

Curvas de Transición Una metodología

Antonio Crespi González
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

RESUMEN

Con este trabajo se ha pretendido formular un planteamiento general para el diseño y cálculo de las curvas de transición en las vías de transporte terrestre. El diseño de las curvas de transición ha venido estando condicionado por exigencias de simplicidad, tanto en el cálculo como en su replanteo, sacrificándose objetivos con mayor perfeccionamiento, cuyo logro exigía entonces complejos cálculos de difícil ejecución y complicadas operaciones de campo. El estado actual de la técnica permite eludir estos inconvenientes y, consiguientemente, afrontar el tema con el rigor necesario. Las exigencias a que debe satisfacer cualquier modelo racional de curva de transición son consecuencia de la necesaria progresividad a adoptar en las variaciones de la aceleración centrífuga y de la aceleración angular de giro del vehículo en torno a su eje vertical. Con tal objeto, se ha definido la curvatura de una transición como el cociente de dos funciones que representen, respectivamente, la aceleración centrífuga y el cuadrado de la velocidad. De la función de curvatura, y mediante una sencilla correlación, se ha obtenido una poligonal deducida inscrita en la curva de transición.

ABSTRACT

This article aims to present a general lay out for the design and calculation of transition curves in land transport lines. To date the design of transition curves has been governed by requirements of simplicity, both with regards to its calculations and on site layout, thereby sacrificing more perfectionist objectives which entail more complex and difficult calculations and field activities. The current state-of-the art enables us to avoid these drawbacks and to address the problem with necessary accuracy. The requirements which all logical transition curve models should meet are the result of the increments adopted in the variations of centrifugal acceleration and the angular acceleration on which the vehicle turns with regards to its vertical axis. The curvature of a transition has been defined as the quotient between two functions which represent the centrifugal acceleration and the square of velocity respectively. From the curvature function, and by means of a simple correlation, a deduced polygon inscribed in the transition curve may then be attained.

INTRODUCCIÓN

Las curvas de transición en vías de transporte terrestre tienen por objeto evitar la aparición de las reacciones bruscas que se producirían al pasar directamente los vehículos de las alineaciones rectas a las circulares y viceversa.

La incorporación de curvas de transición a un trazado debe aportar continuidad en las características geométricas a fin de conseguir progresividad en la variación de las condiciones dinámicas del movimiento de los vehículos.

El diseño de las curvas de transición se suele realizar adoptando leyes sencillas de curvatura, bien de tipo lineal o

con variación en forma de "S", con el supuesto de que la transición será recorrida a velocidad constante.

Se pretende con ello que la aceleración centrífuga resultante experimente una variación progresiva que aporte seguridad y confort.

Una mayor generalización de este planteamiento consistiría en adoptar la hipótesis de que la transición es recorrida con velocidad decreciente desde la alineación recta, estabilizándose al abordar el arco circular, y a la inversa al moverse en sentido contrario.

Cabe considerar incluso que la velocidad sea también variable en un tramo de la alineación recta inmediato a la curva de transición, abordando ésta a menor velocidad que la de cruce en recta, y a la inversa al circular en sentido contrario.

La consideración de la aceleración centrífuga puede ser ampliada si se pretende, además, que la aceleración de giro de los vehículos en torno a su eje vertical tenga también una adecuada progresividad.

CRITERIOS DE DISEÑO

En cualquier movimiento la velocidad v es el producto del radio de curvatura r por la velocidad angular w .

$$v = rw$$

sustituyendo el radio por el inverso de la curvatura c de flexión $r = 1/c$ resulta

$$cv = w$$

derivando esta expresión respecto al espacio s

$$v (dc/ds) + c (dv/ds) = dw/ds$$

o bien, incorporando el diferencial de tiempo dt

$$v (dc/ds) + c (dv/dt) \cdot (dt/ds) = (dw/dt) \cdot (dt/ds)$$

de aquí se deduce

$$dw/dt = v^2 (dc/ds) + c \cdot a_t \quad (1)$$

donde a_t es la aceleración tangencial

La progresividad de la aceleración angular de giro dw/dt exige que ésta sea nula en ambos extremos de la transición, bien porque en alineación recta no existe giro o porque en la circular, con velocidad constante, la rotación es uniforme.

En el origen de la transición, y refiriéndose a la expresión (1), al ser la curvatura c nula, ha de ser necesariamente nula dc/ds e igualmente al final de la transición, por ser en este punto nula la aceleración tangencial.

