

ECUACIONES DE TERCER GRADO GRÁFICOS Y TABLAS PARA SU RESOLUCIÓN

Antonio Angulo Álvarez.
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

RESUMEN

Las ecuaciones de tercer grado, ya han sido tratadas en diversos artículos de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS. En las páginas que siguen, se desarrollan unos gráficos y tablas que logran el esperado objetivo de resolver cualquier ecuación de tercer grado con coeficientes reales. Se obtienen todas las raíces, tanto reales como complejas, siendo destacable que las operaciones precisas para ello son muy pocas, y sencillas. Consultadas las Bases de Datos especializadas, no se ha encontrado ningún método de resolución tan idóneo. Se destaca, por tanto, la trascendencia del estudio que se desarrolla a continuación.

ABSTRACT

Third degree equations have been dealt with in several articles in the Revista de Obras Públicas. In the following pages we present some graphs and tables that facilitate the solution of third degree equations with real coefficients. All the roots are obtained, both real and complex, through a few simple operations. No better method has been found in the specialist literature, so the study is considered to be of special interest.

GENERALIDADES

La configuración normal de las ecuaciones de tercer grado es la siguiente :

$$a \cdot z^3 + b \cdot z^2 + c \cdot z + d = 0$$

que para su mas fácil resolución se transforma en otra, con coeficiente unidad en el término de tercer grado, y sin término de segundo grado. Para ello se utiliza una variable "x" cuyo valor es

$$x = z + \frac{b}{3a}$$

y se consiguen ambos objetivos.

La nueva ecuación tiene por expresión

$$x^3 + p \cdot x + q = 0$$

siendo

$$p = -\frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a}$$

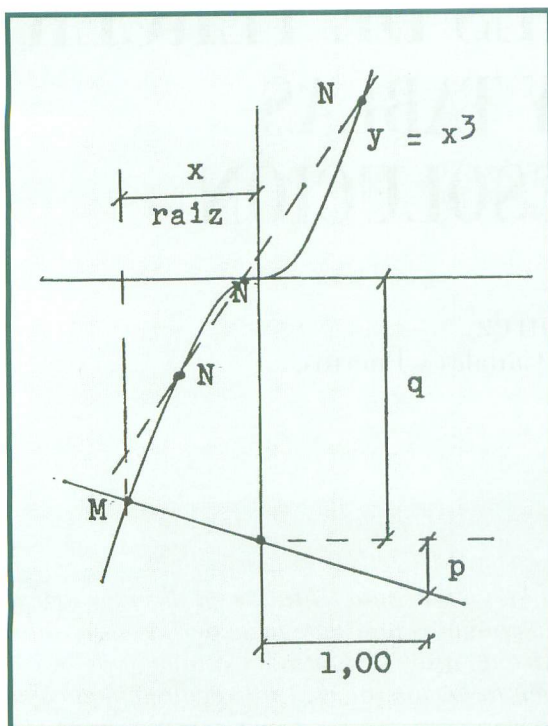
$$q = \frac{2}{27} \cdot \frac{b^3}{a^3} - \frac{c \cdot b}{3 \cdot a^2} + \frac{d}{a}$$

Se puede representar gráficamente la evolución de la parábola cúbica

Se admiten
comentarios a este
artículo, que deberán
ser remitidos a la
Redacción de la ROP
antes del 30 de
abril de 1996.

Recibido en ROP:
octubre de 1995

Figura 1.

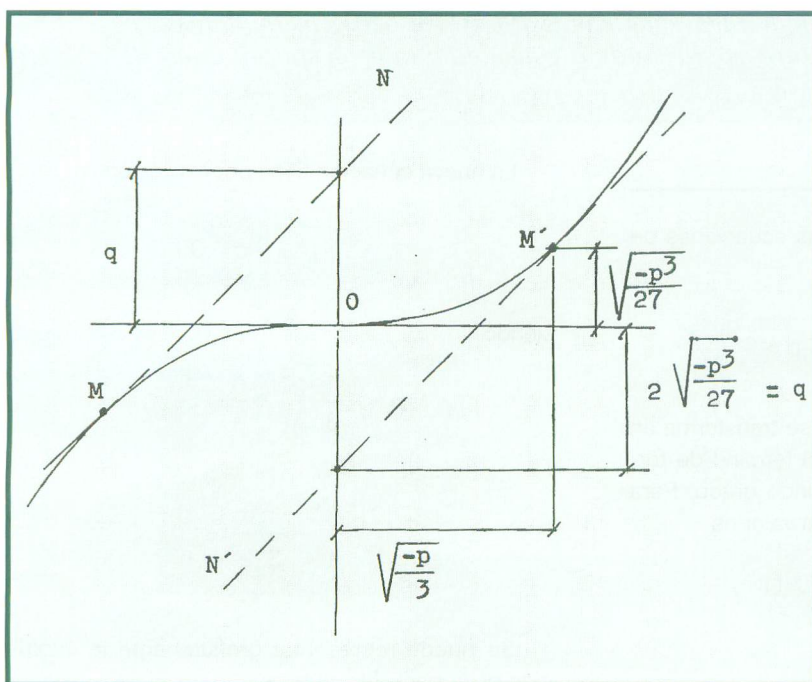


$$y = x^3$$

y también de la recta

$$y = -p \cdot x - q$$

Figura 2.



resultando que la abscisa del punto de corte de ambas líneas será la raíz de la ecuación.

