

MÉTODOS PARAMÉTRICOS DE ANÁLISIS ESPECTRAL DE PAVIMENTOS DE AUTOVÍAS Y VÍAS DE FFCC O METRO

Manuel J. Melis.

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. M.Sc, MBA.

Profesor Titular de Ingeniería del Terreno.

ETS Ing. de Caminos, Canales y Puertos, La Coruña.

(en excedencia especial).

RESUMEN

La forma más habitual de análisis de un perfil longitudinal de un pavimento de un carril de FFCC sigue siendo el análisis espectral por medio de la TDF o de la FFT. Sin embargo, el periodograma así obtenido es severamente criticado por muchos autores, diciéndose de él que es simplista e inconsistente, y que puede ocurrir que algunos picos (defectos del pavimento o carril en determinadas longitudes de onda) no sean realmente ciertos.

El presente artículo detalla una forma alternativa de análisis espectral, que en teoría no tiene problemas. Se detalla aquí la obtención de la curva teórica de densidad espectral por métodos paramétricos, que van siendo utilizados en la práctica cada vez con mayor frecuencia. Se incluyen las correspondientes rutinas de cálculo en C y en MATLAB, y se incluye también la comparación de periodograma de un reciente tramo de autovía de hormigón hidráulico obtenido con la FFT y con las curvas de densidad espectral obtenidas con este método para diversos números de parámetros.

ABSTRACT

The usual method of analysis of a longitudinal profile of a road surface or a railway line is still that of spectral analysis by TDF or FFT. This is often criticised as simplistic and inconsistent, and irregularities recorded on certain wavelengths may not be true.

This article proposes an alternative method of spectral analysis which in theory avoids this problem. The theoretical curve of spectral density is obtained by parametric methods which are coming into common use. The calculations in C and in MATLAB are included, and a comparison is made between a recent FFT periodograph of stretch of cemented motorway and the spectral density curves obtained by this method for different numbers of parameters.

Se admiten
comentarios a este
artículo, que deberán
ser remitidos a la
Redacción de la ROP
antes del 30 de
agosto de 1996.

Recibido en ROP:
diciembre de 1995

1. GENERALIDADES

La moderna auscultación de pavimentos de autovías o de vías de FFCC exige la toma de datos a muy alta velocidad, hasta más de 300 km/h o superiores en caso de los modernos vagones auscultadores de vía. Recogidos por los ordenadores de a bordo los datos del perfil, se obtienen los parámetros buscados, entre ellos el IRI, las texturas, las longitudes de onda componentes y sus respectivas amplitudes, etc, en el caso de las autovías, y en el caso de los ferrocarriles se obtienen los datos necesarios de alineación de vía, defectos del carril, alabeos, etc. Con ello se obtienen una serie de señales digitales en las que está contenida toda la información buscada, necesaria para que el ingeniero responsable adopte las medidas adecuadas para la óptima conservación de la autovía o de la vía férrea. De aquí la importancia para el Ingeniero de Caminos del tratamiento numérico de las señales digitales.

Tras la obtención de los datos de auscultación es necesario siempre el análisis de componentes de la señal. Un ejemplo clásico es el estudio de los defectos de regularidad de los pavimentos de hormigón vibrado en autovías. El lector sabe que muchos de los pavimentos de este tipo construidos en los últimos años en la Red de Autovías del Estado han debido ser fresados por los defectos de regularidad superficial con que han quedado (por ejemplo, los tramos blancos de las Autovías de Aragón o de Andalucía, el tramo Arganda-Perales en la N-III). Un detallado estudio del perfil longitudinal en un tramo de prueba para cada extendidora utilizada hubiese permitido sin duda la identificación de las causas de estos defectos, y su eliminación antes de la construcción del pavimento. Las técnicas de análisis espectral del perfil longitudinal que se describen en este artículo y en otros anteriores [Ref.15,16] estudian estos temas.

En el anterior artículo de [Ref.16] presentábamos un sencillo programa de cálculo que permitía analizar estos defectos o, por llamarlos de otro modo, las longitudes de onda más importantes en el perfil longitudinal de una autovía. Tras descomponer el perfil longitudinal en una sucesión de sinusoides de distintas longitudes de onda y amplitudes, entendíamos por más importantes los defectos de regularidad o textura representados por las sinusoides componentes del perfil cuya amplitud era relativamente mayor.

El programa de cálculo aplicaba al fichero de cotas del perfil longitudinal la transformada discre-

ta de Fourier (TDF), obteniendo el diagrama longitudes de onda - amplitudes, o amplitudes - frecuencias. Esta curva se denomina periodograma, y es la base de los métodos clásicos de estimación espectral. Sin embargo, el periodograma como herramienta de trabajo es a veces severamente criticado, diciéndose de él que es inconsistente, en el sentido de que su varianza no disminuye al aumentar el tamaño de la muestra, es decir, el número de cotas medidas del perfil. Algunos autores [Ref.21] incluso lo definen como un estimador "naive", es decir, simplista, de la "verdadera densidad espectral" del perfil longitudinal de la autovía. Otros defectos del periodograma como estimador son los debidos a lo que en la literatura sajona de teoría de señales digitales de denomina aliasing, leakage y smearing. El periodograma es muy sencillo de calcular, como se vió en la citada referencia, pero para obtener la resolución necesaria en las longitudes de onda es necesario disponer de un número elevado de datos. Recuerde el lector que las sucesivas longitudes de onda L_k que se obtienen al calcular el periodograma de un perfil dado por N cotas muestreadas a intervalos Δx son las dadas por la expresión

$$L_k = N\Delta x / K = L / K$$

donde $k = N/2$. Es decir, el periodograma devuelve las amplitudes de $N/2$ componentes, cuyas longitudes de onda son las anteriores. Si en la carretera existe un defecto importante de longitud de onda, por ejemplo 3m, y se obtiene exactamente esta longitud de onda en el periodograma, su amplitud relativa será muy alta, dando un pico acusado (ver [Ref.16] fig.5), pero si no se obtiene exactamente esta longitud de onda, la amplitud del defecto se repartirá entre las longitudes de onda próximas, dando lugar al defecto de "leakage" antes citado, y el periodograma no reflejará la realidad. Además, estas amplitudes altas que van donde no les corresponde pueden enmascarar defectos reales, pero débiles, en esas longitudes de onda. Por ello es conveniente que N sea muy alto. Por otra parte, las longitudes de onda extremas que el periodograma devuelve son las llamadas de Nyquist, que corresponden a la longitud L del tramo muestreado y al doble de la distancia de muestreo Δx . Finalmente debe decirse que al utilizar el periodograma se está haciendo la hipótesis implícita de que el perfil de la carretera es periódico con longi-

tud de onda correspondiente a los N puntos muestreados, cosa que evidentemente no es cierta.

