográfico, simulando tanto las tendencias locales del terreno como las globales, se procede a interpolar las cotas de los puntos medios de los lados de cada triángulo ponderando mediante la función [3] con los vértices de los triángulos que contengan dicho lado, figura nº 4.



La cota del punto M vendrá dada por la expresión:

$$Z(M) = \frac{\frac{z_A}{d_{AM}^2} + \frac{z_B}{d_{BM}^2} + \frac{z_C}{d_{CM}^2} + \frac{z_D}{d_{DM}^2}}{\frac{1}{d_{AM}^2} + \frac{1}{d_{BM}^2} + \frac{1}{d_{CM}^2} + \frac{1}{d_{DM}^2}}$$

siendo z_i la cota de cada uno de los cuatro puntos que intervienen y d_{iM} las distancias desde M a dichos puntos.

Si el lado AB fuese frontera del dominio D , solo intervenirían los tres vértices del propio triángulo, ya que el cuarto punto no existiría.

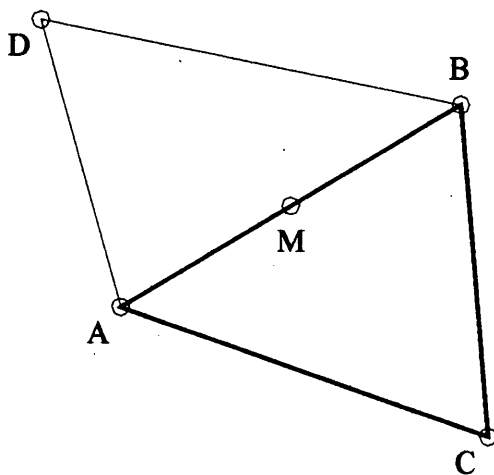


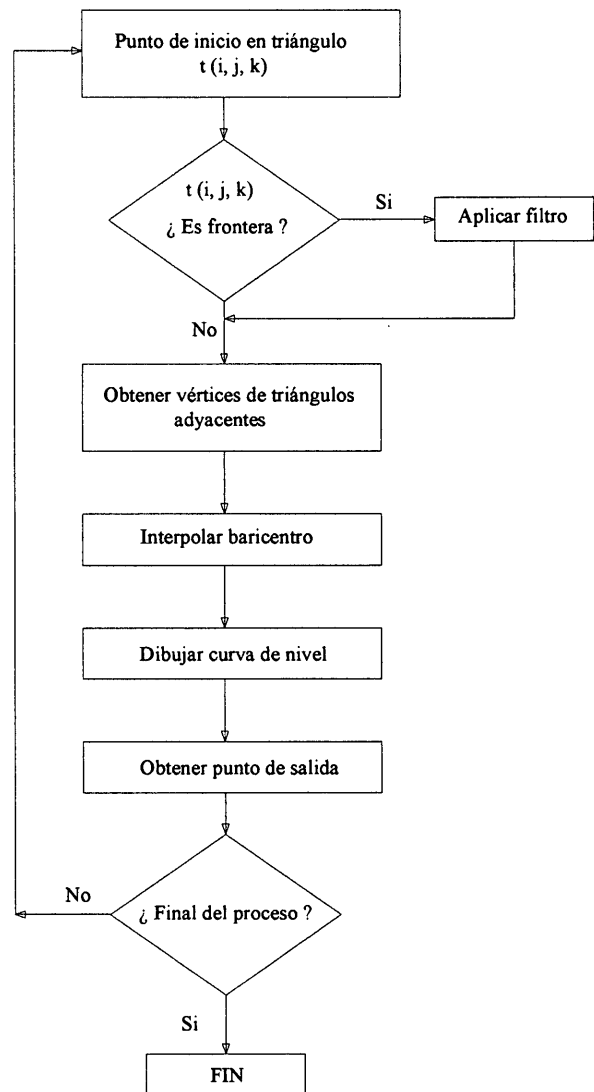
Figura N° 3.
Elemento
triangular de 6
nodos.
Coordenadas
locales.

