

El Borde Libre y Félix Candela

Luis Javier Sanz Balduz

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Doctorando

Miembro de IABSE (International Association for Bridge and Structural Engineering)

Miembro de IASS (International Association for Shell and Spatial Structures)

RESUMEN

La intención del autor, a la hora de escribir el siguiente artículo, es presentar del modo más asequible posible el análisis de borde libre en estructuras laminares mediante la teoría de la membrana, tomando como referencia principal las cubiertas de hormigón del proyectista que más audazmente utilizó dichos bordes: Félix Candela. Se pretende demostrar que el planteamiento del problema del borde libre no corresponde a entelequias matemáticas sino a un preciso significado físico. Para el desarrollo teórico ha sido imprescindible introducir, de la forma más simplificada posible pero sin perder generalidad, las ecuaciones matemáticas que rigen el estado de membrana y que, posteriormente, permiten abordar el análisis de borde libre, objeto de este artículo. Dichas ecuaciones se hallan abundantemente en la literatura especializada pero es más complicado encontrarlas inmediatamente relacionadas con dicho análisis. Por tanto el objetivo es permitir al lector no especializado la comprensión física del problema a partir de su formulación matemática. Sirva igualmente este artículo como homenaje póstumo a D. Félix Candela, un hombre capaz de soñar y de hacernos soñar a los demás.

ABSTRACT

The author recalls the work of the great architect, Félix Candela, and outlines the theoretics of his shell structures with the laminated concrete roofs. The free edge has a definite physical significance. The equations of the shell structure, available in the literature, are simplified as an introduction to the physical explanation of the freedom of the cover. This article also serves to pay posthumous homage to Félix Candela "a man capable of dreaming and of making others dream too".

INTRODUCCIÓN

Todo aquél que observa y experimenta las cubiertas de Félix Candela asiste mudo al insólito espectáculo de la ingravidez de las mismas. Bruno Zevi, hablando sobre los diseños de R. Morandi, E. Torroja, F. Candela y F. Otto, comenta que en "esas "telas" se funden arquitectura e ingeniería, el espacio plasma las estructuras y se forma con ellas".¹

Normalmente las estructuras, como elementos preferentemente estáticos, destinados a soportar cargas y trasladarlas

hacia puntos discretos de apoyo, se asocian a masividad y a pesadez; pero Candela desborda por completo cualquier expectativa para demostrar fehacientemente que el estatismo y el correcto comportamiento resistente de una estructura no excluye ni tiene que coartar la imaginación del proyectista. Tampoco es necesario asumir el frecuentemente mal utilizado canon clásico de la caja cerrada. Candela integra sus estructuras en el medio circundante, provocando la interrelación hasta cotas tan altas que sería difícil pensar en tales espacios sin las láminas mencionadas. Para conseguir este grado de integra-

ción se deben emplear formas que estimulen la creatividad del proyectista y si hay un campo que cumpla, precisamente, tales premisas es el de las estructuras laminares. Las formas de las láminas son prácticamente inagotables y cada una de ellas determina su comportamiento resistente. Como ejemplo más evidente podemos señalar el de la hoja de papel sometida a su propio peso.

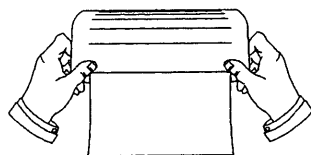
Si cogemos dicha hoja por dos puntos en uno de sus cuatro bordes, la hoja se deformará ostensible e irremediablemente por flexión en la sección adyacente a los puntos de apoyo mencionados. Si, previamente al experimento, procedemos a doblar dicha hoja por la línea equidistante de los previstos puntos de apoyo, observaremos que la hoja presenta una deformación prácticamente nula. De igual manera podemos, en lugar de doblarla, enrollarla y posteriormente volver a cogerla por dos puntos. En este caso se produce deformación, pero mucho menor que en el primer supuesto.

La explicación radica en el diferente mecanismo resistente que es capaz de desarrollar cada una de las tres "láminas" descritas anteriormente. En el primer caso, al incidir las cargas de peso propio de manera perpendicular a la superficie, la hoja debe resistir casi únicamente por flexión, pero la rigidez que presenta a dicho esfuerzo es prácticamente nula puesto que su espesor es muy pequeño. En el segundo caso hemos aumentado el canto estructural del elemento motivando que la hoja resista por su mayor rigidez a flexión y por la actuación de las cargas en un plano diferente al ortogonal. Por último, en el tercer caso, la hoja resiste por la especial disposición geométrica adoptada que propicia que las cargas no incidan perpendicularmente sobre la totalidad de la superficie.

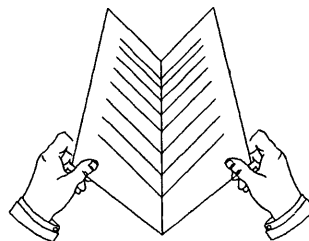
El ejemplo descrito ilustra perfectamente cómo la forma influye en el comportamiento resistente. Dependiendo de la forma que adopte la lámina, ésta será más o menos apropiada al material con el que ha sido construida. La estructura de piedra deberá estar sometida a compresión, el hormigón armado podrá trabajar a compresión y a tracción (aunque debido al pequeño espesor de estas láminas será conveniente limitar los esfuerzos de tracción todo lo posible) y el acero indistintamente a compresión o tracción, aunque su mayor aprovechamiento estructural se producirá bajo tensiones de este último tipo.

El proyectista, además de comprender cualitativamente el flujo de esfuerzos en las estructuras que diseña, debe ser capaz de cuantificarlo mediante modelos matemáticos que bajo

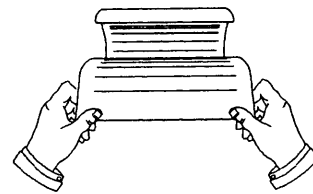
Figura 1.



a) Hoja recta



b) Hoja plegada



c) Hoja enrollada

ciertas simplificaciones ideales le permitan predecir el estado tensional.

Candela, con ayuda de su diccionario de alemán, buceó en la literatura especializada de la época hasta encontrar un modelo analítico que le satisfizo, no sólo por su proximidad a la realidad, sino por la relativa facilidad del aparato matemático utilizado y que le permitió afrontar con indudable éxito sus diseños.

TIPOS DE SUPERFICIES

Como hemos visto la forma geométrica es la clave para "leer" la lámina. Así dichas estructuras se suelen agrupar atendiendo al tipo de curvatura que presenta su superficie:

▼ Superficies sin curvatura:

- Losas: Estado de flexión.
- Láminas plegadas: Estado de flexión y de membrana, con predominio del primero.

▼ Superficies de curvatura simple: Estado de flexión y de membrana con predominio de éste último.