Los métodos actuales para estimar la densidad espectral de un proceso aleatorio pueden dividirse en clásicos (o no paramétricos) y paramétricos. Entre los métodos clásicos el básico es el periodograma, calculado por la TDF o la FFT (transformada rápida de Fourier, que a efectos prácticos hace exactamente lo mismo que la TDF pero mucho más deprisa) y sus mejoras posteriores, que tienen a disminuir su varianza y mejorar su resolución en longitudes de onda o frecuencias. El lector puede visualizar la varianza de un periodograma como la amplitud de los dientes de sierra del mismo. Entre estas mejoras están los periodogramas modificados de Bartlett y de Welch (basados en la aplicación de ventanas a la serie de cotas, ventanas que, modificando las cotas del perfil, reducen la varianza, el aliasing y el leakage), y el método de Blackman-Tukey, que consiste en estimar la densidad espectral del proceso a partir de la secuencia de autocorrelación, a la que también se aplica una ventana para reducir la varianza de las correlaciones con desfases grandes, cercanos al número de datos de la muestra. Sin embargo, y pese a las ventajas de estos métodos mejorados de obtención del periodograma, la técnica de la TDF o FFT tiene un defecto capital, a nuestro entender, y que es el reparto espacial de las longitudes de onda obtenidas. Observe el lector que de la expresión analítica anterior de las longitudes de onda obtenidas se deduce que para las mayores hay muy poca resolución (se pasa de la mayor directamente a su mitad, a un tercio, un cuarto, un quinto, etc, sin datos intermedios), mientras que para las menores la resolución es excesiva. Por ejemplo, para 1024 puntos del perfil separados 12.5 cm, entre las longitudes de onda de 128 m (máxima) y 10 m sólo hay 12 datos, mientras que, por ejemplo, para las comprendidas entre 1 m y 0.25 m hay 897 longitudes de onda.

Sería ideal, por tanto, poder obtener una expresión analítica de la densidad espectral que eliminara estos problemas, y esto es precisamente lo que proporcionan los métodos paramétricos que describimos en este artículo. Estos métodos, al trabajar con una estimación analítica de la densidad espectral (en este caso sí tiene sentido llamarla densidad espectral, por ser una función continua) permiten obtener una resolución muy alta (teóricamente infinita), pero tienen a su vez la desventaja de que el modelo del que debe obte-

nerse el espectro debe ser suficientemente exacto, y ello exige un cuidado considerable, tanto en la estimación de su tipo (autorregresivo o AR, de media móvil o MA, o bien mixto o ARMA) como de su orden, es decir, del número de parámetros.

El presente artículo detalla la obtención de un modelo paramétrico autorregresivo para la estimación de la densidad espectral de un perfil longitudinal de autovía, modelo que naturalmente puede aplicarse a los análisis de vía férrea. Presenta el programa de cálculo del modelo más sencillo, el modelo autorregresivo AR, y detalla todos los algoritmos necesarios, así como su fundamento teórico. El programa de cálculo para la obtención del espectro paramétrico se ha desarrollado tanto en VISUAL C++ para Windows como en MATLAB y está a disposición del lector interesado. Finalmente se comparan en el artículo los espectros obtenidos para el mismo tramo de autovía por el modelo del periodograma y por el modelo paramétrico autorregresivo puro AR, al objeto de que sea el lector el que llegue a sus propias conclusiones sobre la bondad de cada método y sus ventajas y desventajas.

2. DEDUCCIÓN DE LA DENSIDAD ESPECTRAL POR MÉTODOS PARAMÉTRICOS

Sea la sucesión de cotas del perfil de una carretera

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$$

Los métodos de estimación paramétrica admiten que una cota cualquiera determinada, x_t , depende de las "k" cotas anteriores y es función de ellas según una relación lineal de la forma:

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_3 x_{t-3} \dots + a_k x_{t-k} + \varepsilon_k$$

donde el término ε_k es el término de error.

En definitiva, la aceptación de esta relación lineal de orden "k" significa admitir que la sucesión de cotas es lo que en teoría de señales digitales se denomina un proceso aleatorio autorregresivo. La idea básica consiste en admitir que el perfil longitudinal (la señal) está formada por una señal verdadera subyacente periódica o compuesta por una serie de funciones periódicas cuyas frecuen-

cias y amplitudes deben identificarse como objeto del trabajo, enmascarada a su vez por un ruido _ que se trata de eliminar. En la expresión anterior el ruido viene dado por el término de error, el sumando ε_t .

Partiendo de la expresión general anterior del proceso autorregresivo sabemos [Ref.6,7,8,10,15, etc] que su densidad espectral teórica viene dada por la expresión

$$|H(\omega)|^2 = \frac{b}{|1 - a_1 e^{-i\omega} - a_2 e^{-2i\omega} - a_3 e^{-3i\omega} - \dots - a_k e^{-ik\omega}|^2}$$

Por lo tanto, obtener el estimador paramétrico de la densidad espectral se reduce a obtener los parámetros a_i de la autorregresión anterior. Esta expresión puede deducirse, como sabemos si a la expresión general de la serie

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_3 x_{t-3} + \dots + a_k x_{t-k} + \varepsilon_t$$

aplicamos la transformada Z o el operador de retardo B (ver, p. ej. [Ref.10,15]) dado por la expresión

$$\begin{aligned} x_{t-1} &= B x_t \\ x_{t-2} &= B^2 x_t \\ x_{t-3} &= B^3 x_t \\ &\dots\dots\dots \\ x_{t-k} &= B^k x_t \end{aligned}$$

Se obtiene así la expresión de la cota x_t en la forma

$$x_t [1 - a_1 B - a_2 B^2 - a_3 B^3 - \dots - a_k B^k] = \varepsilon_t$$

es decir,

$$x_t = \frac{1}{1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_k B^k} \varepsilon_t$$

Y si en esta expresión se sustituye el operador de retardo B por su expresión compleja

$$B = e^{-i\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-i\omega} - a_2 e^{-2i\omega} - a_3 e^{-3i\omega} - \dots - a_k e^{-ik\omega}} \varepsilon_t$$

se obtiene la expresión buscada

De esta expresión suele dibujarse el módulo, dado por

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{|1 - a_1 e^{-i\omega} - \dots - a_k e^{-ik\omega}|^2}$$

El módulo del denominador se obtiene multiplicándolo por su conjugado, es decir:

$$(1 - a_1 e^{-i\omega} - \dots - a_k e^{-ik\omega})(1 - a_1 e^{i\omega} - \dots - a_k e^{ik\omega})$$

3. CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES a_i DE AUTOCORRELACIÓN. ECUACIONES DE YULE- WALKER

Recordemos que se define la autocorrelación $r(j)$ de la serie x_i de cotas del perfil por medio de la expresión

$$r_x(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n x_{n+j}$$

donde "j" es el desfase dentro de la serie. Si la serie está formada por la señal buscada "y_j" y el ruido ε_j , es decir:

$$x_i = y_i + \varepsilon_i$$

se demuestra [Ref.6,8] que para un número de datos N suficientemente alto, y siendo nula la correlación de la señal y el ruido, la autocorrelación de la serie $r_x(j)$ tiende a la autocorrelación de la señal verdadera buscada $r_y(j)$

Partiendo otra vez de la expresión general del proceso autorregresivo

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_3 x_{t-3} + \dots + a_k x_{t-k} + \varepsilon_t$$

y multiplicando ambos miembros por x_{t-j} se obtiene

$$x_t x_{t-j} = a_1 x_{t-1} x_{t-j} + a_2 x_{t-2} x_{t-j} + a_3 x_{t-3} x_{t-j} \dots + a_k x_{t-k} x_{t-j} + \varepsilon_k x_{t-j}$$