De todo ello se concluye que si se pretende que la aceleración angular de giro de los vehículos en torno a su eje vertical varíe de forma progresiva, ha de tener tangentes horizontales en sus extremos el diagrama de curvaturas adoptado para la transición.

DEFINICIÓN ANALÍTICA

De la expresión $a_n = v^2 / r$

donde a_n es la aceleración normal o centrífuga, se deduce

$$c = a_n / v^2$$

es decir

$$\text{curvatura} = \frac{\text{aceleración centrífuga}}{\text{cuadrado de la velocidad}}$$

Con este planteamiento la ley de curvaturas a adoptar para la transición será resultado de la variación de la aceleración centrífuga que se programe y de la ley de velocidades previsible.

METODOLOGÍA

En la aplicación de esta metodología, la variación programada de la aceleración centrífuga y de la evolución de la velocidad pueden ser establecidas mediante expresiones analíticas o simplemente de forma empírica, con tal de que satisfagan las exigencias dinámicas impuestas.

En los desarrollos que a continuación se efectúan se utilizan modelos matemáticos sencillos en función del recorrido s .

En la figura 1 se representa un esquema del caso general en que la velocidad es variable en un tramo K de la alineación recta al abordar la transición con velocidad menor que la de v_0 anterior a este tramo. La velocidad decrece a lo largo de la transición hasta estabilizarse en v_t al recorrer el arco circular.

El cuadrado de la velocidad puede ser expresado directamente en función del recorrido s . Con ello se simplifica la función analítica adoptada.

MODELOS DE CURVATURA ADOPTADOS

Uno de los dos modelos de curvatura que se han utilizado en los ejemplos de aplicación, es el cociente de dos polinomios de tercer grado.

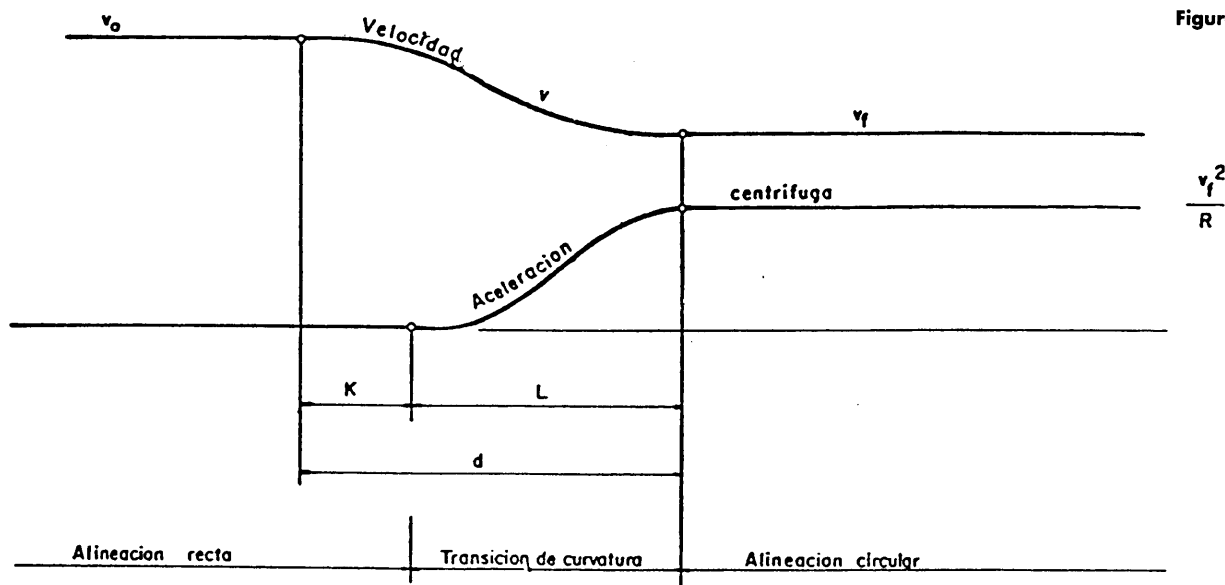


Figura 1.