Tal representación se ha hecho en la figura 1 para valores positivos de "p" y de "q". Se aprecia que ambas líneas se cortan, por lo menos, en un punto (M), por lo que la ecuación ha de tener, como mínimo, una raíz real.

También en la figura 1ª se ha dibujado la línea de trazos N N N que corta a la parábola cúbica en tres puntos. Representa el caso en que la ecuación tiene tres raíces reales. En la figura 2ª, sin respetar escalas, se ha representado la zona próxima al origen, con objeto de deducir las circunstancias en las que la ecuación tenga las tres raíces reales.

La primera condición es que el coeficiente "p" sea negativo, y la representación de la recta citada esté comprendida entre las dos rectas M N y M' N' de la figura 2. Tomando la inclinación "-p" de las rectas como variable independiente, las abscisas de los puntos de la curva cuya tangente tenga esta inclinación "-p" serán aquellas para las que

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot x^2 = -p$$

es decir

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Las tangentes a la curva en dichos puntos definen la ordenada "q", que valdrá

$$\pm q = 2 \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{p^3}{q^2} = -\frac{27}{4} = -6,75$$

por lo que se llega a la conclusión de que si

$$\frac{p^3}{q^2} < -6,75$$

la ecuación tendrá TRES RAÍCES REALES. Si fuese superior a esta cifra, sólo tendrá UNA RAÍZ REAL.

FÓRMULAS USUALES

Quien suscribe no conoce otro modo directo de resolver ecuaciones de tercer grado que la denominada "FOÓRMULA DE CARDANO", por haber sido ideada por el matemático italiano GIROLAMO CARDANO, que vivió entre 1.531 y 1.576.

Se da la circunstancia de que también se atribuye el desarrollo de la misma fórmula a NICOLÒ FONTANA, también italiano, prácticamente contemporáneo de CARDANO, pues vivió desde 1.499 hasta 1.576 y a quien se le conocía por el apodo de TARTAGLIA pues padecía tartamudez.

Existe la posibilidad de que la fórmula fuese ideada por FONTANA, quien se la comunicó a CARDANO, y éste la presentase como ideada por él.

Se basa tal desarrollo en descomponer la incógnita "x" en dos sumandos

$$x = U + V$$

Desarrollando la ecuación de tercer grado, ya mencionada, se convierte en la siguiente:

$$(U + V)^3 + p(U + V) + q = 0$$

ó sea

$$U^3 + 3(U + V) \cdot U \cdot V + V^3 + p(U + V) + q = 0$$

que se puede agrupar como sigue

$$[U^3 + V^3 + q] + (U + V) \cdot [3 \cdot U \cdot V + p] = 0$$

Tal condición se cumple si se anulan los paréntesis cuadrados, lo que da lugar a las siguientes expresiones

$$U^3 + V^3 + q = 0 \quad , \quad U^3 + V^3 = -q$$

$$3 \cdot U \cdot V + p = 0 \quad , \quad U \cdot V = -\frac{p}{3}$$

Elevando al cubo la última de ellas se tiene

$$U^3 \cdot V^3 = \frac{-p^3}{27}$$

Lo anterior permite conocer los valores de la suma y del producto de dos cantidades