Tomando esperanzas en ambos miembros y teniendo en cuenta que desaparece el último sumando por ser nula la correlación correspondiente, se obtiene:

$$r_x(j) = a_1 r_x(j-1) + a_2 r_x(j-2) + a_3 r_x(j-3) \dots + a_k r_x(j-k)$$

Desarrollando esta ecuación y en la hipótesis de que la autocorrelación de un desfase negativo es igual a la del mismo desfase positivo, se obtiene el sistema de ecuaciones denominadas de Yule-Walker:

$$r(1) = a_1 r(0) + a_2 r(1) + a_3 r(2) \dots + a_k r(k-1)$$

$$r(2) = a_1 r(1) + a_2 r(0) + a_3 r(1) \dots + a_k r(k-2)$$

$$r(3) = a_1 r(2) + a_2 r(1) + a_3 r(0) \dots + a_k r(k-3)$$

$$r(k) = a_1 r(k-1) + a_2 r(k-2) + a_3 r(k-3) \dots + a_k r(0)$$

que en forma matricial suelen escribirse en la forma:

$$r = R a$$

donde la matriz R es la matriz de autocorrelaciones o covarianzas. Esta matriz es cuadrada, simétrica y toéplitz (es decir, que los elementos de cada una de sus diagonales son idénticos), y permite algoritmos de inversión específicos y rápidos, como el de Levinson-Durbin. De aquí se obtiene inmediatamente el vector "a" de coeficientes buscados:

$$a = R^{-1} r$$

Obsérvese que, para que las correlaciones con desfase positivo sean iguales a las de desfase negativo, se está admitiendo implícitamente la hipótesis de que el proceso aleatorio es estacionario, es decir, que su media es constante e igual sea cual sea el subconjunto de cotas que consideremos dentro del conjunto total.

4. OTRO MÉTODO DE ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS

Al mismo resultado se llega de forma directa, expresando explícitamente las relaciones de autorregresión. Si la sucesión de cotas tiene N elementos y una cota determinada se hace depender de "k" cotas anteriores, el primer valor obtenido será el de la cota k+1 y resultará ser:

$$x_{k+1} = a_1 x_k + a_2 x_{k-1} + a_3 x_{k-2} \dots + a_k x_1 + \varepsilon_{k+1}$$

Siguiendo hasta el final del fichero de perfil longitudinal hasta llegar a la última cota, x_N , se obtienen las expresiones

$$x_{k+2} = a_1 x_{k+1} + a_2 x_k + a_3 x_{k-1} \dots + a_k x_2 + \varepsilon_{k+2}$$

$$x_{k+3} = a_1 x_{k+2} + a_2 x_{k+1} + a_3 x_k \dots + a_k x_3 + \varepsilon_{k+3}$$

$$x_{k+4} = a_1 x_{k+3} + a_2 x_{k+2} + a_3 x_{k+1} \dots + a_k x_4 + \varepsilon_{k+4}$$

y así sucesivamente para la última cota x_N

$$x_N = a_1 x_{N-1} + a_2 x_{N-2} + a_3 x_{N-3} \dots + a_k x_{N-k} + \varepsilon_N$$

Estas ecuaciones pueden ponerse en forma matricial. Se definen los vectores "x" y "a" y la matriz "X" como sigue:

$$x' = \{x_{k+1} \ x_{k+2} \ x_{k+3} \ x_{k+4} \ \dots \ x_N\}$$

$$a' = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ \dots \ a_k\}$$

$$\varepsilon' = \{\varepsilon_{k+1} \ \varepsilon_{k+2} \ \varepsilon_{k+3} \ \varepsilon_{k+4} \ \dots \ \varepsilon_N\}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_k & x_{k-1} & x_{k-2} & \dots & x_1 \\ x_{k+1} & x_k & x_{k-1} & \dots & x_2 \\ x_{k+2} & x_{k+1} & x_k & \dots & x_3 \\ x_{k+4} & x_{k+3} & x_{k+2} & \dots & x_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & x_{N-3} & \dots & x_{N-k} \end{pmatrix}$$

La ecuación toma la forma matricial:

$$x = X a + \varepsilon$$

donde las dimensiones de los vectores y matrices son:

$$x \text{ (N-k, 1)}, X \text{ (N-k, k)}, a \text{ (k, 1)}, \varepsilon \text{ (N-k, 1)}$$

Se trata de calcular los parámetros a_i de forma que el vector de error ε sea mínimo. Una de las formas más intuitivas es la presentada por Kay [Ref.7], cuya analogía geométrica es hacer que el vector ε sea normal al hiperplano dado por la matriz "X" de datos. Dos variables aleatorias de media cero se denominan ortogonales si su correlación es nula, y esta propiedad, llamada Principio de Ortogonalidad de la Estimación Lineal de Media Cuadrática Mínima, tiene una de sus mayores aplicaciones precisamente en este caso. Llamando ε' al vector traspuesto de ε , la expresión analítica de esta condición geométrica se escribe en la forma:

$$X' \cdot \varepsilon = 0$$

cuyas dimensiones son

$$(k, N-k) \cdot (N-k, 1) = (k, 1)$$

El vector ε de error se obtiene de la ecuación de autoregresión:

$$\varepsilon = x - X a$$

y la condición de normalidad resulta:

$$X' (x - X a) = 0$$

Desarrollando la expresión se obtiene:

$$X'x = X'X a$$

donde el producto $X'x$ es un vector (k,1), y la matriz $X'X$ es una matriz cuadrada de orden k.

El vector de parámetros se obtiene por tanto premultiplicando ambos miembros de la igualdad por la inversa de la matriz $X'X$, y resulta

$$a = (X'X)^{-1} \cdot X'x$$

5. CÁLCULO DE LA MATRIZ $X'X$

La matriz $X'X$ es precisamente la matriz de autocorrelaciones (o autocovarianzas, si hemos reducido el perfil a media cero) que hemos visto más arriba. Para aclarar ideas tomemos el caso de que el fichero de cotas del perfil tenga 11 elementos, y se desee ajustar un modelo de 3 parámetros. Las ecuaciones con las que se ajustarán los parámetros son las siguientes:

$$\begin{aligned} x_4 &= a_1 x_3 + a_2 x_2 + a_3 x_1 \\ x_5 &= a_1 x_4 + a_2 x_3 + a_3 x_2 \\ x_6 &= a_1 x_5 + a_2 x_4 + a_3 x_3 \\ x_7 &= a_1 x_6 + a_2 x_5 + a_3 x_4 \\ x_8 &= a_1 x_7 + a_2 x_6 + a_3 x_5 \\ x_9 &= a_1 x_8 + a_2 x_7 + a_3 x_6 \\ x_{10} &= a_1 x_9 + a_2 x_8 + a_3 x_7 \\ x_{11} &= a_1 x_{10} + a_2 x_9 + a_3 x_8 \end{aligned}$$

Como se ve, es un sistema de 8 ecuaciones con 3 incógnitas. La solución debe ser por tanto similar a la de un problema de regresión lineal, es decir, que se obtendrá al minimizar un determinado parámetro, que en este caso es el citado vector error. Por lo tanto la matriz X tiene la forma

$$X = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \\ x_5 & x_4 & x_3 \\ x_6 & x_5 & x_4 \\ x_7 & x_6 & x_5 \\ x_8 & x_7 & x_6 \\ x_9 & x_8 & x_7 \\ x_{10} & x_9 & x_8 \end{bmatrix}$$

Y la matriz traspuesta X' será

$$X' = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{bmatrix}$$

La matriz cuadrada $X'X$ será por tanto

$$X'X = \begin{Bmatrix} \sum_{i=3}^{i=10} x_i^2 & \sum_{i=3}^{i=10} x_i x_{i-1} & \sum_{i=3}^{i=10} x_i x_{i-2} \\ \sum_{i=3}^{i=10} x_{i-1} x_i & \sum_{i=3}^{i=10} x_{i-1}^2 & \sum_{i=3}^{i=10} x_{i-1} x_{i-2} \\ \sum_{i=3}^{i=10} x_{i-2} x_i & \sum_{i=3}^{i=10} x_{i-2} x_{i-1} & \sum_{i=3}^{i=10} x_{i-2}^2 \end{Bmatrix}$$