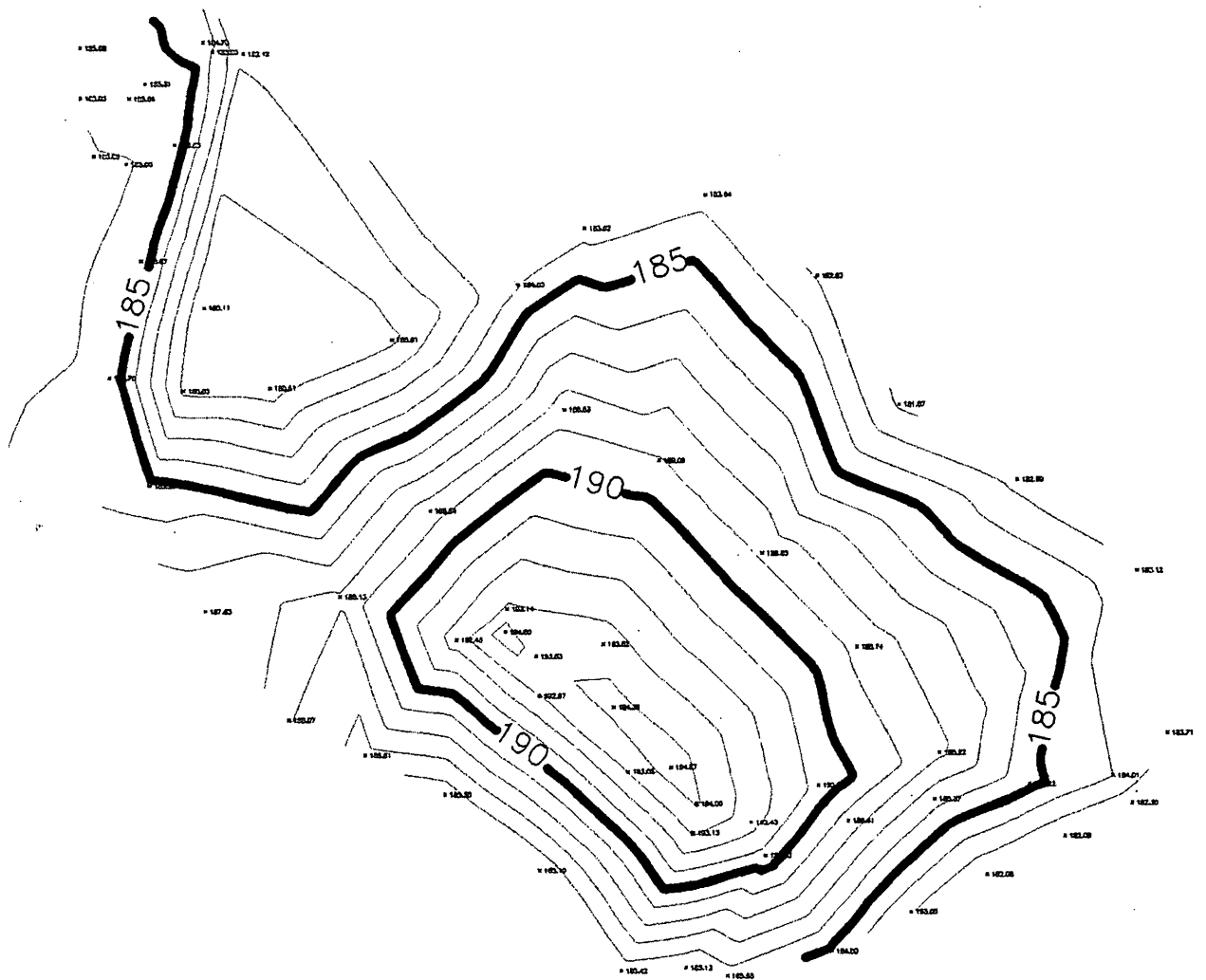
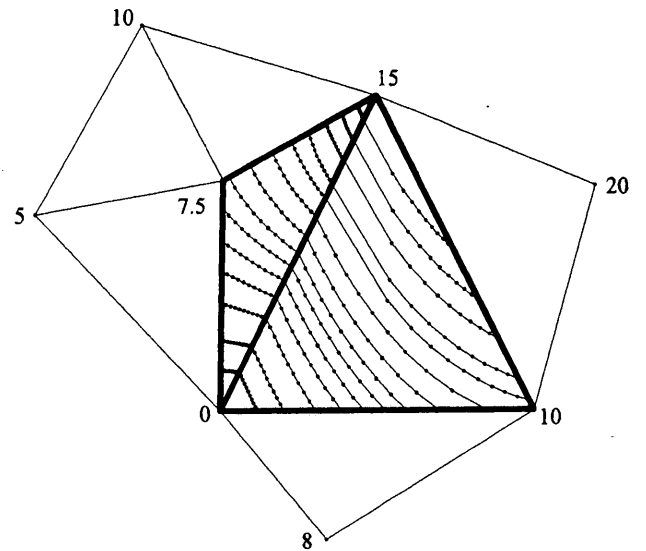
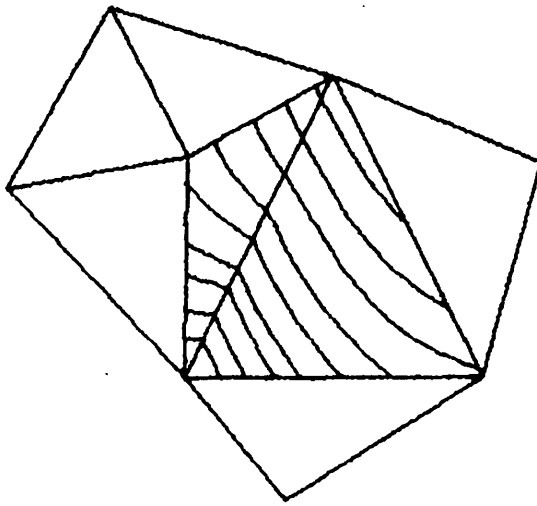
Figura N° 4.
Estimación de la
cota en el punto
medio del lado.