$$U^3 \text{ y } V^3$$

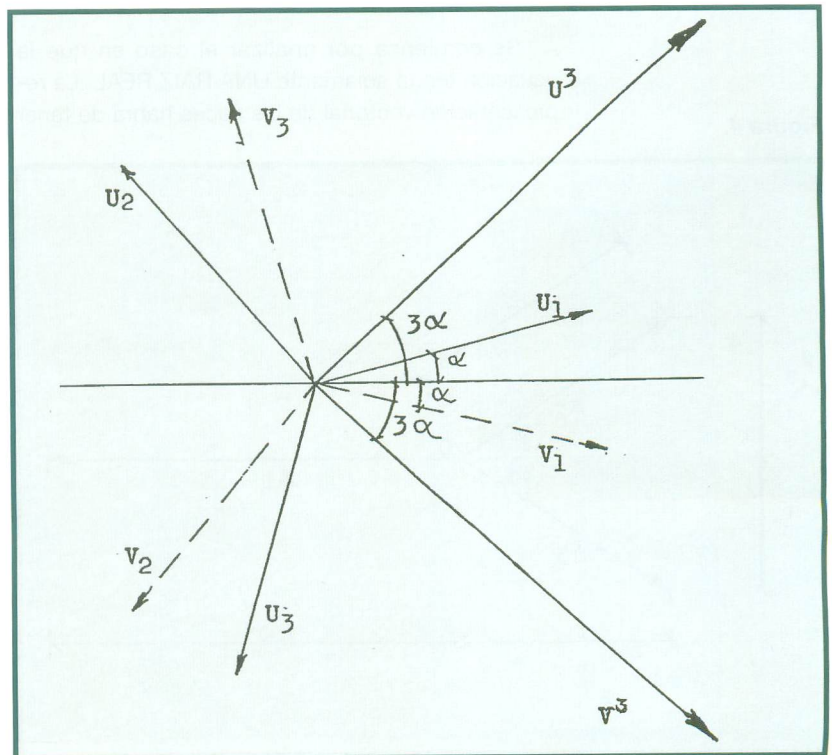
que se pueden obtener mediante una ecuación de segundo grado cuyas raíces son

$$(U^3, V^3) = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$$

por lo que el valor de "x" será la suma de las raíces cúbicas de las dos expresiones anteriores.

Los valores U^3 y V^3 son únicos, pero los de U y V pueden ser dos estrellas de vectores en el plano de Gauss, que se han dibujado en la figura 3. En ella se han representado los vectores U^3 y V^3 que son conjugados, según se desprende de las fó-

Figura 3.



mulas deducidas, cuando resultan valores complejos.

También serán conjugadas sus raíces cúbicas, ó sea U_1 y V_1 , cuyo argumento es la tercera parte del propio de U^3 y V^3 , y cuyo módulo es su raíz cúbica.

También se han dibujado los otros vectores que igualmente son

$$\sqrt[3]{U^3}, \sqrt[3]{V^3}$$

y se encuentran desfasados respecto a los primeros un ángulo de 120° y de 240° . Los primeros se han definido por el subíndice (1). Es importante destacar que, pudiendo escogerse varios grupos de los distintos vectores U y V , deberán sumarse solamente aquellos cuyo argumento sea igual y contrario, por razón de que su producto

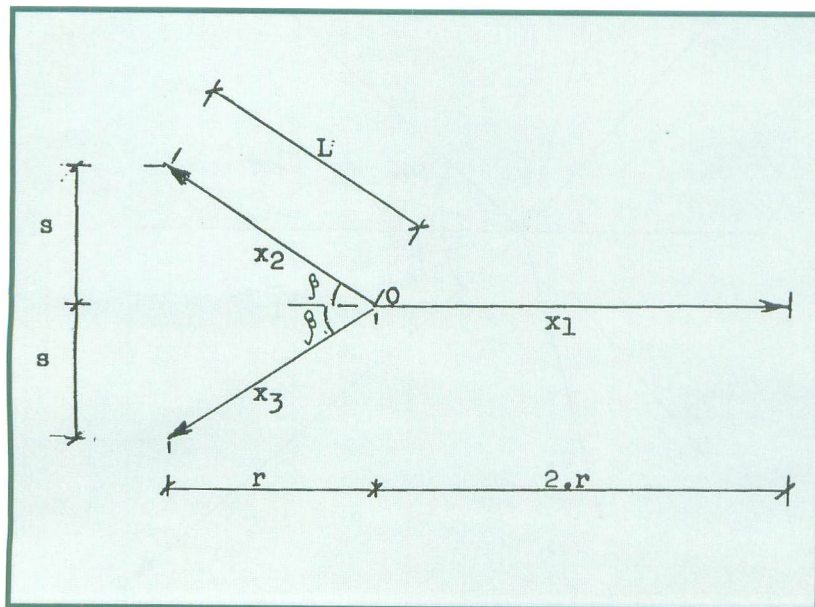
$$U \cdot V = -\frac{p}{3}$$

tiene que ser una cantidad real.

DESARROLLO TEÓRICO

Se comienza por analizar el caso en que la ecuación tenga solamente UNA RAÍZ REAL. La representación vectorial de las raíces habrá de tener

Figura 4.



una forma análoga a la indicada en la figura 4. Las raíces complejas habrán de tener el mismo argumento pero de distinto signo, pues lo impone el hecho de que el producto de las tres raíces

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -q$$

tiene que ser una cantidad real, y siéndolo la raíz x_1 , el producto de las otras dos tendrá que ser real, lo que obliga a que sea nula la suma de ambos argumentos, así que éstos tendrán que ser iguales y de signo contrario.