En este caso la aceleración centrífuga a_n tiene como expresión

$$a_n = \frac{v_f^2 s^2}{R L^2} \left(3 - \frac{2s}{L} \right)$$

y el cuadrado de la velocidad

$$v^2 = \frac{v_0^2 - v_f^2}{d} [2(s+k)^3 - 3d(s+k)^2] + v_0^2$$

efectuando el cociente de ambas expresiones y haciendo

$$\left(\frac{v_0^2}{v_f^2} \right) = b \quad \text{resulta}$$

$$c = \frac{RL^2}{(L+K)^3} \left((b-1) \left[2(s+k)^3 - 3(L+k)(S+k)^2 \right] + bRL^2 \right) \quad (A)$$

En otro modelo matemático de curvaturas se han adoptado funciones trigonométricas como expresiones de la aceleración centrífuga y del cuadrado de la velocidad

$$a_n = \frac{v_f^2}{2R} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} s \right)$$

$$v^2 = \frac{v_0^2 + v_f^2}{2} + \frac{v_0^2 - v_f^2}{2} \cos \pi \frac{s+K}{L+K}$$

dividiendo miembro a miembro y sustituyendo

$$\frac{v_0^2}{v_f^2} = b \quad \text{resulta otro patrón de curvaturas}$$

$$c = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{L} s}{R \left[b + 1 + (b-1) \cos \pi \frac{s+k}{L+k} \right]} \quad (B)$$

CÁLCULO DE UNA CURVA DE TRANSICIÓN

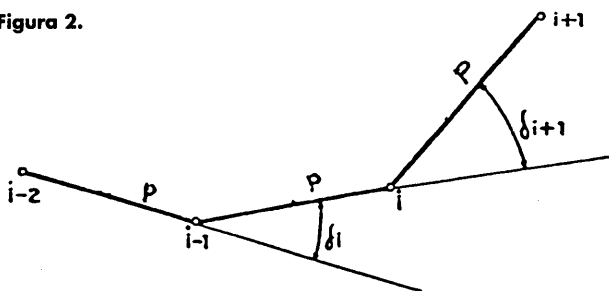
A partir de la ley de curvaturas patrón adoptada se determinan las coordenadas de una poligonal deducida inscrita en la curva de transición.

Con el criterio aplicado resultan prácticamente coincidentes las curvaturas de la transición replanteada y las curvaturas patrón.

Se define la poligonal deducida, con longitud p constante de sus lados, estableciendo una correspondencia analítica entre el ángulos de desviación de la poligonal y la curvatura de la curva patrón.

De acuerdo con el esquema de la figura 2 se establece como ley de correspondencia $\delta_i = p c_i$ y, como radio de curvatura en cada vértice de la poligonal deducida, el del círculo circunscrito a este vértice y a los dos inmediatos.

Figura 2.



De la figura 3 se deduce

$$\frac{p}{2 r_i} = \operatorname{sen} \frac{\delta_{i+1}}{2}$$

y de aquí

$$r_i = \frac{p}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta_{i+1}}{2}}$$

como radio de curvatura en el vértice i.

Con el criterio adoptado $\delta_i = p c_i$ siendo c_n la curvatura final de la curva patrón, serán $c_n = c_{n+1} = c_{n+2} = \dots$ por ser curvaturas correspondientes a la alineación circular.

Por tanto

$$\delta_n = p c_n = \delta_{n+1} = \delta_{n+2} = \dots \quad \text{y, por consiguiente,}$$

Figura 3.

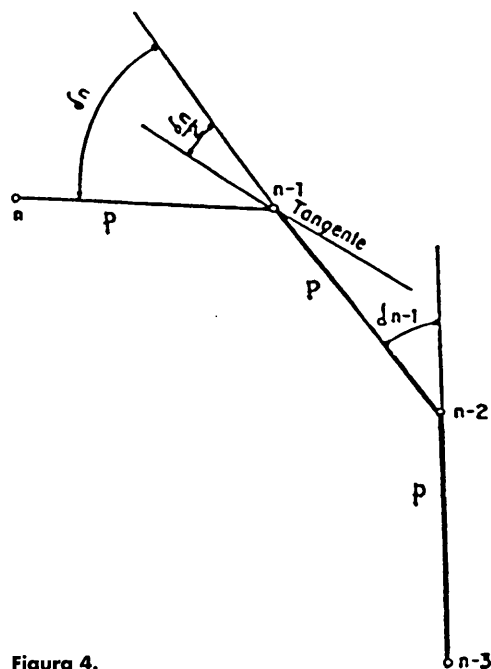
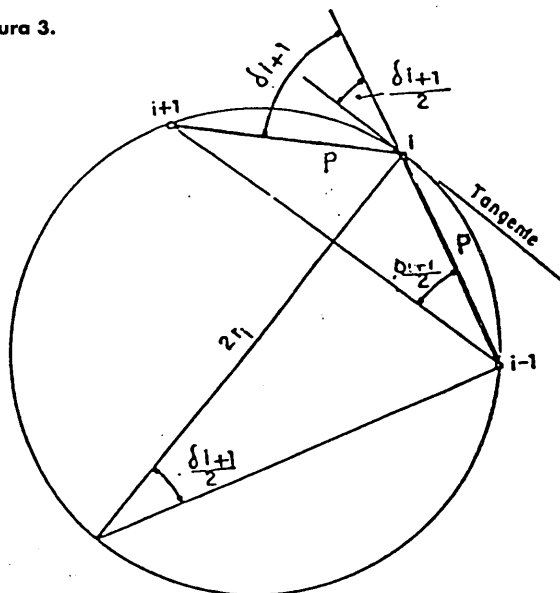