▼ Superficies de curvatura doble: Estado de membrana.

Se debe apuntar que las superficies de curvatura simple, como lógicamente las superficies planas, son desarrollables, es decir, se pueden realizar a partir de figuras geométricas planas. Por su parte las de curvatura doble no son desarrollables, dificultando, en primera aproximación, su diseño y posterior construcción.

En el caso de superficies de curvatura doble es importante distinguir entre superficies clásticas y anticlásticas. Las primeras son las que presentan las dos curvaturas principales del mismo sentido; es decir, su curvatura gaussiana, definida como producto de las dos curvaturas principales, es positiva. Por su parte las superficies anticlásticas se caracterizan por tener las curvaturas principales de sentido opuesto y, por tanto, una curvatura gaussiana negativa.

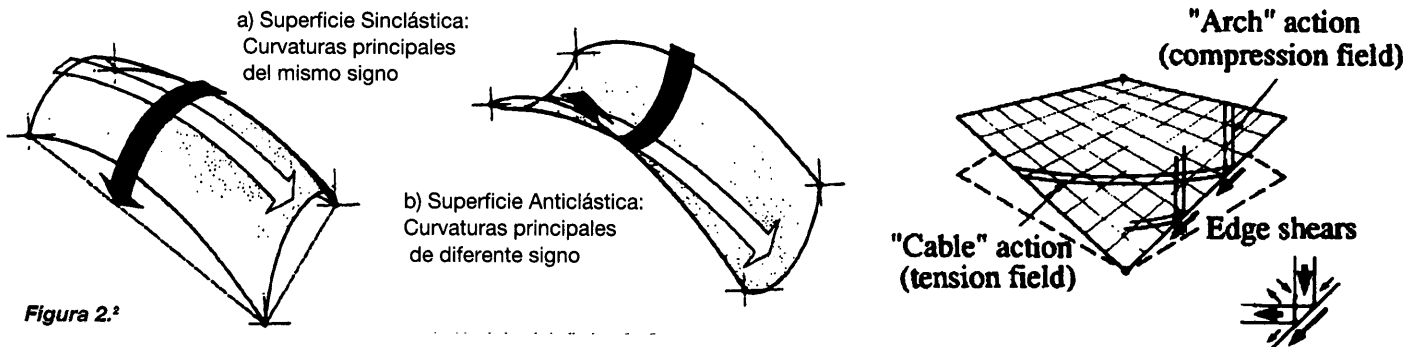


Figura 2.2

Ambos grupos comparten la propiedad de ser capaces de trabajar en régimen de membrana exclusivamente (esfuerzos en su propio plano) y de adaptarse con relativa facilidad a situaciones de carga diferente. El hecho de ser superficies de doble curvatura posibilita el reparto de esfuerzos en dos direcciones y logra que toda la estructura participe en el mecanismo resistente.

Una vez que se han señalado las razones principales de la idoneidad de las superficies de doble curvatura, y especialmente las anticlásticas, para la cubrición de espacios es necesario remarcar que presentan como importante inconveniente la laboriosidad que exige su construcción, y que, generalmente, las aparta de ser económicamente competitivas frente a construcciones laminares de otros tipos; y decimos generalmente porque proyectistas como Heinz Isler, del que más tarde volveremos a hablar, han desarrollado técnicas constructivas que resuelven parcialmente este problema.

Dentro de las superficies de doble curvatura, no desarrollables por definición, existe un grupo caracterizado por la propiedad de estar engendradas por una recta que se mueve apoyándose en dos curvas cualesquiera y conservándose paralela a un plano director (conoides). Cuando se da la particularidad de que las curvas mencionadas se sustituyen por una pareja de rectas, se obtiene una superficie con dos sistemas de generatrices rectilíneas originando una figura geo-

métrica denominada paraboloides hiperbólico, que en adelante denominaremos hypar (hyperbolic paraboloid), término justificado por su uso habitual en la literatura técnica relacionada.

Figura 3: El paraboloides hiperbólico presenta dos mecanismos resistentes debido al diferente signo de sus curvaturas principales. Arco (compresión) en un sentido, y cable (tracción) en el sentido ortogonal.

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Caracterizada cualitativamente la estructura que Félix Candela construyó tan variadamente pasemos a definirla matemáticamente.

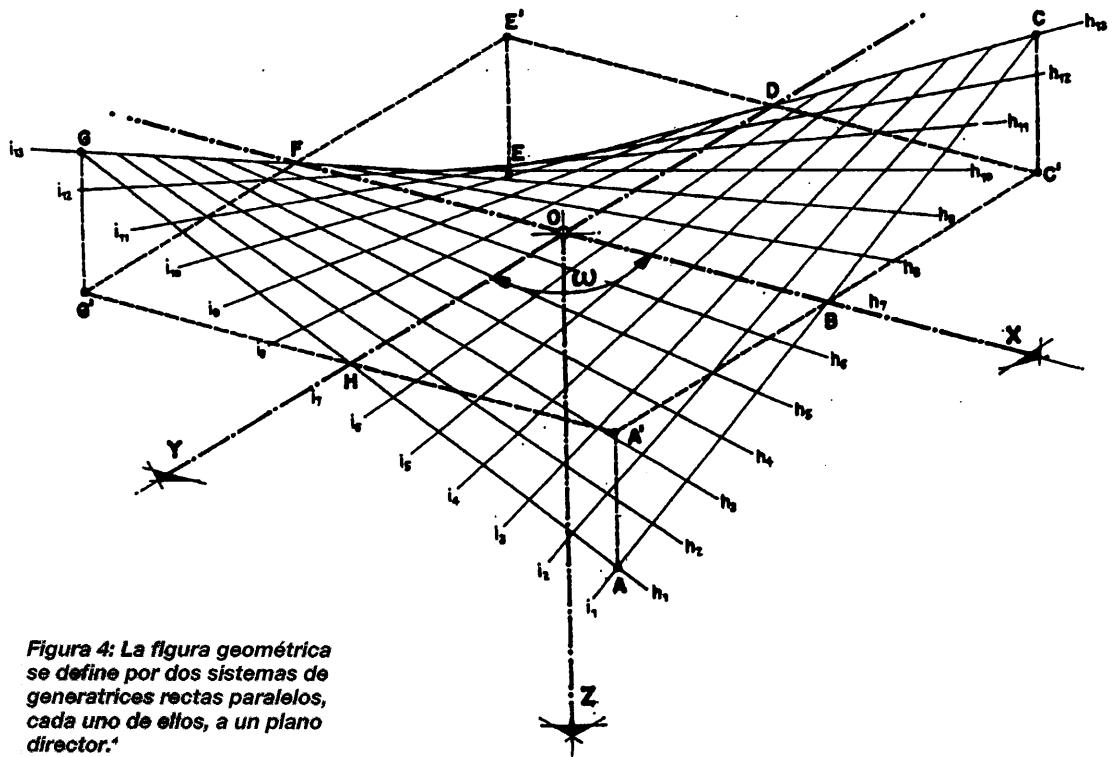


Figura 4: La figura geométrica se define por dos sistemas de generatrices rectas paralelos, cada uno de ellos, a un plano director.