Tal condición, unida a la que obliga a que la suma vectorial de las tres raíces debe ser nula, trae como consecuencia que los módulos de x_2 y de x_3 sean iguales. Por lo tanto, han de ser conjugados.

Por otro lado, la parte real de la suma de las tres raíces debe ser nula. Esto supone que la parte real de las raíces x_2 y x_3 conjugadas, sea precisamente LA MITAD de la raíz real.

Por razón de lo que antecede, la expresión de las tres raíces tendrá que ser como sigue:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot r \\ x_2 &= -r - j \cdot s \\ x_3 &= -r + j \cdot s \end{aligned}$$

Se sustituyen los valores de "r" y de "s" por otros en función "L" y del ángulo "β", que son los siguientes:

$$\begin{aligned} r &= L \cdot \cos \beta \\ s &= L \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Por lo tanto se pueden sustituir estos valores en el condicionado general de la ecuación

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 &= p \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= -q \end{aligned} \quad [1]$$

por lo que las igualdades anteriores se convierten en las siguientes:

$$p = x_1(x_2 + x_3) + x_2 \cdot x_3 = -x_1^2 + x_2 \cdot x_3 = -4r^2 + (r^2 + s^2) = L^2(-3\cos^2\beta + \sin^2\beta) = L^2(1 - \cos^2\beta - 3\sin^2\beta) = L^2(1 - 4\cos^2\beta)$$

$$-q = 2 \cdot L \cdot \cos\beta \cdot L^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = 2 \cdot L^3 \cdot \cos\beta$$

De las igualdades anteriores se pueden obtener dos expresiones de la magnitud "L"

$$L = \sqrt{\frac{p}{1 - 4\cos^2\beta}} \quad , \quad L = \sqrt[3]{\frac{-q}{2 \cdot \cos\beta}}$$

Igualándolas, se llega a la siguiente expresión:

$$L = \sqrt{\frac{p}{1 - 4\cos^2\beta}} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2 \cdot \cos\beta}}$$

También puede elevarse a la sexta potencia, para evitar raíces, y se alcanza la expresión

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{(1 - 4\cos^2\beta)^3}{4\cos^2\beta} \quad [2]$$

que permite obtener el ángulo β en función solamente de "p" y de "q" que son datos propios de cada ecuación.

La magnitud "r" vale :

$$r = L \cdot \cos\beta = \sqrt{\frac{p}{1 - 4\cos^2\beta}} \cdot \cos\beta = \sqrt{p} \cdot \frac{\cos\beta}{\sqrt{1 - 4\cos^2\beta}} = \sqrt{p} \cdot R'$$

habiendo designado a la magnitud R' el valor de la fracción

$$R' = \frac{\cos\beta}{\sqrt{1 - 4\cos^2\beta}}$$

De modo análogo

$$s = \sqrt{p} \cdot S'$$

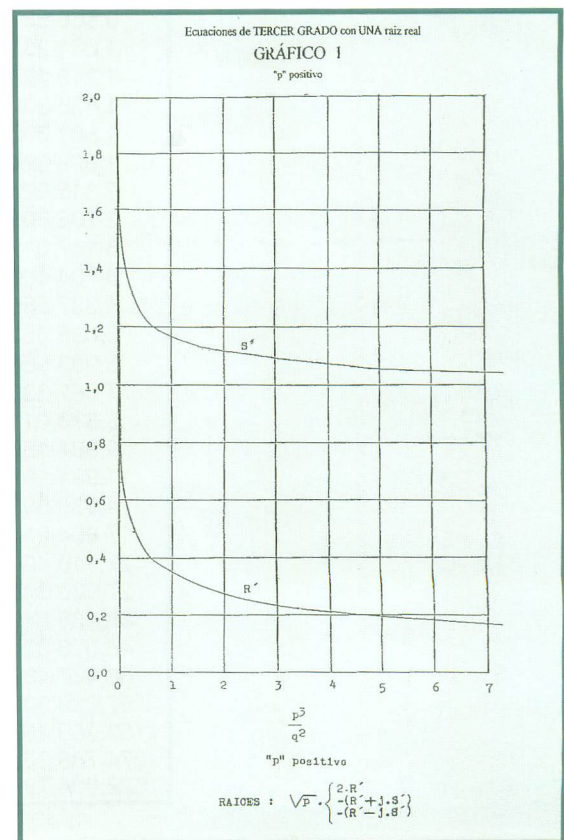
siendo

$$S' = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1 - 4\cos^2\beta}}$$

Se ha utilizado, como variable independiente, el valor de β y calculado en función de él, la fracción p^3/q^2 así como los coeficientes R' (parte real) y S' (parte imaginaria).