Figura 4.

$$r_{n-1} = \frac{p}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta_n}{2}} = r_n$$

lo que significa que la curva de transición definida como circunscrita a la poligonal deducida, termina en el vértice n - 1 de ésta.

El radio de curvatura en este vértice será

$$r_{n-1} = \frac{p}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta_n}{2}} = \frac{p}{2 \operatorname{sen} \frac{p c_n}{2}}$$

De la figura 4 se deduce el ángulo λ formado por las tangentes a la curva de transición en sus extremos, es decir, en los vértices 0 y n-1,

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i + \frac{\delta_n}{2} = p \left[\sum_{i=1}^{n-1} c_i + \frac{c_n}{2} \right]$$

La curva patrón de curvaturas tiene longitud L estando dividida en n intervalos de longitud p y, por consiguiente, la poligonal deducida inscrita en la curva de transición, con n - 1 lados de longitud p, tendrá como longitud $(n - 1) p = L - p$

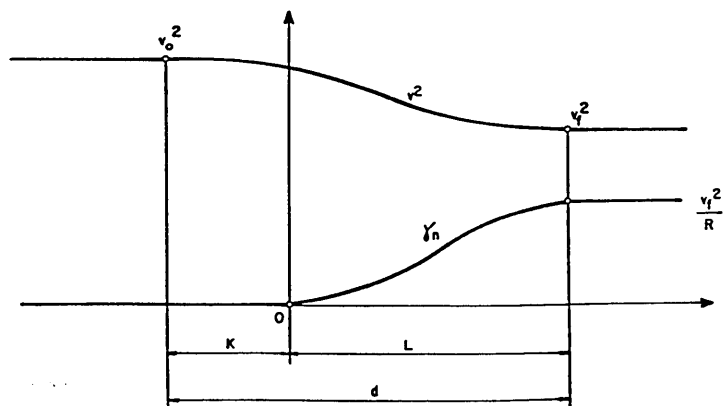


Figura 5.

CÁLCULO DE COORDENADAS DE LA POLIGONAL INSCRITA

Secuencia de cálculo:

Número de orden del vértice i

Longitud correspondiente de poligonal $s_i = ip$

Curvatura patrón $c_i = c(s_i)$

Angulo de desviación $\delta_i = p c_i$

Angulo del lado i-1 con la alineación recta .. $\Phi_i = \sum_{j=1}^i \delta_j$

Incremento de la abscisa $\Delta x_{i-1} = p \cos \Phi_i$

Abscisa $x_i = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta x_j$

Incremento de la ordenada $\Delta y_{i-1} = p \sin \Phi_i$

Ordenada $y_i = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta y_j$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

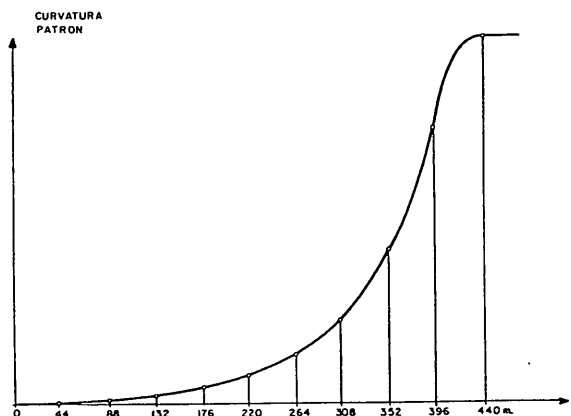
Ejemplo n° 1

Transición en vía de enlace en cruce de carreteras a diferente nivel (esquema en figura 5)

$$v_0 = 125 \text{ km/h} \quad v_f = 30 \text{ km/h} \quad b = \left(\frac{v_0}{v_f} \right)^2 = 17,36$$

$$R = 25 \text{ m} \quad L = 440 \text{ m} \quad k = 100 \text{ m} \quad d = L + k = 540 \text{ m}$$

Figura 6. Diagrama de curvaturas.