Tomando como ejes coordenados las dos generatrices que pasan por la corona del hypar, la ecuación matemática que define la superficie es:

$$z = k \cdot x \cdot y \cdot \text{Sen } \omega$$

donde k es una constante que representa el cambio unitario de pendiente o alabeamiento del hypar, y que puede ser obtenido particularizando la ecuación para un punto cualquiera de la superficie de coordenadas conocidas; ω es el ángulo que forman los planos directores del sistema. Si $\omega = 90^\circ$ decimos que el hypar es equilátero o rectangular, y cuando es cualquier otro ángulo lo denominamos hypar oblicuo. Es reseñable que las secciones de la superficie cortada por planos bisecantes al ángulo ω dibujan parábolas curvadas hacia abajo (mecanismo arco), y las correspondientes a cortes según el ángulo suplementario de ω son parábolas curvadas hacia arriba (mecanismo cable).

ECUACIONES DE LA MEMBRANA

Para acometer el dimensionamiento de una estructura laminar es necesario conocer el estado tensional al que está sometida la misma. Discretizando la estructura podemos distinguir en cada elemento los siguientes esfuerzos (Figura 5):

- ▼ a) *Esfuerzos de membrana*. Constituidos por esfuerzos producidos en el mismo plano del elemento y que distinguimos en normales y tangenciales a la sección considerada.
- ▼ b) *Esfuerzos de flexión*. Constituidos por pares de flexión y de torsión.
- ▼ c) *Esfuerzos normales*. Esfuerzos cortantes, es decir, normales a los esfuerzos de membrana.

Como se ha comentado anteriormente las superficies de doble curvatura se caracterizan por trabajar, bajo condiciones de carga adecuadas, casi exclusivamente en estado de membrana. Dicho comportamiento resulta una hipótesis admisible en determinados casos que, a grandes rasgos, se pueden resumir en:

- ▼ Pequeño espesor de la lámina.
- ▼ Ausencia de cambios bruscos de curvatura.
- ▼ Curvaturas rebajadas.
- ▼ Ausencia de cargas puntuales.

En relación con este último aspecto cabe señalar que si, accidentalmente, actuase una carga puntual sobre este tipo de estructuras se crearía un estado particularizado de perturbación (flexión localizada), comportándose el resto de la estruc-

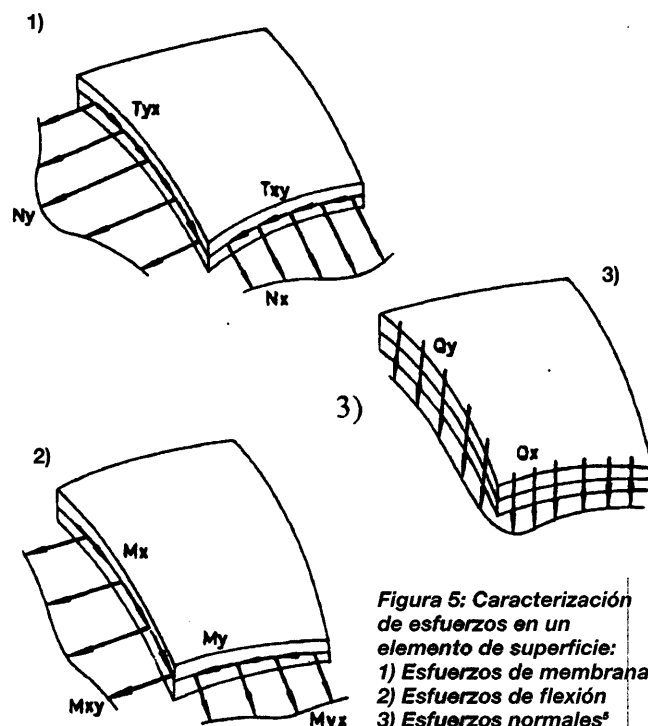


Figura 5: Caracterización de esfuerzos en un elemento de superficie:
1) Esfuerzos de membrana
2) Esfuerzos de flexión
3) Esfuerzos normales^a

tura correctamente, como han demostrado numerosas experiencias llevadas a cabo por Heinz Isler.

En 1981 un par de cubiertas elipsoidales que había construido el ingeniero suizo debían ser demolidas. Isler aprovechó la oportunidad para realizar ensayos a escala real de la resistencia de sus láminas. Tras colocar cargas en puntos singulares y aumentar sus valores, y no apreciando cambios en la forma, procedió a simular un “ataque de meteoritos” con una grúa y una bola de demolición, produciendo un gran agujero localizado entre la esquina de la lámina y el tragaluz central⁶. Después de tal “agresión” la lámina podría haber pasado cualquier inspección, sin presentar cambios apreciables en la configuración geométrica o fisuración en el resto de la superficie. (Figura 6).

Pero la formulación teórica de tales láminas (considerando exclusivamente esfuerzos en el propio plano), como se ha comentado previamente, es anterior a Candela y a Isler. En 1934 A. Pucher calculó por primera vez la expresión general de los esfuerzos de membrana sirviéndose exclusivamente de las ecuaciones de la estática, hecho que posibilitó la relativa sencillez de los resultados.

De aquí en adelante tomaremos el ángulo $\omega=90^\circ$ con objeto de facilitar, en la medida de lo posible, el seguimiento del análisis.

Si realizáramos el estudio en el elemento real, el cálculo se complicaría notablemente, con lo que Pucher proyectó las tensiones reales sobre el plano XY dibujado en la figura 7, y planteó el equilibrio en el elemento proyectado. El hecho de pro-



Figura 6. Lámina elipsoidal ensayada por Heinz Isler. No bastando la prueba de la bola de demolición se retiró una pila de apoyo. Como puede observarse el estado general de la lámina seguía siendo excelente.

El hecho de no tener en cuenta las deformaciones en el propio plano ni los efectos motivados por el coeficiente de Poisson también es perfectamente asumible. La razón estriba en los reducidos esfuerzos que determinan el estado tensional de la lámina así estudiada, en la ausencia de esfuerzos de flexión (que no motivan efectos de gradiente de tensiones originados por el coeficiente de Poisson en la dirección ortogonal), y en los altos valores de los módulos de elasticidad de los materiales frecuentemente utilizados.