En el GRÁFICO N°1 se han adoptado, como abscisas, la primera expresión, ó sea el valor de la fracción p^3/q^2 y como ordenadas, los valores numéricos de R' y de S' , de modo que sin necesidad de calcular el ángulo β , se obtienen directamente R' y S' . Para lograr mayor precisión que la obtenida en la lectura del gráfico, se ha establecido una TABLA, cuya primer columna contiene precisamente los valores de la fracción p^3/q^2 y en su misma horizontal se insertan los de R' y S' . Es la TABLA N° 1.

Para facilitar las interpolaciones, a la derecha de cada columna de R' y de S' se ha insertado otra con "Cocientes de diferencias". Lo mas fre-



Ecuaciones de TERCER GRADO con UNA raíz real

TABLA 1

"p" positivo

p^3/q^2	R'	$\frac{\text{dif. } R'}{\text{dif. } p^3/q^2}$	S'	$\frac{\text{dif. } S'}{\text{dif. } p^3/q^2}$
0,000 000	infinito	infinito	infinito	infinito
0,000 065	2,462 343	- 1632,510 846	4,380 570	- 2722,393 774
0,000 523	1,714 286	- 266,797 822	3,133 102	- 432,625 102
0,001 785	1,377 594	- 81,661 195	2,587 141	- 128,799 857
0,004 282	1,173 714	- 33,762 582	2,265 571	- 51,792 492
0,008 468	1,032 371	- 16,669 729	2,048 748	- 24,865 596
0,014 827	0,926 367	- 9,253 324	1,890 626	- 13,417 977
0,023 874	0,842 651	- 5,581 080	1,769 233	- 7,864 776
0,036 162	0,774 070	- 3,580 688	1,672 589	- 4,901 809
0,052 288	0,716 328	- 2,409 367	1,593 542	- 3,202 886
0,072 900	0,666 667	- 1,683 553	1,527 525	- 2,172 326
0,098 705	0,623 223	- 1,212 835	1,471 469	- 1,518 287
0,130 480	0,584 885	- 0,895 908	1,423 225	- 1,087 546
0,169 085	0,550 098	- 0,675 743	1,381 240	- 0,794 981
0,215 474	0,518 751	- 0,518 683	1,344 362	- 0,591 029
0,270 716	0,490 098	- 0,404 060	1,311 712	- 0,445 662
0,336 016	0,463 713	- 0,318 744	1,282 610	- 0,340 057
0,412 737	0,439 259	- 0,254 137	1,256 521	- 0,262 062
0,502 434	0,416 463	- 0,204 467	1,233 015	- 0,203 626
0,606 893	0,395 105	- 0,165 766	1,211 744	- 0,159 295
0,728 178	0,375 000	- 0,135 253	1,192 424	- 0,125 297
0,868 687	0,355 996	- 0,110 940	1,174 819	- 0,098 975
1,031 231	0,337 963	- 0,091 384	1,158 731	- 0,078 428
1,219 125	0,320 793	- 0,075 523	1,143 995	- 0,062 277
1,436 309	0,304 390	- 0,062 563	1,130 469	- 0,049 505
1,687 500	0,288 675	- 0,051 904	1,118 034	- 0,039 355
1,978 394	0,273 576	- 0,043 089	1,106 586	- 0,031 258
2,315 923	0,259 033	- 0,035 762	1,096 035	- 0,024 778
2,708 608	0,244 989	- 0,029 647	1,086 305	- 0,019 583
3,167 017	0,231 399	- 0,024 528	1,077 328	- 0,015 414
3,704 400	0,218 218	- 0,020 231	1,069 045	- 0,012 069
4,337 556	0,205 408	- 0,016 619	1,061 404	- 0,009 387
5,088 053	0,192 936	- 0,013 580	1,054 359	- 0,007 242
5,983 956	0,180 769	- 0,011 025	1,047 870	- 0,005 534
7,062 339	0,168 880	- 0,008 879	1,041 903	- 0,004 180
8,373 011	0,157 243	- 0,007 082	1,036 425	- 0,003 114
9,984 155	0,145 833	- 0,005 582	1,031 408	- 0,002 282
11,991 130	0,134 630	- 0,004 338	1,026 828	- 0,001 640
14,530 593	0,123 613	- 0,003 315	1,022 663	- 0,001 151
17,804 014	0,112 763	- 0,002 480	1,018 895	- 0,000 786
22,118 400	0,102 062	- 0,001 809	1,015 505	- 0,000 518
27,960 348	0,091 494	- 0,001 278	1,012 479	- 0,000 327
36,138 645	0,081 044	- 0,000 867	1,009 804	- 0,000 196
48,078 824	0,070 696	- 0,000 557	1,007 469	- 0,000 109
66,487 437	0,060 437	- 0,000 333	1,005 464	- 0,000 055
97,029 900	0,050 252	- 0,000 180	1,003 781	- 0,000 024
153,269 159	0,040 129	- 0,000 083	1,002 413	- 0,000 009
274,788 565	0,030 054	- 0,000 029	1,001 354	- 0,000 002
622,004 797	0,020 016		1,000 601	

cuenta es que el valor de la fracción propio de cada ecuación, no coincide con ninguno de los que se encuentren en la TABLA, existiendo una diferencia. Si se multiplica esta diferencia por los "Cocientes" antes citados, se tienen las cantidades a añadir (algebraicamente) a los valores de R' y de S' leídos en la tabla, para así llegar a los correspondientes al valor deseado de la fracción p^3/q^2 .