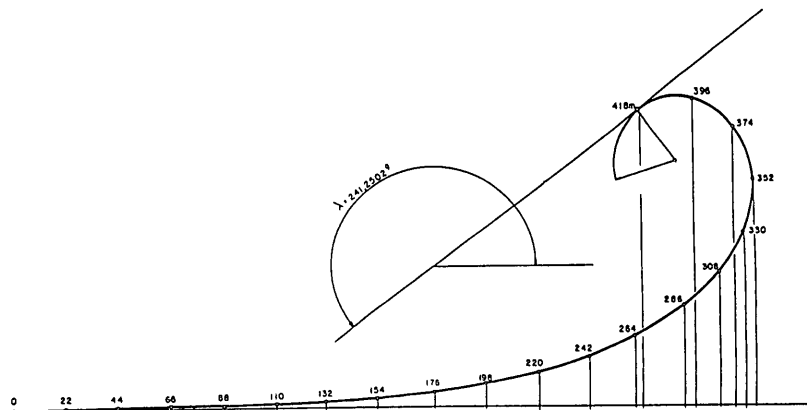
$$p = 22 \text{ m} \quad n = 20$$

- Curvatura patrón modelo (A) (figura 6)

$$c = \frac{\left(3 - \frac{s}{220} \right) s^2}{271,544582 \left(\frac{s+100}{270} - 3 \right) (s+100)^2 + 84.022.400}$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{19} \delta_i + \frac{\delta_{20}}{2} = 3,34950 + 0,440000 = 3,789550 \text{ rad} = 217,2502^\circ \quad (\text{figura 7})$$

Figura 7.

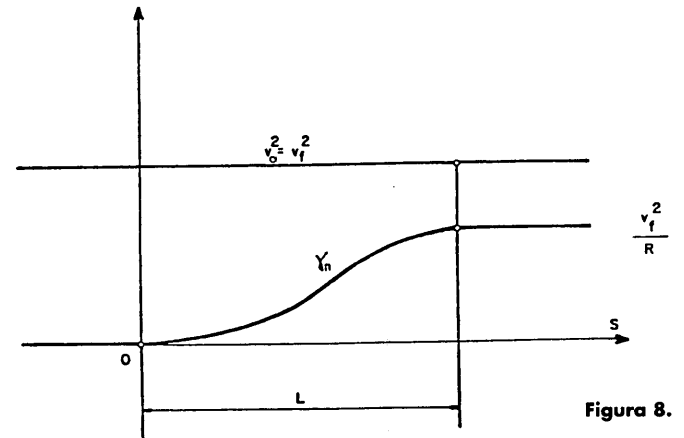


Longitud de la curva de transición = $L - p = 418$ m

nº del vértice	curvatura patrón	x (m)	y (m)
1	0,000019	22,00	0,01
2	0,000077	44,00	0,06
3	0,000178	66,00	0,19
4	0,000325	88,00	0,48
5	0,000527	109,99	1,02
6	0,000793	131,97	1,95
7	0,001138	153,92	3,43
8	0,001581	175,81	5,67
9	0,002150	197,56	8,94
10	0,002884	219,07	13,59
11	0,003841	240,10	20,03
12	0,005102	260,28	28,79
13	0,006787	278,94	40,46
14	0,009077	294,90	55,59
15	0,012228	306,28	74,42
16	0,016579	310,18	96,07
17	0,022451	303,36	116,99
18	0,029721	285,22	129,44
19	0,036794	263,69	124,90
20	0,040000		

Longitud de la curva de transición = $L - p = 180$ m

nº del vértice	curvatura patrón	x (m)	y (m)
1	0,000020	20,00	0,01
2	0,000080	40,00	0,05
3	0,000172	60,00	0,16
4	0,000288	80,00	0,38
5	0,000417	99,99	0,77
6	0,000545	119,99	1,38
7	0,000662	139,97	2,25
8	0,000754	159,93	3,43
9	0,000813	179,88	4,93
10	0,000833		



Ejemplo nº 2

Curva de transición en un ferrocarril (esquema figura 8)

$$v_0 = v_f = 140 \text{ km/h} \quad b = \left(\frac{v_0}{v_f} \right)^2 = 1$$

$$R = 1.200 \text{ m} \quad L = 200 \text{ m} \quad K = 0 \quad d = L + k = 200 \text{ m} \\ p = 20 \text{ m} \quad n = 10$$

- Curvatura patrón modelo (B)

$$c = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{200} s}{2400}$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^9 \delta_i + \frac{\delta_{10}}{2} = 0,075 + \frac{0,01667}{2} = 0,083333 \text{ rad} = 5,3052^\circ$$