Proyectar el elemento real sobre un plano se justifica a partir de los cuatro supuestos mencionados anteriormente. El rebajamiento de las curvaturas y la ausencia de cambios bruscos en las mismas propicia que no se produzcan errores apreciables al proyectar sobre un plano; el reducido espesor y la ausencia de cargas puntuales motiva que no se produzcan diferencias de estado tensional apreciables entre las caras superior e inferior de la lámina. Es decir, no se originan esfuerzos de flexión y consecuentemente tampoco los cortantes asociados.

Hay que señalar que las tensiones mencionadas, con las que vamos a obtener las correspondientes relaciones matemáticas, son fuerzas por unidad de longitud de lámina. De esta manera las relaciones de las magnitudes reales con las proyectadas, a partir de criterios de igual fuerza aplicada al elemento, y despreciando infinitésimos de segundo orden respecto de los de primer orden (rebajamiento de las curvaturas):

$$H_x \cdot dy = N_x \cdot \cos \varphi \cdot dq$$

$$\text{teniendo en cuenta que } dq = \frac{dy}{\cos \theta}$$

$$H_x = N_x \cdot \cos \varphi \cdot \frac{dq}{dy} = N_x \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}$$

$$\text{y de similar manera: } H_y = N_y \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}$$

En el caso de las fuerzas tangenciales:

$$T \cdot dx = \tau \cdot \cos \varphi \cdot dp \quad \text{y como } dp = \frac{dx}{\cos \varphi}$$

$$T \cdot dx = \tau \cdot \cos \varphi \cdot \frac{dx}{\cos \varphi} \quad \text{por lo que } T = \tau$$

Planteando el equilibrio de fuerzas en el plano XY de la figura 7:

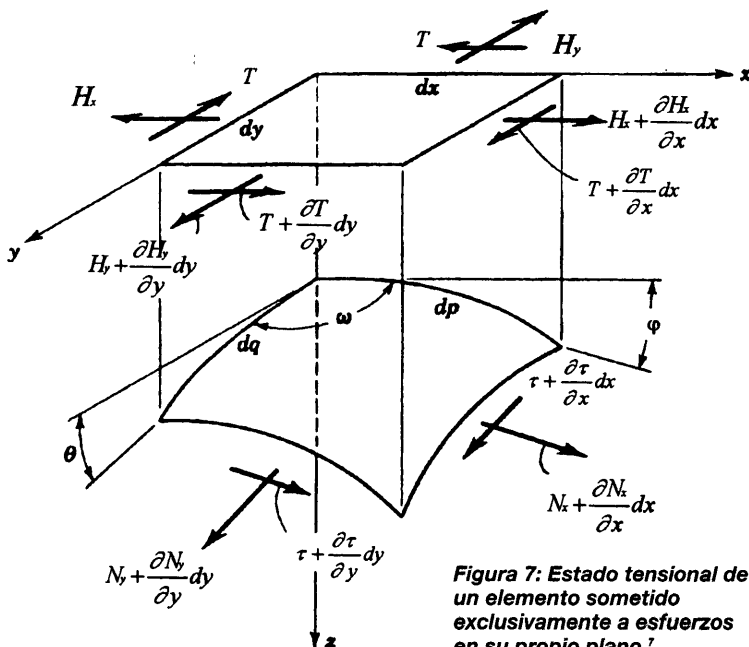


Figura 7: Estado tensional de un elemento sometido exclusivamente a esfuerzos en su propio plano. (XY: Plano de proyección)

$$\sum X = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} + F_y = 0 \quad (2)$$

donde F_x y F_y son las proyecciones de las cargas por unidad de superficie P_x y P_y , aplicadas sobre el elemento real

La relación que existe entre el área real del elemento y la proyectada sobre el plano XY:

$$ds = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi + \tan^2 \theta} \cdot dx \cdot dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \cdot dx \cdot dy$$

y de aquí:

$$F_x = P_x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$F_y = P_y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$F_z = P_z \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Nos falta plantear el equilibrio en el eje z. Hallamos las componentes de las fuerzas aplicadas en esa dirección:

$$N_x \cdot \text{Sen } \varphi \cdot dq = H_x \cdot \frac{\text{Cos } \theta}{\text{Cos } \varphi} \cdot \text{Sen } \varphi \cdot dq =$$

$$H_x \text{ Tan } \varphi \cdot dy = H_x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dy$$

igualmente

$$N_y \cdot \text{Sen } \theta \cdot dq = H_y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dx$$

y dos factores dependiendo de T

$$\tau \cdot \text{Sen } \theta \cdot dq = T \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

$$\tau \cdot \text{Sen } \varphi \cdot dp = T \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$$

Con lo que al final planteamos el equilibrio con los términos que no se anulan (derivadas de 2º orden). Así:

$$H_x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + H_y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2T \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F_z = 0$$

Pero los términos

$$\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

los tenemos en las ecuaciones 1 y 2.

Por tanto tenemos este sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales que definen el estado de membrana:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = -F_x = -P_x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = -F_y = -P_y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} H_x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} H_y + \frac{2\partial^2 z}{\partial x \partial y} T = \frac{\partial z}{\partial x} F_x + \frac{\partial z}{\partial y} F_y - F_z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} P_x + \frac{\partial z}{\partial y} P_y - P_z \right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad (5)$$

La aplicación al caso particular del hyper sería:

$$z = k \cdot x \cdot y$$

La ecuación 5 se convierte en:

$$2 \cdot k \cdot T = (k \cdot y \cdot P_x + k \cdot x \cdot P_y - P_z) \cdot \sqrt{1 + (k \cdot x)^2 + (k \cdot y)^2}$$

Normalmente a la función $\left(1 + (k \cdot x)^2 + (k \cdot y)^2 \right)$

se le denomina ϕ . Entonces:

$$2 \cdot k \cdot T = (k \cdot y \cdot P_x + k \cdot x \cdot P_y - P_z) \cdot \sqrt{\phi}$$

La obtención de T es inmediata de la ecuación 5. Luego, sustituyendo en las ecs. 3 y 4, se llega al siguiente sistema (de nuevo para simplificar los cálculos, suponemos que sólo hay fuerzas actuantes en el eje vertical. $P_x = P_y = 0$; $P_z = g$):

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{g \cdot \sqrt{\phi}}{2k} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{g \cdot \sqrt{\phi}}{2k} \right) + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$$

que se convierte en

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{g \cdot k \cdot y}{2\sqrt{\phi}} = 0 \quad (6)$$

$$-\frac{g \cdot k \cdot x}{2\sqrt{\phi}} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

La resolución de este sistema (ecs. 6 y 7) sugiere los primeros problemas en cualquier lector que se acerque de manera distraída a la bibliografía especializada. Como ejemplo tomaremos las funciones solución del sistema en diferentes publicaciones.