Se observa que esta matriz cuadrada es simétrica, toeplitz, y es en definitiva la matriz de autocorrelaciones (covarianzas si las medias son cero en cada caso) del vector $\{x_k, \dots, x_{N-1}\}$. En general, la expresión de esta matriz es por tanto la siguiente:

$$X'X = \left\{ \begin{array}{cccc} \sum_{i=k}^{i=N-1} x_i^2 & \sum_{i=k}^{i=N-1} x_i x_{i-1} & \dots & \sum_{i=k}^{i=N-1} x_i x_{i-k+1} \\ & \sum_{i=k}^{i=N-1} x_i^2 & & \sum_{i=k}^{i=N-1} x_i x_{i-k+1} \\ & & \dots & \dots \\ \text{SIMETRICA} & & & \sum_{i=k}^{i=N-1} x_{i-k+1}^2 \end{array} \right\}$$

En los casos que estamos estudiando, de análisis de perfiles longitudinales de carreteras o de vía férrea, al ser $X'X$ una matriz real, simétrica y toeplitz, su cálculo y el cálculo de su inversa se simplifican considerablemente, y los algoritmos necesarios para su generación son, como puede verse, sumamente sencillos.

El cálculo del vector $X'x$ en el mismo ejemplo anterior será

$$X'X = \begin{Bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{Bmatrix}$$

es decir .

$$X'X = \begin{Bmatrix} \sum_{i=3}^{10} x_i x_{i-1} \\ \sum_{i=3}^{10} x_{i-1} x_i \\ \sum_{i=3}^{10} x_{i-2} x_i \end{Bmatrix}$$

Y como vemos se obtienen las mismas ecuaciones de Yule-Walker obtenidas en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} r(1) &= a_1 r(0) + a_2 r(1) + a_3 r(2) \dots\dots\dots + a_k r(k-1) \\ r(2) &= a_1 r(1) + a_2 r(0) + a_3 r(1) \dots\dots\dots + a_k r(k-2) \\ r(3) &= a_1 r(2) + a_2 r(1) + a_3 r(0) \dots\dots\dots + a_k r(k-3) \\ \dots\dots\dots \\ r(k) &= a_1 r(k-1) + a_2 r(k-2) + a_3 r(k-3) \dots\dots\dots + a_k r(0) \end{aligned}$$

6. SOLUCIÓN DEL SISTEMA YULE-WALKER. ALGORITMO DE LEVINSON-DURBIN

La solución del sistema para obtener el vector “a” de coeficientes de regresión es sencilla, y se reduce a obtener la matriz inversa de la matriz “R” de autocorrelación, y a su premultiplicación por el vector “r”, que es la misma primera fila o columna de “R” desplazada un elemento:

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}$$

La inversión de la matriz es inmediata en lenguajes como MATLAB, con la instrucción "inv(R)". Sin embargo, si el lector es aficionado, como el autor, a escribirse sus propias rutinas para poder saber en todo momento y con todo detalle cómo funciona el proceso de cálculo, verá que es absurdo e ineficiente este método de solución. En efecto, para invertir la matriz "R" con una instrucción como la anterior es necesario guardarla entera en máquina. Y dado que la matriz es toeplitz, toda la matriz puede obtenerse si se conoce esta primera fila. Teniendo en cuenta los avances enormes que las estructuras y los elementos finitos han creado en las rutinas de inversión de matrices simétricas, para las que tenemos ya además muy sofisticadas técnicas de almacenamiento en memoria, sería ló-

gico pensar que hubiera algoritmos sencillos similares para estas matrices toeplitz. Efectivamente los hay, como los métodos de Robinson y Rybicki, que puede verse en [Ref.22]. Sin embargo el algoritmo más sencillo es el original de Levinson y Durbin, que resuelve el sistema de ecuaciones a partir sólo de la primera fila de la matriz "R" y un elemento más del vector de autocorrelaciones (para obtener así el vector "r"). Este algoritmo es sumamente sencillo y se programa en menos de 10 líneas. Puede verse, por ejemplo, en [Ref.7], y se resume a continuación.

ALGORITMO DE LEVINSON-DURBIN Kay.pag 171

```
for (i=0; i<numero_parametros; i++) {
    vector_LD[i] = 0.0;
    A_coef_LD[i] = 0.0;
}
A_coef_LD[0] = - m_cov[0][1] / m_cov[0][0];
ro = (1.0 - fabs(A_coef_LD[0]) * fabs(A_coef_LD[0]))
    * m_cov[0][0];
for (k=1; k<numero_parametros; k++) {
    dum = 0.0;
    for (l=1; l<=k-1; l++) dum = dum + vector_LD[l] *
        m_cov[0][k-l];
    A_coef_LD[k] = - ( m_cov[0][k] + dum ) / ro;
    for (i=0; i<=k-1; i++) A_coef_LD[i] = vector_LD[i] +
        A_coef_LD[k] * vector[k-i];
    ro = (1.0 - fabs(A_coef_LD[k]) * fabs(A_coef_LD[k]))
        * ro;
    for (i=0; i<numero_parametros; i++) vector_LD[i] =
        A_coef_LD[i];
}
FIN DEL ALGORITMO DE LEVINSON-DURBIN
```

7. CÁLCULO DEL MÓDULO DEL DENOMINADOR

Una vez conocidos los coeficientes de autorregresión a_i ya puede dibujarse la función de frecuencias. El denominador tiene la forma:

$$\frac{(1 - a_1 e^{-j\omega} - \dots - a_k e^{-jk\omega})}{(1 - a_1 e^{j\omega} - \dots - a_k e^{jk\omega})}$$

Es relativamente sencillo obtener la relación de recurrencia para el caso de varios parámetros. Pa-

ra obtenerla, veamos los primeros casos, correspondientes a uno y dos parámetros. Para el caso de un parámetro, la función es de la forma:

$$(1 - a_1 e^{-j\omega})(1 - a_1 e^{j\omega})$$

Aplicando las conocidas relaciones de Moivre:

$$e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$$

$$e^{-j\omega} = \cos \omega - j \sin \omega$$

se obtiene por simple multiplicación

$$e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$$

$$e^{-j\omega} = \cos \omega - j \sin \omega$$

Para el caso de dos parámetros se obtiene igualmente:

$$\begin{aligned} & (1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-j2\omega})(1 - a_1 e^{j\omega} - a_2 e^{j2\omega}) = \\ & = 1 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 \cos \omega - 2a_2 \cos 2\omega + \\ & + 2a_1 a_2 \cos \omega \cos 2\omega + 2a_1 a_2 \sin \omega \sin 2\omega \end{aligned}$$

La relación general de recurrencia es por lo tanto:

$$\begin{aligned} & 1 - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{k-1} a_i \cos i\omega + \\ & 2 \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \sum_{j=i+1}^{k-1} a_j a_{j+1} \cos j\omega \cos (j+1)\omega \right\} + \\ & 2 \sum_{i=0}^{j+1} \left\{ \sum_{j=i+1}^{k-1} a_j a_{j+1} \sin j\omega \sin (j+1)\omega \right\} \end{aligned}$$

con la que se obtiene la expresión del módulo del denominador. Esta expresión nos permite ya dibujar la aproximación a la densidad espectral de la serie temporal de cotas del perfil de la carretera.