La función definida en [7], permite realizar las curvas de nivel de forma sencilla y con un aspecto suave, ya que se cumple la condición de continuidad en las fronteras. Dado que no se le ha impuesto continuidad del tipo C^1 , es decir a las derivadas, resultará que el paso de un triángulo a otro no mantendrá la suavidad. Para la mayoría de los problemas planteados en Topografía es más que suficientemente imponer la continuidad solamente a la función.

Algoritmo.

El algoritmo mostrado a continuación está totalmente desarrollado y forma parte de un programa escrito en Visual Basic para el entorno AutoCAD y permite obtener y visualizar los ejemplos adjuntos.





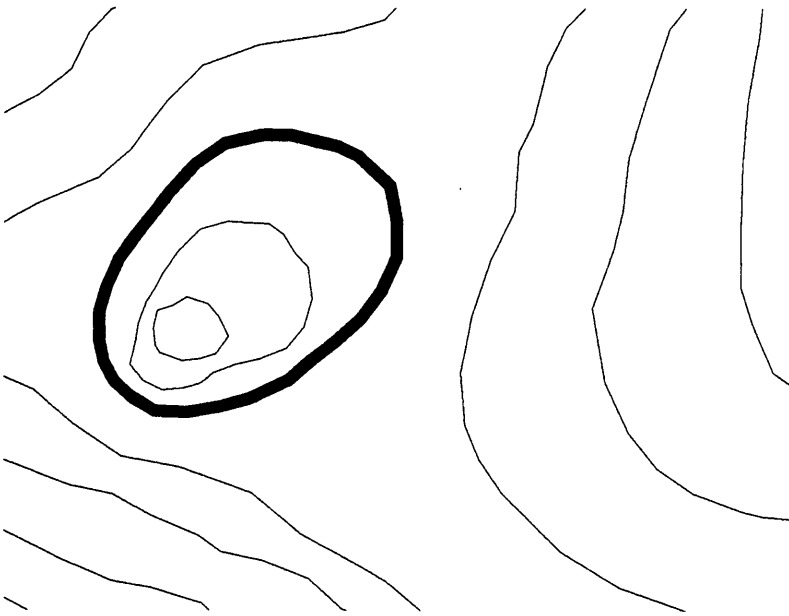


Figura N° 8.
Ejemplo de
curvado global
con precisión 5.