I) P. Jiménez Montoya⁸.

$$H_x = \frac{g}{2} y \ln(\sqrt{\phi} + kx) + f_1(y) \quad (8)$$

$$H_y = \frac{g}{2} x \ln(\sqrt{\phi} + ky) + f_2(x) \quad (9)$$

$$T = -\frac{g}{2k} \sqrt{\phi} \quad (10)$$

siendo:

$$\sqrt{\phi} = \sqrt{1 + k^2 x^2 + k^2 y^2}$$

II) Colin Faber⁹.

$$H_x = \frac{g}{2} y \ln \left(\frac{\sqrt{\phi} + kx}{\sqrt{1 + k^2 y^2}} \right) + f_3(y) \quad (11)$$

$$H_y = \frac{g}{2} x \ln \left(\frac{\sqrt{\phi} + ky}{\sqrt{1 + k^2 x^2}} \right) + f_4(x) \quad (12)$$

$$T = -\frac{g}{2k} \sqrt{\phi} \quad (13)$$

siendo:

$$\sqrt{\phi} = \sqrt{1 + k^2 x^2 + k^2 y^2}$$

III) Valentín Quintas Ripoll¹⁰.

$$H_x = \frac{g}{2} y \ln(\sqrt{\phi'} + x) + f_5(y) \quad (14)$$

$$H_y = \frac{g}{2} x \ln(\sqrt{\phi'} + x) + f_6(y) \quad (15)$$

$$T = -\frac{g}{2} \sqrt{\phi'} \quad (16)$$

siendo:

$$\sqrt{\phi'} = \sqrt{\frac{1 + k^2 x^2 + k^2 y^2}{k^2}}$$

El mismo sistema de ecuaciones y tres, aparentemente, diferentes soluciones. Obviamente las ecuaciones 14, 15 y 16 se pueden poner de la forma:

$$H_x = \frac{g}{2} y \ln \left(\frac{\sqrt{\phi} + kx}{k} \right) + f_5(y)$$

$$H_y = \frac{g}{2} x \ln \left(\frac{\sqrt{\phi} + ky}{k} \right) + f_6(x)$$

$$T = \frac{g}{2k} \sqrt{\phi}$$

De tal manera que seguimos teniendo "distintas respuestas", que sin duda confundirán irremediamente al intrépido lector. La solución al rompecabezas es que las siete ecuaciones son correctas y que su diferencia estriba en la definición de las correspondientes constantes de integración. La clave del problema está en la resolución de estas integrales:

$$H_x = \int \frac{g \cdot k \cdot y}{2\sqrt{\phi}} dx$$

$$H_x = \int \frac{g \cdot k \cdot x}{2\sqrt{\phi}} dy$$

La integral de la función $\frac{1}{\sqrt{\phi}}$ es: $\int \frac{dx}{\sqrt{\phi}} = \frac{1}{k} \cdot \ln(\sqrt{\phi} + kx)$

De esta manera resolviendo las correspondientes integrales:

$$H_x = \frac{g \cdot y}{2} \cdot \ln(\sqrt{\phi} + kx) + f_1(y)$$

$$H_y = \frac{g \cdot x}{2} \cdot \ln(\sqrt{\phi} + ky) + f_2(x)$$

resultados que concuerdan con las ecs. 8 y 9 mencionadas anteriormente. Seguidamente podríamos establecer, en el caso de H_x , que:

$$f_1(y) = f_3(y) - \ln(\sqrt{1+k^2y^2})$$

$$f_1(y) = f_5(y) - \ln k$$

igualdades que son perfectamente válidas, puesto que, a lo largo de la generatriz $y = y_0$, el valor de la coordenada y es constante. Por tanto:

$$H_x = \frac{g}{2} y \ln(\sqrt{\phi} + kx) + \left(f_3(y) - \ln(\sqrt{1+k^2y^2}) \right) =$$

$$\frac{g}{2} y \ln\left(\frac{\sqrt{\phi} + kx}{\sqrt{1+k^2y^2}}\right) + f_3(y)$$

$$H_x = \frac{g}{2} y \ln(\sqrt{\phi} + kx) + (f_5(y) - \ln k)$$

$$= \frac{g}{2} \cdot y \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\phi} + kx}{k}\right) + f_5(y)$$

Con lo que observamos que obtenemos las ecs. 11 y 14, que son equivalentes a la ec. 8. Por tanto se demuestra que las tres soluciones expuestas en los libros citados son correctas, aunque se debe tener cuidado por la diferente definición de las constantes de integración.

El significado físico de dichas constantes radica en la falta de infinitud de la superficie. En efecto, ese valor es introducido por la necesidad de que las tensiones normales, por equilibrio

del elemento, se anulen para la totalidad de los puntos de borde no apoyados. Las tensiones adicionales, que de esta forma se crean en las generatrices correspondientes al punto mencionado, se transmiten a lo largo de las reglas (cuantificadas por las constantes). En un paraboloide sin bordes (hyper infinito) no existirían las constantes de integración puesto que las únicas consideraciones de equilibrio en la superficie serían de carácter interno. Por tanto todos aquellos puntos de la superficie que estén contenidos en una generatriz que corte al borde libre se verán afectados por términos que aumentarán los esfuerzos en dichos puntos.

Debe hacerse notar que si el corte del hyper se aproxima mucho a las generatrices rectas, las constantes de integración pueden hacerse muy grandes e incluso tender a infinito, como se explicará en el siguiente apartado.

BORDE LIBRE

El restaurante Los Manantiales en Xochimilco, México, es referencia obligada al mencionar el término borde libre. Esta estructura del año 1958, en plena madurez de Candela, significa para muchos una fantasía constructiva de difícil superación. Ingenieros y arquitectos de todo el mundo han sentido verdadera fascinación por esta lámina que ejemplifica el conocido leit-motiv "less is more". David P. Billington describe la estructura de la siguiente manera¹²:

▼ "La cubierta está realizada a partir de ocho paraboloides hiperbólicos situados radialmente en una planta circular de 42 metros de diámetro aproximadamente. Aparte de las paredes de cristal, retranqueadas de la línea de fachada hacia el interior, la cubierta, con su espesor de 4 centíme-