Esta ecuación de recurrencia es complicada, como puede ver el lector, aunque también sencilla

de programar. Se ha obtenido utilizando un programa de matemática simbólica, en este caso particular el Maple V. Una relación de recurrencia más sencilla es la dada por F. Melis [Ref. 10, 4.2], que utiliza sólo las funciones coseno, y viene dada por la expresión siguiente:

El módulo $|Q(\omega)|^2$ del producto de dos polinomios conjugados de la forma anterior es:

$$|Q(\omega)|^2 = \left(\sum_{i=0}^{i=k} a_i e^{-i\omega} \right) \left(\sum_{i=0}^{i=k} a_i e^{i\omega} \right) = \sum_{i=0}^{i=k} b_i \cos i\omega$$

donde los coeficientes buscados b_i vienen a su vez dados por las expresiones:

$$b_0 = \sum_{i=0}^{i=k} a_i^2 \quad b_r = 2 \sum_{i=0}^{i=k-r} a_i a_{i+r} \quad b_k = 2a_0 a_k$$

8. MÓDULO DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL

De lo anterior se deduce que el módulo de la función buscada de densidad espectral es el siguiente:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{i=k} b_i \cos i\omega}$$

Esta expresión está deducida, como vemos, para operar con números reales, y se programa sin ningún problema en C. Pero puede calcularse directamente y de una forma mucho más sencilla si se dispone de un programa como MATLAB que opere directamente con complejos. En este caso la obtención es inmediata, ya que se reduce a calcular la expresión anterior:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{|1 - a e^{-i\omega} - \dots - a_k e^{-ik\omega}|^2}$$

a falta de la constante del numerador. La rutina de obtención de la densidad espectral a partir de los coeficientes "a" de autorregresión de esta forma

puede verse en [Ref.26] y en lenguaje MATLAB es tan sencilla como sigue:

```
% CALCULO DE LA DENSIDAD ESPECTRAL EN
MATLAB *****
% Creamos el vector de abscisas. N_inter es el
número de intervalos
f=linspace(0,.5,N_inter);
% a es el vector de coeficientes de autorregresión
% ip es el número de parámetros
'Calculando la densidad espectral S_xx';
for ii=1:N_inter,
    s=0;
    for jj=1:ip,
        s=s+a(jj).'*exp(-i*2*pi*f(ii)*jj);
    end
    S_xx(ii)=1/(abs(1+s)^2);
end
```

9. OTROS MÉTODOS PARAMÉTRICOS DE ESTIMACIÓN

La idea de los métodos paramétricos es sumamente feraz. El hecho de que en la sucesión de los coeficientes de autocorrelación esté escondida la distribución de densidades espectrales de la serie analizada permite obtenerla por diversos métodos, además del clásico autorregresivo que acabamos de ver. Entre estos métodos se encuentran en la literatura el método de Prony, el método de los autovalores de la matriz de autocovarianzas, el método de Clasificación de Señales Múltiples (MUSIC), los métodos ESPRIT, etc, y detalles de ellos e incluso sus programaciones en MATLAB pueden verse, p.ej. en [Ref.27].

10. APLICACIONES PRÁCTICAS Y EJEMPLO

Todas estas técnicas de análisis, por potentes y atractivas que sean, no deben hacernos olvidar jamás lo que está el Ingeniero buscando realmente, en primer lugar, y en segundo las hipótesis subyacentes en cada método. Si alguna de las hipótesis básicas del método no es aplicable a la realidad de nuestro problema, las conclusiones del análisis no serán válidas.

Al analizar por estos métodos un tramo de autovía o de vía férrea, el ingeniero busca la identificación de defectos periódicos, debidos a la cons-

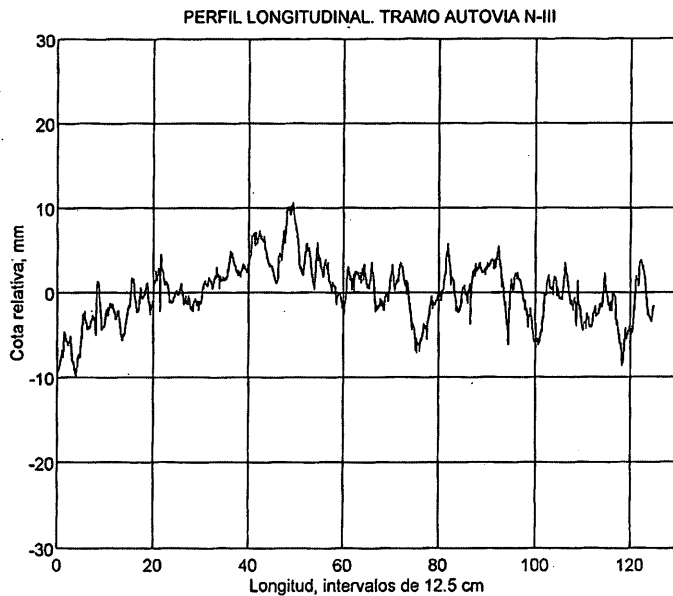


Figura 1. Perfil longitudinal estudiado. Observese que, aunque llevado a media cero por regresión lineal, existen aun ondas largas. por ello es espectro es inclinado.

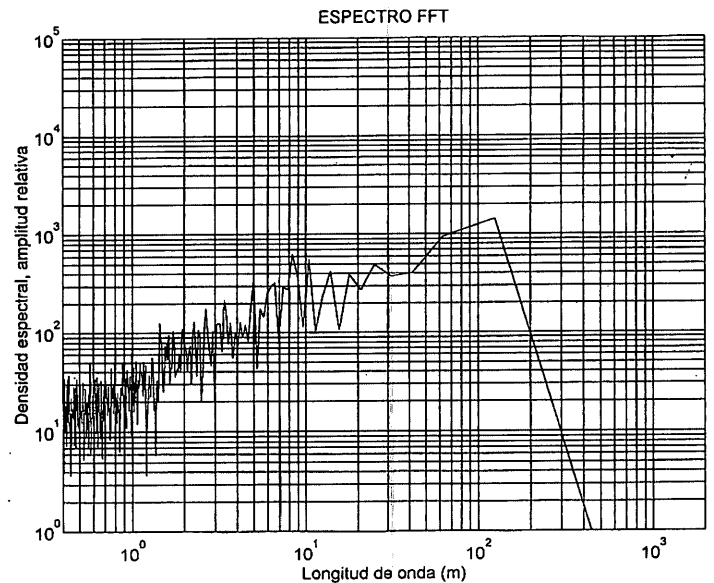


Figura 2. Periodograma. Observese los picos en 1.5 m, 2.6m, 3.4 m, 5 m y 8.4 m.

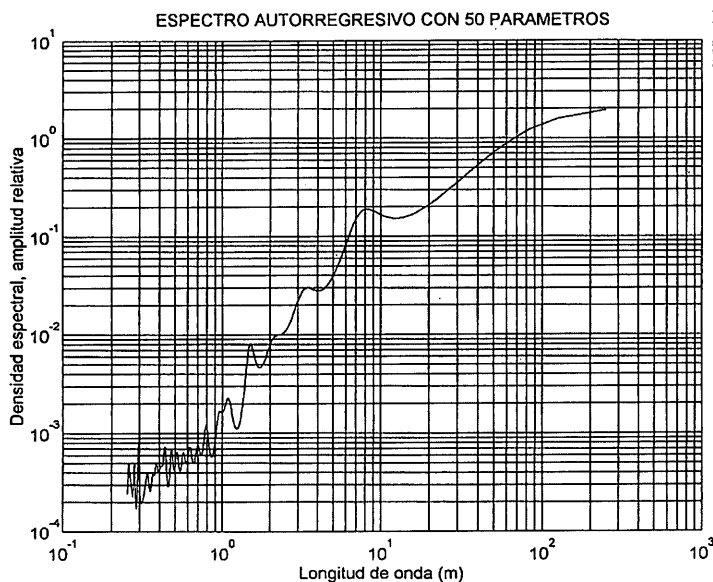


Figura 3. Espectro paramétrico. 50 parámetros. Observese que la vertical es distinta de la fig. 1. ello se debe a tomar 1 en en el numerador de la densidad espectral.