Se aclara que los citados "Cocientes de diferencias" entre cada dos valores de R' ó de S' se han situado en la misma horizontal del superior. Así, si hubiese dos valores "aaa" y "bbb", el correspondiente "Coeficiente de diferencias" "ccc" se ha situado a la altura del situado mas arriba, ó sea

aaa ccc
bbb

Es destacable que el mayor valor que puede tener la citada fracción p^3/q^2 se presenta cuando el ángulo β alcanza los 60° , cuyo coseno vale 0,5, y por lo tanto, el denominador se anula. Por ello, tanto R' como S' toman valores de "Infinito". Cuando se estudien valores de β superiores a 60° subsisten las fórmulas deducidas, siendo preciso que el coeficiente "p" sea negativo.

Para este tipo de ecuaciones, se partirá de la fracción $-p^3/q^2$ con su signo correspondiente, repitiéndose los cálculos bajo el criterio mencionado, si bien se cambia el binomio

$$1 - 4 \cos^2 \beta$$

por el de igual valor, pero signo contrario

$$4 \cos^2 \beta - 1$$

Los resultados correspondientes se han incorporado en el GRÁFICO N°3, así como en la TABLA N° 3, con las mismas circunstancias para los "Cocientes de diferencias".

Se ha observado que para valores pequeños de la relación p^3/q^2 y sea cualquiera el signo de la misma, resultan unos coeficientes R y S , y R' y S' poco exactos. Procede lo anterior de la existencia de la expresión

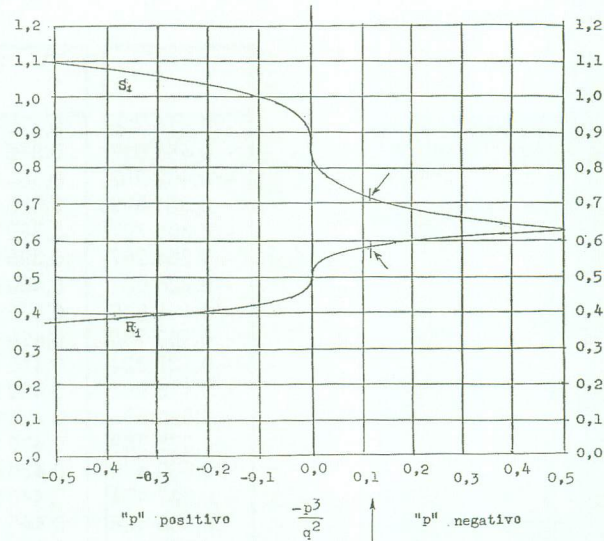
$$1 - 4 \cos^2 \beta$$

que tiende hacia "cero" cuando el ángulo β se aproxima a los 60° .

Ecuaciones de TERCER GRADO con UNA raíz real

GRÁFICO 2

$$-0,5 < p^3/q^2 < 0,5$$

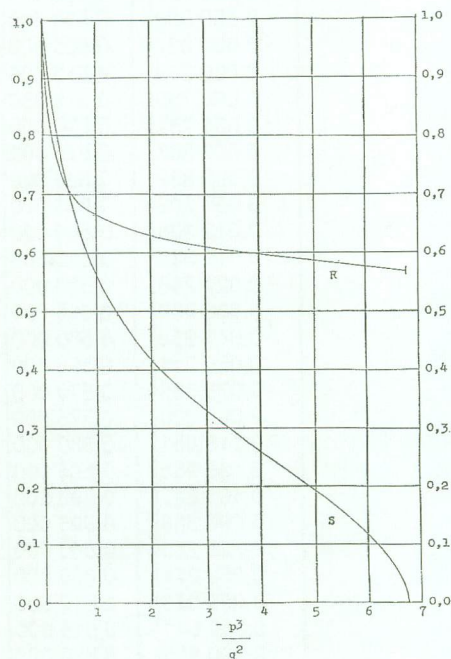


$$\text{RAÍCES : } \sqrt[3]{-q} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2 + R_1 \\ -(R_1 + j \cdot S_1) \\ -(R_1 - j \cdot S_1) \end{array} \right\}$$