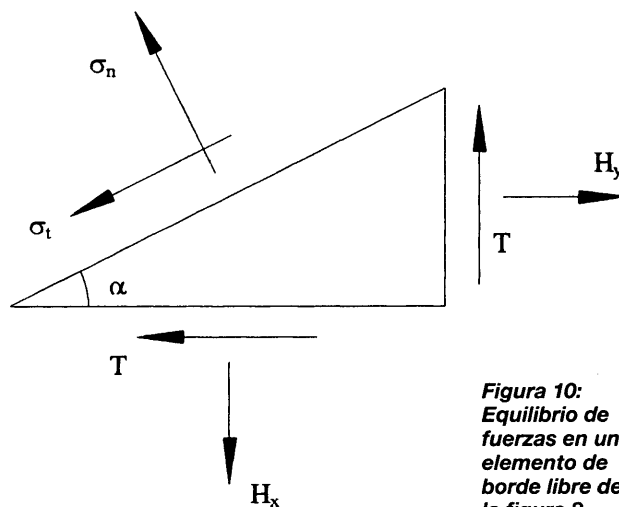
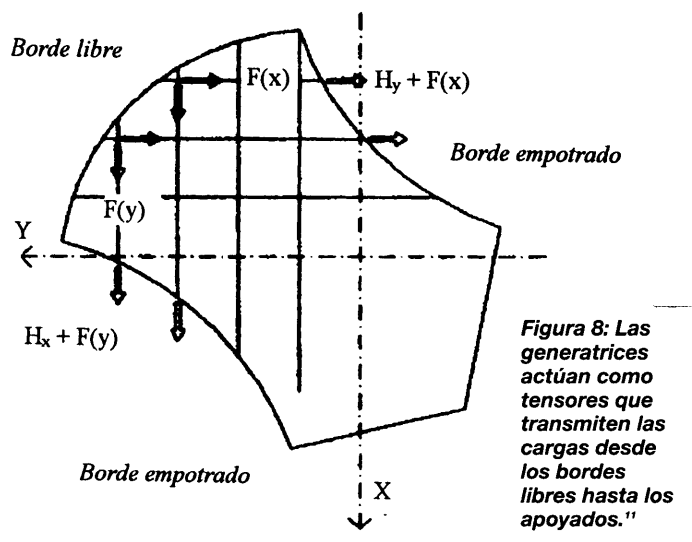




Figura 1. Monumento Los Manantiales, Xochimilco, México.

tros, es la estructura entera. Estructura y forma son una, y la esbeltez es expresada tan poderosamente que resulta difícil creer que la construcción es de hormigón. No es una forma que se pueda encontrar en la naturaleza, sino que más bien al contrario, es intencionadamente artificial y el producto de una mente disciplinada. Además, es realmente original y obviamente un divertimento constructivo... Su influencia en la siguiente generación de artistas estructurales ha sido profunda."

El concepto de borde libre proviene del análisis de un elemento cualquiera situado en el borde. De nuevo el planteamiento del caso se realiza en el plano XY. Para obtener los esfuerzos reales actuantes sobre el elemento habría que acudir a las relaciones anteriormente obtenidas.

Planteando el equilibrio de fuerzas en dicho elemento (Figura 10), obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_n \cdot l &= H_x \cdot \cos \alpha \cdot l \cdot \cos \alpha + H_y \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \sin \alpha \\ &- T \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \cos \alpha \\ \sigma_n &= H_x \cdot \cos^2 \alpha + H_y \cdot \sin^2 \alpha - T \cdot \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\sigma_t \cdot l &= -H_x \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \cos \alpha + H_y \cdot \cos \alpha \cdot l \cdot \sin \alpha \\ &- T \cdot \cos \alpha \cdot l \cdot \cos \alpha + T \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \sin \alpha \\ \sigma_t &= (-H_x + H_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} - T \cdot \cos 2\alpha\end{aligned}\quad (18)$$

Al ser un elemento de borde libre la tensión normal debe anularse por consideraciones de equilibrio, sin embargo el tratamiento de la tensión tangencial variará en función de la naturaleza del borde que estemos analizando:

▼ a) Si el borde es capaz de transmitir tensiones tangenciales, es decir dispone de la suficiente rigidez como para resistir y trasladar esas fuerzas a los apoyos, descargando de esa manera al resto de la lámina, hablamos de borde apoyado. La figura geométrica que dibujan los puntos de borde se convierte en un arco sometido a fuerzas en su directriz.

▼ b) Debido a la prácticamente nula rigidez en el borde, la estructura no es capaz de transmitir esfuerzos en la dirección tangencial, obligando al resto de la lámina a absorber el incremento de esfuerzos mediante las generatrices de la superficie.

Estudiemos el segundo caso. Analizando las ecs. 17 y 18 observamos que para la condición de borde libre las tensiones normal y tangencial deben anularse. Eso nos conduce a la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, puesto que T y α son datos conocidos. T , tensión tangencial en el elemento proyectado, está unívocamente definido por las coordenadas del punto de borde y α es el ángulo que forma el plano de corte, el cual define la línea de borde, con las generatrices del hyper. Si resolvemos el sistema mencionado (ecs. 17 y 18) llegamos a los siguientes valores solución:

$$H_x = T \cdot \frac{\text{Sen } \alpha}{\text{Cos } \alpha} = T \cdot \tan \alpha$$

$$H_y = T \cdot \frac{\text{Cos } \alpha}{\text{Sen } \alpha} = \frac{T}{\tan \alpha}$$

Si $\alpha \approx 0^\circ$, es decir el borde se acerca mucho a la generatriz $x = x_0$, H_y tiende a hacerse muy grande puesto que su denominador es prácticamente nulo. Si por el contrario $\alpha \approx 90^\circ$ le ocurrirá lo mismo a H_x , por aproximarse demasiado a la generatriz $y = y_0$. En estos casos el estado tensional sería muy elevado y características anteriormente despreciadas como el efecto Poisson o la plasticidad del material pasarían a ser de especial importancia, motivando la utilización de modelos matemáticos más afinados para estas zonas.

El párrafo anterior pone de manifiesto que el corte que define el borde libre de la cubierta, debe ser alejado lo más posible de las generatrices del hyper. Cuanto más se acerque α a 45° mejor se repartirán los esfuerzos entre las generatrices de las dos direcciones, X e Y . Sin embargo, si nos aproximamos a una de las dos generatrices estaremos exigiendo a una dirección que trabaje por encima de lo recomendable, mientras que la otra apenas colabora.

Analícemos qué quiere decir el hecho de que H_x ó H_y sean muy elevadas e incluso prácticamente infinitas. Hemos visto anteriormente que:

$$H_x = \frac{g}{2} y \cdot \ln(\sqrt{\phi} + kx) + f_1(y)$$

si $H_x = \infty$ alguno de los sumandos debe ser ∞ .

Pero el término $\frac{g}{2} y \cdot \ln(\sqrt{\phi} + kx)$ no puede ser nunca ∞ por-

que $(\sqrt{\phi} + kx) > 0$ y " x " es un valor finito.

El resto de las variables está fijado por las coordenadas del punto de borde correspondiente.

Así llegamos a la conclusión de que el término afectado es la constante de integración. Recordemos que previamente se ha comentado que las constantes de integración eran las tensiones adicionales que se introducían en la estructura al imponer un borde libre, con lo que se confirma el hecho de la transmisión de esfuerzos al resto de la estructura.