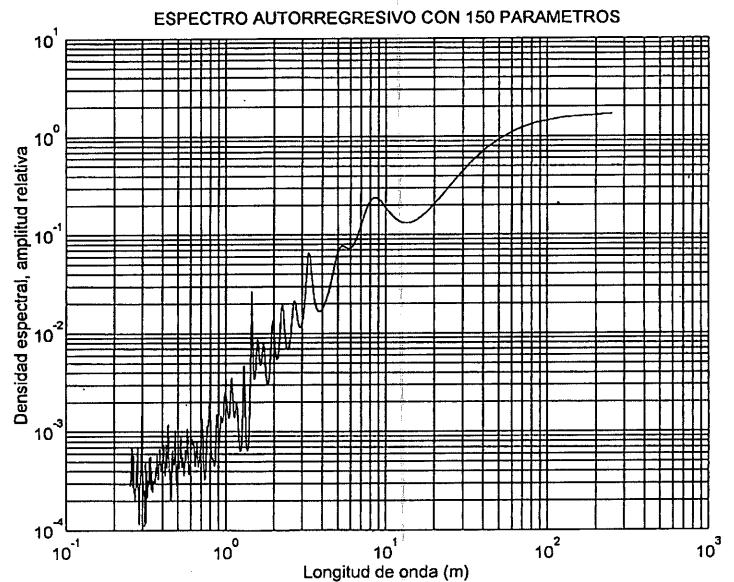


Figura 4. Espectro paramétrico. 150 parámetros.

trucción o al uso, que permitan o bien mejorar las técnicas de construcción o bien optimizar las técnicas de conservación de una forma científica. Si se utiliza este método paramétrico autorregresivo, las hipótesis básicas implícitas en el mismo son las siguientes:

1.- El proceso aleatorio (el perfil de la carretera o el del rail) está formado por una señal verdadera y un ruido. El problema consiste en identificar la señal o señales periódicas componentes.

2.- El proceso, es decir, la señal, tiene media cero. Esto coincide exactamente con nuestras ne-

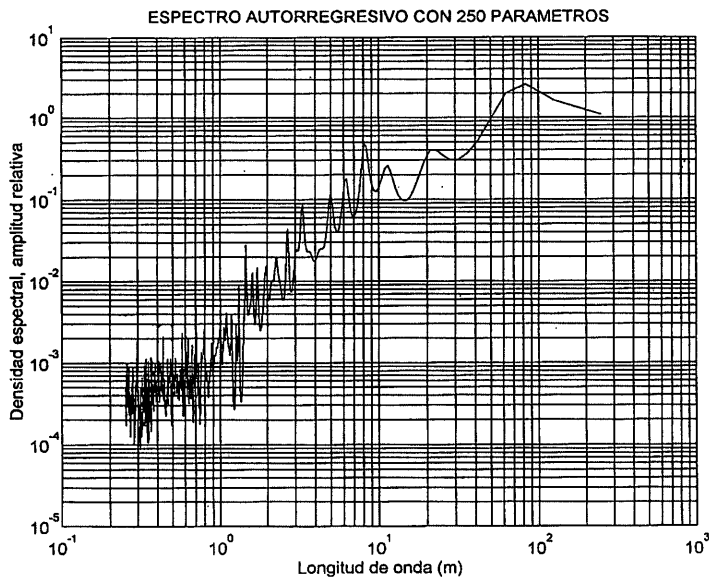


Figura 5. Espectro paramétrico. 250 parámetros. observese los picos dados por el periodograma en 1.5 m, 2.6m, 3.4 m, 5 m y 8.4 m.

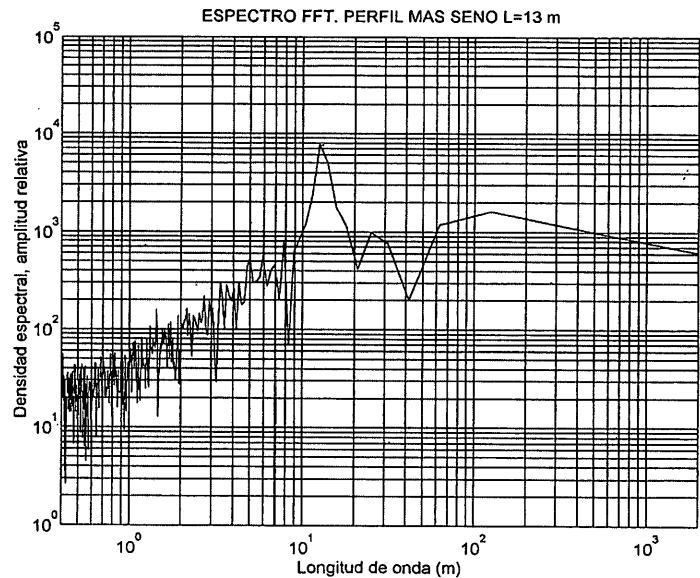


Figura 6. Periodograma del perfil mas un seno de $L=13$ m

cesidades al analizar la regularidad superficial o las texturas de un pavimento o la regularidad de un carril de FFCC. En caso de la regularidad superficial o el IRI de un pavimento, las irregularidades son producidas únicamente por las pequeñas longitudes de onda, sin que afecten al IRI las longitudes de onda grandes debidas al trazado o a la pendiente de la carretera. En el caso de tramos rectos en alzado el análisis de las irregularidades puede hacerse, por tanto, eliminando la pendiente del perfil (es decir, poniéndolo horizontal) y analizando sólo las diferencias con la recta teórica, ajustada por cualquier método numérico como una simple recta de regresión. En el caso de los acuerdos parabólicos la curva de regresión será la parábola de ajuste. El lector puede comprobar que el IRI de los perfiles original y el del así modificado es idéntico.

3.- El proceso es estacionario, es decir, la media de la señal es siempre la misma, independientemente del tramo analizado. Puede verse que se ha supuesto que la matriz de autocorrelaciones es simétrica, de forma que las correlaciones de desfase positivo son idénticas a las correspondientes de desfase negativo.

4.- El proceso es autorregresivo puro, es decir, las irregularidades "futuras" del perfil o del carril pueden deducirse de las irregularidades "pasadas". (Tal vez un método más perfecto sería utili-

zar un modelo ARMA, no descrito en el presente artículo, y en el que los datos futuros se realimentan también de los recién estimados). Observe el lector que ello nos lleva a aplicar estos métodos a tramos cortos de carretera o carril, ya que en tramos muy largos ya aparecerían defectos producidos por otras causas diferentes a las que se intenta analizar. Esto quiere decir que si se intenta estudiar defectos del proceso de extendido de un pavimento, la señal digital analizada no debe recoger defectos debidos, por ejemplo, a las pendientes longitudinales. Ya habíamos visto en estudios anteriores cómo estos efectos de la pendiente llevaban a la inclinación del periodograma y su falseamiento en las longitudes de onda largas. Decidir la longitud de un tramo de análisis para obtener resultados significativos es una ardua cuestión, pero parece lógico pensar que para una extendidora con piquetes del palpador cada 10 m, una longitud aceptable pueden ser 50 a 100 metros. Para extendedoras guiadas por métodos más modernos esta longitud podría incluso reducirse.