Ecuaciones de TERCER GRADO con UNA raíz real

GRÁFICO 3

$$0 > p^3/q^2 > -6,75$$



$$\text{RAÍCES : } \sqrt{-p} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2 + R \\ -(R + j \cdot S) \\ -(R - j \cdot S) \end{array} \right\}$$

Ecuaciones de TERCER GRADO con UNA raíz real

TABLA 2

$$-0,5 < p^3 / q^2 < 0,5$$

p^3 / q^2	R_1	$\frac{\text{dif. } R_1}{\text{dif. } p^3 / q^2}$	S_1	$\frac{\text{dif. } S_1}{\text{dif. } p^3 / q^2}$
- 0,519 236	0,370 000	0,081 673	1,102 021	- 0,161 870
- 0,458 017	0,375 000	0,089 670	1,092 112	- 0,175 832
- 0,402 257	0,380 000	0,098 701	1,082 307	- 0,191 576
- 0,351 599	0,385 000	0,108 952	1,072 603	- 0,209 426
- 0,305 707	0,390 000	0,120 655	1,062 992	- 0,229 782
- 0,264 267	0,395 000	0,134 100	1,053 469	- 0,253 147
- 0,226 981	0,400 000	0,149 651	1,044 031	- 0,280 153
- 0,193 570	0,405 000	0,167 775	1,034 670	- 0,311 609
- 0,163 768	0,410 000	0,189 076	1,025 384	- 0,348 560
- 0,137 324	0,415 000	0,214 345	1,016 166	- 0,392 379
- 0,113 997	0,420 000	0,244 639	1,007 014	- 0,444 894
- 0,093 558	0,425 000	0,281 387	0,997 921	- 0,508 583
- 0,075 789	0,430 000	0,326 571	0,988 884	- 0,586 878
- 0,060 479	0,435 000	0,382 991	0,979 898	- 0,684 630
- 0,047 424	0,440 000	0,454 718	0,970 960	- 0,808 889
- 0,036 428	0,445 000	0,547 844	0,962 066	- 0,970 210
- 0,027 301	0,450 000	0,671 827	0,953 211	- 1,184 972
- 0,019 859	0,455 000	0,841 987	0,944 392	- 1,479 713
- 0,013 920	0,460 000	1,084 479	0,935 605	- 1,899 731
- 0,009 310	0,465 000	1,446 962	0,926 846	- 2,527 579
- 0,005 854	0,470 000	2,023 903	0,918 112	- 3,526 876
- 0,003 384	0,475 000	3,024 789	0,909 399	- 5,260 466
- 0,001 731	0,480 000	4,993 982	0,900 703	- 8,671 212
- 0,000 730	0,485 000	9,735 422	0,892 022	- 16,883 628
- 0,000 216	0,490 000	26,443 071	0,883 351	- 45,822 126
- 0,000 027	0,495 000	185,166 481	0,874 686	- 320,739 136
0,000 000	0,500 000	185,166 851	0,866 025	- 320,739 778
0,000 027	0,505 000	26,443 547	0,857 365	- 45,822 951
0,000 216	0,510 000	9,736 104	0,848 700	- 16,884 811
0,000 730	0,515 000	4,994 892	0,840 029	- 8,672 793
0,001 731	0,520 000	3,025 934	0,831 347	- 5,262 461
0,003 383	0,525 000	2,025 286	0,822 652	- 3,529 291
0,005 852	0,530 000	1,448 584	0,813 939	- 2,530 421
0,009 303	0,535 000	1,086 341	0,805 205	- 1,903 005
0,013 906	0,540 000	0,844 089	0,796 446	- 1,483 423
0,019 830	0,545 000	0,674 166	0,787 659	- 1,189 123
0,027 246	0,550 000	0,550 420	0,778 839	- 0,974 806
0,036 330	0,555 000	0,457 529	0,769 984	- 0,813 936
0,047 258	0,560 000	0,386 036	0,761 089	- 0,690 132
0,060 211	0,565 000	0,329 848	0,752 151	- 0,592 840
0,075 369	0,570 000	0,284 893	0,743 164	- 0,515 013
0,092 920	0,575 000	0,248 372	0,734 125	- 0,451 796
0,113 051	0,580 000	0,218 303	0,725 030	- 0,399 761
0,135 955	0,585 000	0,193 254	0,715 874	- 0,356 430
0,161 827	0,590 000	0,172 172	0,706 652	- 0,319 974
0,190 868	0,595 000	0,154 263	0,697 360	- 0,289 022
0,223 280	0,600 000	0,138 923	0,687 992	- 0,262 530
0,259 271	0,605 000	0,125 686	0,678 543	- 0,239 688
0,299 053	0,610 000	0,114 187	0,669 008	- 0,219 865
0,342 841	0,615 000	0,104 135	0,659 381	- 0,202 560
0,390 856	0,620 000	0,095 299	0,649 655	- 0,187 373
0,443 322	0,625 000	0,087 492	0,639 824	- 0,173 981
0,500 470	0,630 000		0,629 882	

Para eludir la dificultad mencionada, se ha buscado otro criterio para definir las raíces, en el que no concurra la mencionada circunstancia.