Aunque Candela exploró las posibilidades que el borde libre ofrecía, también utilizó láminas de borde apoyado con reguesamiento extremo a modo de arco. No cabe duda que el primer tipo es mucho más impactante visualmente y en el ámbito matemático les separa una sustancial diferencia. Para obtener las constantes de integración correspondientes al estado tensional de membrana necesitamos dos condiciones. En el caso de borde libre las dos igualdades adicionales son:

$$\sigma_n = \sigma_t = 0$$

con las cuales podemos fijar las constantes de integración a lo largo de dos generatrices de la superficie. Hay que señalar que cada generatriz de la lámina lleva asociada una constante de integración dependiendo fundamentalmente de su ángulo de corte con el plano que intersecta al hyper.

Si el borde, en lugar de ser libre, fuera apoyado ($\sigma_t \neq 0$), sólo tendríamos una condición por cada punto de borde ($\sigma_n = 0$) y sería necesario introducir una nueva condición de borde apoyado para definir las constantes de integración.

¿Qué quiere decir esto? Sólo puede existir un borde libre y un máximo de dos apoyados, por paraboloides, para poder analizar estas láminas por el procedimiento analítico expuesto. La introducción de más condiciones de borde se convertirían en redundancias hiperestáticas que no pueden ser resueltas exclusivamente mediante las tres ecuaciones de la estática. Candela, para solventar el problema formal del análisis y no sentirse constreñido por limitaciones físicas del modelo que utilizaba, optó por combinar en sus estructuras fragmentos de paraboloides apoyados entre sí, dando a la estructura global la apariencia de numerosos bordes libres.

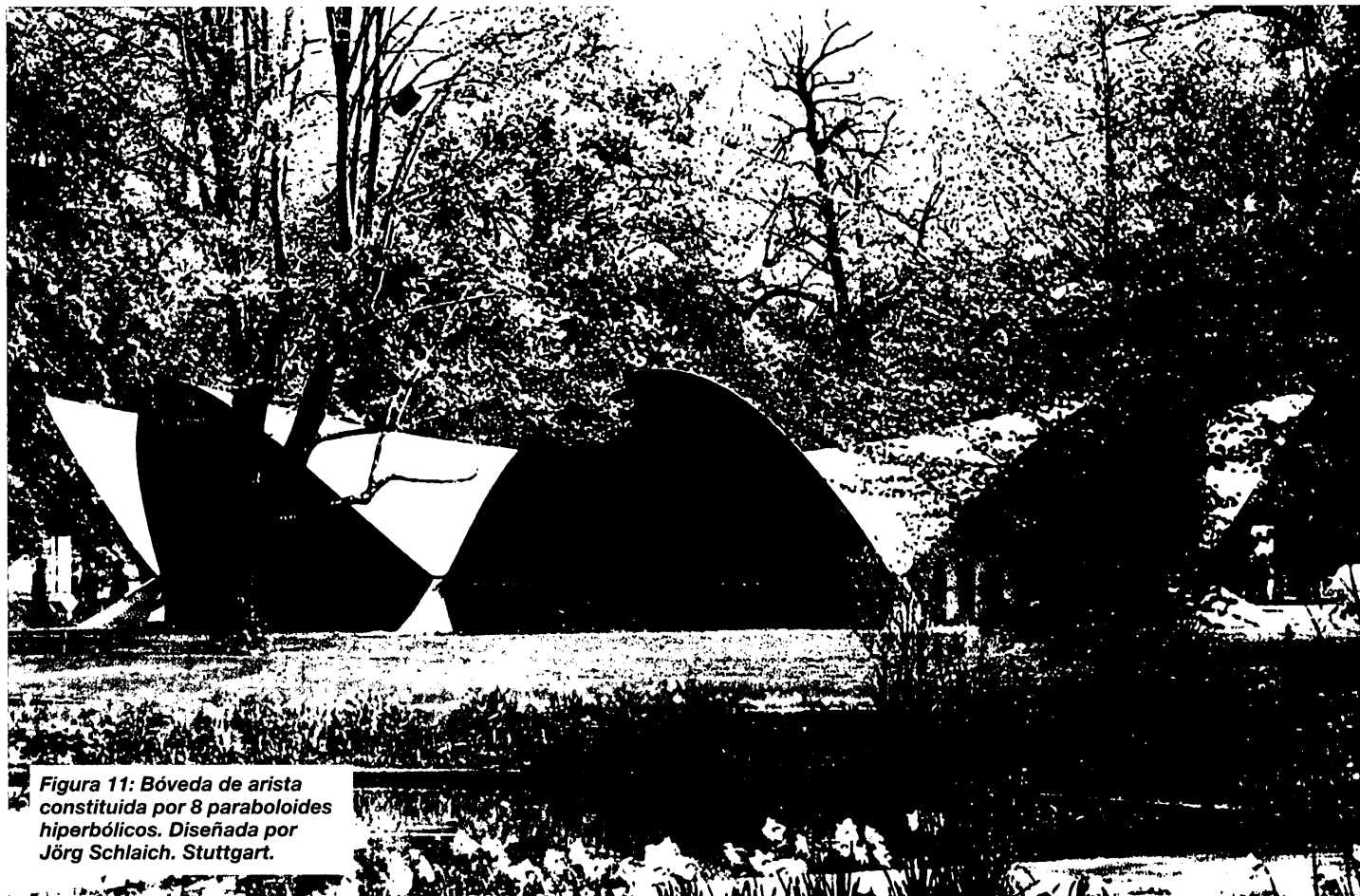


**Figura 11: Bóveda de arista
constituida por 8 paraboloides
hiperbólicos. Diseñada por
Jörg Schlaich. Stuttgart.**

Como podemos observar en la figura 9, cada “arco” de fachada supone el borde libre de un solo paraboloide hiperbólico que, al ser repetido alrededor de la planta circular, da la impresión de un enorme y único borde libre ondulándose sucesivamente. El aspecto de la estructura global, a partir de la simple repetición de una misma figura, no puede ser más convincente.

En resumen podemos decir que Félix Candela utilizó un método analítico que le permitió estudiar matemáticamente sus estructuras pero, por encima de todo, le sirvió para comprenderlas físicamente, significando el borde libre la culminación de su trabajo: adecuación resistente y fuerte valor estético.