Como ejemplo se presenta el periodograma de un tramo de la Autovía N-III, tramo perteneciente a una medida realizada personalmente por el autor con el equipo Video-Láser de AEPO en Octubre de 1992. El tramo analizado se muestreó a intervalos de 12.5 cm y tiene una longitud de 125 metros, es decir, es un fichero de 1000 datos.

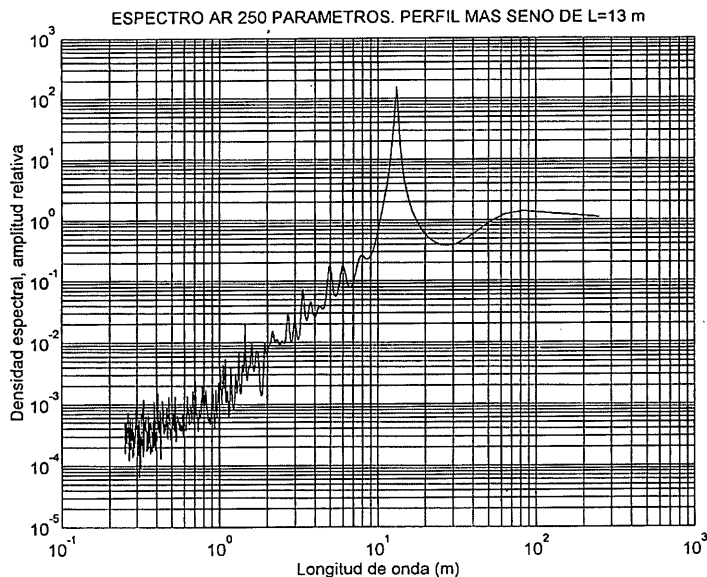


Figura 7. Espectro AR del perfil mas u seno de $L=13$ m

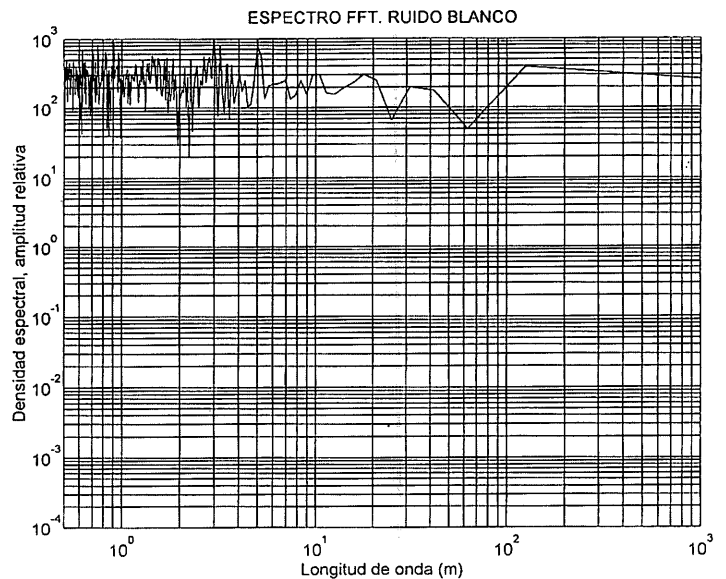
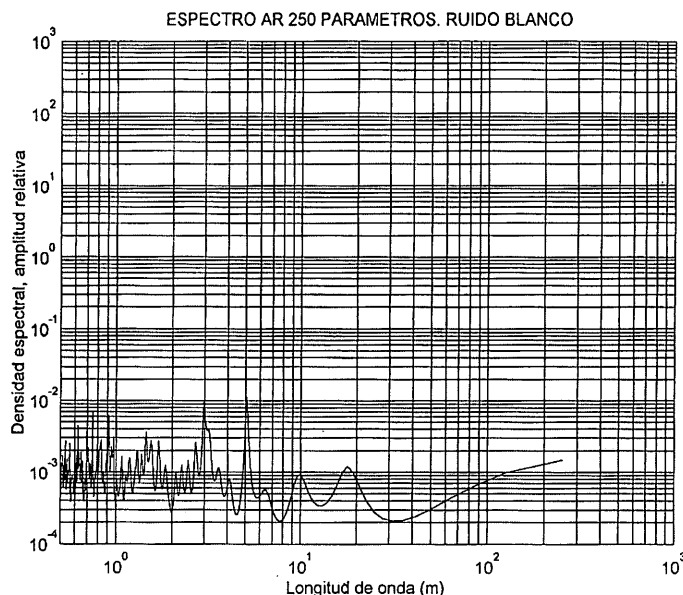


Figura 8. Periodograma de un ruido blanco. Espectro horizontal.

La figura 1 representa el perfil longitudinal llevado a media cero por ajuste con la recta de regresión lineal con la instrucción "detrend" de MATLAB. El primer hectómetro tiene un IRI de 2.73, y el segundo (truncado al primer cuarto de su longitud) un IRI de 2.87. Estos IRI tan malos deben tener una interpretación clara en los análisis espec-

Figura 9. Espectro AR de un ruido blanco. Espectro horizontal.



trales, y así ocurre. En la figura 2 se presenta el periodograma, calculado con la FFT, y en él pueden verse amplitudes relativas grandes o picos relativos en las longitudes de onda de 1.5 metros, 2.6m, 3.4 m, 5 m y 8.4 m, en la zona de longitudes de onda que más influyen sobre el IRI (ver [Ref.16]).

La figura 2 representa el espectro AR con 50 parámetros. Obsérvese el mismo pico en 1.5 m y apuntes de los de 2.6 y 3.4 m. Se pierde el pico de 5 m, pero se acusa el de 8.4 m. La figura 4 es la misma curva correspondiente al espectro AR de 150 parámetros, y la figura 5 corresponde a 250 parámetros. En esta última pueden verse los picos de 1.5 m, 2.6m, 3.4 m, 5 m y 8.4 m que identificó el periodograma.

Finalmente, y para comprobar la bondad de los cálculos, se dibuja el análisis espectral del mismo tramo de carretera anterior pero sumándole una senoide de media cero y 13.0 m de longitud de onda. Para acusarla más se ha puesto una amplitud de 20 mm, grande en comparación con la variación de cotas del perfil. En la figura 6 se dibuja el periodograma obtenido con la FFT, y en la figura 7 el espectro paramétrico correspondiente a 250 parámetros. Puede verse cómo éste último método refleja el pico con mayor limpieza, ya que no tiene los fenómenos de leakage del periodograma.

11. CONCLUSIONES

Los defectos del periodograma como método de análisis de pavimentos o carriles de FFCC son muchos y serios, indican algunos autores, tanto que lo desaconsejan para su utilización práctica. Para reducir estos problemas se recomiendan métodos ya citados como los de Bartlett o de Welch, basados en la aplicación de ventanas que reducen la varianza, el aliasing y el leakage del periodograma. Como podrá ver el lector en la literatura que se incluye en la bibliografía, se demuestra que los métodos paramétricos no sufren de estos problemas, o al menos no con la seriedad e importancia del periodograma, por lo que los métodos paramétricos podrían ser el método válido para la estimación de la densidad espectral de un pavimento. Sin embargo, como puede verse también en los resultados aquí incluídos, los resultados del periodograma y de los métodos paramétricos son muy similares, por no decir casi idénticos. Puede dudarse por tanto de los ataques al periodograma como herramienta de análisis, y de la necesidad real de modificar el periodograma jugando con los datos que tanto esfuerzo y dinero nos ha costado obtener, modificándolos con la repetida aplicación de filtros y ventanas. El lector, a cuya disposición se encuentran los programas que se han resumido en este artículo, deberá llegar a sus propias conclusiones.