EJEMPLOS

En las figuras n° 5 y 6 se muestran los triángulos y la interpolación realizada sobre ellos a escala natural y ampliada para poder observar el comportamiento del algoritmo de interpolación y poder comprobar con detalle la continuidad C^0 .

En los ejemplos de las figuras n° 7 y 8 se muestran las curvas de nivel correspondientes a una zona real del terreno. Obsérvese que en la figura n° 6 los triángulos que se muestran al estar representados a una escala muy grande, la suavidad de las curvas queda afectada negativamente. Por otro lado, el grado de suavidad de las curvas se puede seleccionar a voluntad, siendo en este ejemplo la precisión igual a

diez, entendiendo por precisión el número de puntos por tramo y triángulo.

CONCLUSIONES

Cuando se dispone de una discretización triangular del dominio, la generación de un modelo digital del terreno puede realizarse mediante la utilización de diferentes interpolantes. El más sencillo es el basado en una interpolación lineal que en la mayoría de los problemas prácticos es suficientemente válido. El resultado obtenido mediante una interpolación lineal difiere de lo que tradicionalmente estamos acostumbrados a ver, ya que las curvas de nivel tienen un aspecto poligonal, es decir, muy anguloso. Para mejorar el aspecto y producir unas curvas de nivel suaves, existen varios algoritmos que en su fundamento solo pretenden suavizar dichas curvas.

En este artículo se propone una metodología y un algoritmo que permiten, por una parte, realizar la interpolación de la cota de cualquier punto del dominio partiendo de las cotas de los vértices de la red triangular y, por otra parte, generar las curvas de nivel suavizadas de acuerdo con el grado de precisión que se desee. La función interpolante propuesta está basada en la técnica de los elementos finitos y garantiza una continuidad C^0 , por lo que la suavidad de las curvas de nivel en el elemento queda garantizada a través del factor de precisión, no así la suavidad en la frontera entre elementos, ya que para ello sería necesaria una continuidad C^1 . Ahora bien cuanto más exigente sea el algoritmo más cálculo será necesario realizar, por lo que es conveniente valorar tanto los esfuerzos como los resultados para llegar a una solución aceptable desde el punto de vista de la práctica topográfica. ■

BIBLIOGRAFÍA

- Barnhill R.E., Gregory J.A. "Polynomial Interpolation to Boundary Data on Triangles". Mathematics of Computation, n° 29. 1975.
- Clough R.W., Tocher J.L. "Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending". Proc. Conf. On Matrix Methods in Structural Mechanics, WPAFB, Ohio, 1965.
- Deutsch C.V., Journel A.G. "GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide". Oxford University Press, New York 1992.
- Farin G. "Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design: A practical guide". Academic Press, 1990.
- Journel A. "Constrained Interpolation and Qualitative Information". Mathematical Geology, vol. 18, n° 3, pp 269-286. 1986.

- Kanaganathan S., Goldstein N.B. "Comparison of four point adding algorithms for Delaunay type three dimensional mesh generators". IEEE Transactions on magnetics, vol 27, n° 3, may 1991.
- Lee R.C.T. Fu J.J. "Voronoi Diagrams of Moving Points in the Plane". International Journal of Computational Geometry and Applications, 1991.
- Martínez Marín R. "Generación automática de una malla triangular". Mapping, noviembre 2000.
- Martínez Marín R. "Generación automática de curvas de nivel (isolinias) suavizadas". Topografía y Cartografía, abril 2001
- Poiker T.K., Fowler J.J., Mark D.M. "The Triangulated Irregular Network". Proceedings of the Digital Terrain Models Symposium St. Louis, Miss., pp. 516-540, 1978.

- Sloan S.W., Houlby G.T. "An implementation of Watson's Algorithm for Computing 2-D Delaunay Triangulations". Advanced Engineering Software, Vol. 6, N° 4, 1984.
- Zienkiewicz O.C. "The Finite Element Method in Engineering Science". McGraw-Hill, New York, 1977.
- Preparata F.P., Shamos M.I. "Computational Geometry, An Introduction". 1985.
- Shewchuk J.R. "Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator". First Workshop on Applied Computational Geometry (Philadelphia, Pennsylvania), pag. 124-133. May 1996.