Un hecho de singular importancia en este tipo de análisis es la disposición de los apoyos de la lámina. Al iniciar el planteamiento del sistema de ecuaciones del estado de membrana se ha mencionado que solamente se consideran los esfuerzos actuantes en el plano del elemento. Para que esto sea aplicable en las zonas de apoyo de la estructura las reacciones deben actuar igualmente en el plano del elemento correspondiente. Tal consideración es fundamental en las láminas analizadas mediante la teoría de la membrana. Si el aparato de apoyo comunica a la estructura más esfuerzos

que los especificados en el dibujo de la figura 7, tendremos un caso de equilibrio hiperestático que se manifestará en las inmediaciones del apoyo en un estado de perturbación localizada que no será detectado por las ecuaciones descritas que, recordemos, sólo contemplan las igualdades de la estática. Esta perturbación se irá repartiendo por las generatrices del hyper conforme nos alejemos del apoyo hasta llegar a puntos que no se vean afectados significativamente por la introducción de los apoyos mencionados. De esta manera el proyectista debe tener en cuenta que la colocación de unos apoyos no compatibles con las deformaciones previstas por el cálculo general le obliga a resolver un problema de carácter local y a analizar su influencia en el resto de la lámina.

Como ejemplo podemos mencionar el esquematizado en la figura 8. El croquis corresponde a la capilla de Cuernavaca proyectada por F. Candela en 1959. El empotramiento de dos bordes indujo en las zonas inmediatamente adyacentes una perturbación local que motivó la colocación, en dichas zonas, de pesadas vigas de rigidez para garantizar el correcto comportamiento global de la lámina.

La teoría de la membrana es una forma tan válida como cualquier otra para resolver el análisis de las láminas pero introduce una característica muy importante: la facilidad del

aparato matemático empleado permite en todo momento la comprensión del problema físico, cuestión primordial en la teoría de estructuras. Las limitaciones de dicho planteamiento, en cambio, exigirán una revisión o un análisis de otra naturaleza en aquellas zonas en las que no se cumplan las premisas expuestas previamente. De esta manera se revela como aspecto fundamental, como siempre, el control crítico de los resultados matemáticos por parte del proyectista (cuestión de total actualidad).

En un momento en el que disponemos de herramientas que permiten el análisis matemático de cualquier tipo de estructura, como los cada vez más sofisticados programas de elementos finitos, merece la pena aprender y comprender experiencias pasadas; no solamente de Candela sino de innumerables aciertos y errores pretéritos. Sin ir más lejos, recordemos lo que ocurrió hace aproximadamente 75 años en el campo de los puentes colgantes. La introducción de un nuevo modelo matemático (*deflection theory*) para analizar tales puentes condujo a su masiva utilización sin prestar atención al significado físico del mismo. Las experiencias y enseñanzas de Telford, Brunel o Roebling se olvidaron y sólo se prestó atención a la resolución de un gran problema matemático perdiendo por completo la perspectiva de lo que se estaba realizando. La consecuencia fue terrible: el colapso del puente de Tacoma.

No está de más recordar lo que Candela comentaba al respecto¹³:

▼ “Me gustaría insistir en este momento en algo que todo el mundo sabe pero que es fácilmente soslayado; que todos los cálculos, no importa cuán sofisticados y cuán complejos, no pueden ser más que burdas aproximacio-

nes del fenómeno real que se intenta representar mediante un modelo matemático. La complejidad, o incluso elegancia, de tal modelo no guarda ninguna relación con el grado de aproximación. No existe el método de análisis estructural exacto y, contrariamente al seguimiento ciego de los artículos de los códigos, la idoneidad de cualquier cálculo es todavía una cuestión de juicio personal. Esta afortunada circunstancia permite que la ingeniería alcance en ocasiones la categoría más elevada de arte.”

EPÍLOGO

En 1977 el ingeniero alemán Jörg Schlaich proyectó, en Stuttgart, una cubierta laminar de parecidas dimensiones al restaurante Los Manantiales. El material que utilizó fue hormigón armado con fibra de vidrio que resultaba ser mucho más ligero que el hormigón armado convencional. Este hecho le permitió reducir el espesor de la cubierta hasta unos increíbles 12 milímetros. Schlaich contemplaba este diseño como un reconocimiento a Félix Candela y, al mismo tiempo, como una investigación acerca del potencial real de este tipo de estructuras. Una vez finalizada la construcción de la misma, Schlaich invitó a Candela a Stuttgart con la promesa de que iba a contemplar “una lámina que le interesaría”. La cubierta entusiasmó a Candela, entonces con 67 años, que inmediatamente subió a la misma y empezó a saltar en el vértice común de los ocho paraboloides para comprobar las flechas existentes. Con lágrimas en los ojos confesó que estaba emocionado de que sus ideas se hubieran sobrepasado y desarrollado de tal manera.¹⁴

Gracias “abu”.

Referencias

- 1: Zevi, Bruno: *El lenguaje moderno de la arquitectura*. Editorial Poseidón, 1978.
- 2: Faber, Colin: Candela: *The shell builder*. Compañía Editorial Continental, 1970.
- 3: Schodek, Daniel L.: *Structures*. Prentice-Hall, 1992.
- 4: Faber, Colin: *Op. cit.*
- 5: Margarit, J. y Buxadé, C.: *Cálculo de estructuras en paraboloide hiperbólico*. Editorial Blume, 1969.
- 6: Robbin, Tony: *Engineering a New Architecture*. Yale University Press, 1996.
- 7: Billington, David P.: *Thin Shell Concrete Structures*. McGraw-Hill, 1965.
- 8: Jiménez Montoya, P., García Meseguer, A. y Morán Cabré, F.: *Hormigón Armado*. Editorial Gustavo Gili, 1976.
- 9: Faber, Colin: *Op. cit.*
- 10: Quintas Ripoll, Valentín: *Estructuras Especiales de Edificación. Análisis y Cálculo*. Editorial Rueda, 1996.
- 11: Quintas Ripoll, Valentín: *Op. cit.*

12: Billington, David P.: *The Tower & the Bridge*. Princeton University Press, 1983.

13: Billington, David P.: *The Tower & the Bridge*. Princeton University Press, 1983.

14: Holgate, Alan: *The art of Structural Engineering. The Work of Jörg Schlaich and his team*. Edition Axel Menges, 1997.

Bibliografía adicional

- Addis, Bill: *The art of the structural engineer*. Artemis L.L., 1994.
- Canals Navarrete, Ignacio: *Cascarones Parabólico-Hiperbólicos*. Editorial Limusa, 1976.
- Millais, Malcolm: *Estructuras de edificación*. Celeste Ediciones, 1997.
- M.O.P.T.M.A.: *Félix Candela, Arquitecto*. Madrid, 1994.
- Rice, Peter: *An Engineer imagines*. Ellipsis L.L., 1994.
- Tonda, Juan Antonio: *Paraboloides hiperbólicos*. Editorial Limusa-Wiley, S.A., 1972.
- Torroja Miret, Eduardo: *Razón y ser de los tipos estructurales*. CSIC, 1996.