Como resumen de todo lo anterior, parece que tanto la estimación paramétrica como el periodograma son unas excelentes herramientas de análisis de las irregularidades de un pavimento de autovía o de una vía de FFCC o de METRO. Los resultados obtenidos por ambos métodos son casi idénticos, para los casos analizados por el autor. Las conclusiones son:

1.- La señal medida debe llevarse a media cero. Esto debe hacerse analizando los datos, ajustando las rectas o parábolas teóricas del trazado y obteniendo las diferencias del perfil real a este perfil teórico. El perfil diferencia tiene, como puede comprobarse calculándolo, el mismo IRI que el original.

2.- Con esta señal de media cero, el espectro es horizontal. Esto puede comprobarse fácilmente dibujando los espectros de un ruido blanco por ambos métodos, FFT y AR. En ambos casos los espectros son horizontales, y acusan los picos correspondientes si se les superponen sinusoides de diversas amplitudes y longitudes de onda.

3.- Si el espectro de un perfil de carretera o rail de FFCC tiene la inclinación que suele darse, el perfil no se ha llevado bien a media cero, y la inclinación del espectro corresponde a la pendiente de la carretera, es decir, a ondas largas que no han sido eliminadas. No es fácil llevar el perfil exactamente a media cero, y de aquí que en la literatura técnica todos los espectros publicados sean inclinados.

4.- Esta inclinación por tanto no tiene que ver con la irregularidad del perfil, sino con la bondad del método utilizado para quitar la tendencia de la señal. Entiende el autor que la Norma ISO [Ref.25] que pretende identificar la calidad de un pavimento por la inclinación de su espectro es errónea en su principio.

5.- Con el espectro horizontal, la bondad del pavimento o la calidad del carril vendrá dada por la menor ordenada del espectro. Esto puede comprobarse dibujando los espectros de ruidos blancos de distintas amplitudes. Las rectas inclinadas de la Norma ISO [Ref.25] deben ser horizontales. De esta forma sí puede compararse la regularidad superficial de distintos pavimentos.

6.- En este artículo no se ha hablado del numerador de la densidad espectral, es decir, de su factor de escala. Este numerador puede calcularse con sencillez, lo que será objeto de otro artículo, pero no es necesario hacerlo (en este artículo hemos tomado valor 1) si sólo se desea comparar las regularidades de distintos pavimentos o identificar defectos en determinadas longitudes de onda de un perfil.

7.- Tampoco se ha hablado en este artículo de la elección del número de parámetros, es decir, del orden de la autorregresión. Se hablará de ello en futuros trabajos. El lector podrá ver en la literatura que existen multitud de criterios para esta selección, entre los cuales los más conocidos son los de Akaike. Para los trabajos de este artículo se ha tomado un orden igual a la cuarta parte del número de puntos de la señal analizada.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] "TRATAMIENTO NUMERICO DE LA SEÑAL", M.Bellanger, Masson, 1991
- [2] "PROBABILITY, STATISTICS AND DECISION FOR CIVIL ENGINEERS", J.Benjamin, A.Cornell, McGraw-Hill, 1970
- [3] "APPLIED NUMERICAL METHODS" CARNAHAN, LUTHER y WILKES, WILEY 1969. Versión

Española Manuel J. Melis y E. de Miguel, Ed. Rueda 1979.

-[4] "THE ANALYSIS OF TIME SERIES: THEORY AND PRACTICE", C. Chatfield. Chapman Hall 1978

-[5] "TEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y ANÁLISIS ESPECTRAL", J. Egozcue, ETS Caminos Barcelona, MOPU, 1986

-[6] "DIGITAL SIGNAL PROCESSING, a Practical Approach".- E. Ifeachor, B. Jervis, Addison-Wesley 1993

-[7] "MODERN SPECTRAL ESTIMATION", S. Kay, Prentice Hall, 1988

-[8] "DIGITAL SIGNAL PROCESSING".- J. Proakis, D. Manolakis, Macmillan 1992

-[9] "SIGNAUX ET SYSTEMES LINEAIRES" Y. THOMAS, Masson 1993.

-[10] "APUNTES SOBRE SERIES TEMPORALES", Francisco Melis. I.N.E 1986. Documento de trabajo

-[11] "LA ESTIMACION DEL RITMO DE VARIACION EN SERIES ECONÓMICAS", Francisco Melis, "Estadística Española", Vol.33, Nº 126, 1991

-[12] "CONSTRUCCION DE INDICADORES CICLICOS MEDIANTE ECUACIONES EN DIFERENCIAS", Francisco Melis, "Estadística Española", Nº 98, Enero-Marzo 1983

-[13] "SOBRE LA HIPOTESIS DE COMPONENTES Y LA EXTRACCION DE LA SEÑAL DE COYUNTURA SIN PREVIA DESESTACIONALIZACION", Francisco Melis, "Revista Española de Economía", Vol.6, Nº 1 y 2, 1989

-[14] "AGREGACION TEMPORAL Y SOLAPAMIENTO O 'ALIASING'" Francisco Melis. "Estadística Española", Nº 130, 1992

-[15] "ROUTINAS DE FILTRO SENO AR DE BUTTERWORTH PARA ANÁLISIS DE ESPECTROS DE

PAVIMENTOS DE AUTOVIAS". Manuel J. Melis, ROP, Dic 1994

-[16] "TEXTURAS Y REGULARIDAD DE UN PAVIMENTO. CÁLCULO DE LAS LONGITUDES DE ONDA MÁS IMPORTANTES EN LA REGULARIDAD SUPERFICIAL DE UNA CARRETERA". Manuel J. Melis. RUTAS, Nº 34. Enero 1993.

-[17] "PROBABILITIES, RANDOM VARIABLES AND RANDOM PROCESSES", M.O'Flynn, Wiley, 1990

-[18] "APPLIED TIME SERIES ANALYSIS", R. OTNES y L. ENOCHSON. Wiley, 1978.

-[19] "SISTEMAS DIGITALES Y ANALÓGICOS. TRANSFORMADAS DE FOURIER Y ESTIMACION ESPECTRAL", Athanasios Papoulis, Boixareu Ed., 1978

-[20] "ESTADÍSTICA, MODELOS Y MÉTODOS, Tomo II, MODELOS LINEALES Y SERIES TEMPORALES", Daniel Peña, Alianza Universidad, 1989

-[21] "SPECTRAL ANALYSIS FOR PHYSICAL APPLICATIONS", D. Percival, A. Walden, Cambridge, 1993

-[22] "NUMERICAL RECIPES IN C", Cambridge Univ. Press, William H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky y W.T. Vetterling, 1988, 1991

-[23] "STATISTICAL SIGNAL PROCESSING", L. Scharf, 1991

-[24] "SIGNALS AND SYSTEMS: CONTINUOUS AND DISCRETE", R.E. Ziemer, W.H. Tranter, D.R. Fannin, MacMillan 1993

-[25] BORRADOR NORMA "ISO/DIN 8608 INTERNATIONAL STANDARD". 1991. "ROAD SURFACE PROFILES. REPORTING OF MEASURED DATA".

-[26] "DIGITAL TECHNIQUES FOR WIDEBAND RECEIVERS", J. TSUI, ARTECH HOUSE, 1995.

-[27] MODERN RAILWAY TRACK", C. ESVELD, MRT, 1989. ●