Se dedujo anteriormente que

$$L = \sqrt[3]{\frac{-q}{2\cos\beta}}$$

Y también que

$$r = L \cdot \cos\beta$$

de modo que, sustituyendo, queda

$$r = \sqrt[3]{\frac{-q}{2\cos\beta}} \cdot \cos\beta = \sqrt[3]{-q} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{2}}$$

con lo que queda definida la parte real de la raíz, mediante la expresión

$$r = \sqrt[3]{-q} \cdot R_1$$

siendo

$$R_1 = \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{2}}$$

Por otra parte, habiéndose obtenido que

$$\cos^2\beta = 2R_1^3$$

se puede hacer la adecuada sustitución en [2], y resulta

$$\frac{-p^3}{q^2} = \frac{(4\cos^2\beta - 1)^3}{4\cos^2\beta} = \frac{(8R_1^3 - 1)^3}{8R_1^3} \quad [3]$$

Esta última expresión permite conocer R_1 en función de la relación $-p^3/q^2$

Se han dado valores a R_1 y calculado el valor de la fracción, representando el conjunto de valores en el GRÁFICO N°2, situando en abscisas el

valor de la fracción $-p^3/q^2$, y en ordenadas, el de R_1 .

En relación con la parte imaginaria "s" de las raíces, se utilizará la expresión

$$s = \sqrt[3]{-q} \cdot S_1$$

siendo

$$S_1 = r \cdot \operatorname{tg}\beta$$

pero a su vez

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta} - 1} = \sqrt{\frac{1}{2R_1^3} - 1}$$

quedando en definitiva

$$S_1 = R_1 \sqrt{\frac{1}{2R_1^3} - 1}$$

También estos valores de S_1 se han incorporado al GRÁFICO y a la TABLA N° 2, con sus "Coeficientes de diferencias" que facilitan las interpolaciones.

Se ha estimado que la zona en la que resulta preciso el criterio últimamente expuesto, es la correspondiente a que la fracción p^3/q^2 se encuentre entre -0,5 y 0,5.

En los GRÁFICOS N° 1 y 3 se distingue en este tramo de pequeños valores de p^3/q^2 la imprecisión que se ha de tener al medir las ordenadas.

El criterio últimamente expuesto exige tomar como factor la raíz cúbica de "q", siempre más difícil que la raíz cuadrada de "p" que se utilizó en las primitivas exposiciones (TABLAS y GRÁFICOS NUM. 1 y 3).

Cuando la ecuación tenga sus TRES RAÍCES REALES, se partirá de que tales raíces se forman por adición de dos vectores conjugados.

Se designan ambos vectores por las letras U_1 y V_1 designando por la letra "r" a su parte real y por "s" a su parte imaginaria.

En la figura 5 se han dibujado los citados vectores, así como otros, desfasados 120° y 240° , que representan las otras componentes de la ecuación.

Ecuaciones de TERCER GRADO con UNA raíz real

TABLA 3

$$0 > p^3/q^2 > -6,75$$

$-p^3/q^2$	R	$\frac{\text{dif. R}}{\text{dif. } -p^3/q^2}$	S	$\frac{\text{dif. S}}{\text{dif. } -p^3/q^2}$
0,000 000				
0,000 063	2,537 345	- 1633,331 737	4,279 528	- 2937,223 082
0,000 502	1,820 364	- 265,522 788	2,890 180	- 490,704 665
0,001 681	1,507 532	- 80,960 002	2,412 045	- 153,657 412
0,003 950	1,323 784	- 33,369 210	2,063 301	- 65,024 242
0,007 654	1,200 198	- 16,434 588	1,822 479	- 32,875 188
0,013 125	1,110 272	- 9,105 792	1,642 593	- 18,696 771
0,020 693	1,041 367	- 5,485 602	1,501 112	- 11,560 839
0,030 676	0,986 600	- 3,517 966	1,385 691	- 7,609 629
0,043 393	0,941 863	- 2,368 224	1,288 920	- 5,257 805
0,059 156	0,904 534	- 1,657 158	1,206 045	- 3,776 333
0,078 272	0,872 855	- 1,196 822	1,133 855	- 2,799 542
0,101 050	0,845 594	- 0,887 381	1,070 088	- 2,130 870
0,127 792	0,821 863	- 0,672 718	1,013 103	- 1,658 515
0,158 803	0,801 002	- 0,519 767	0,961 671	- 1,315 819
0,194 384	0,782 508	- 0,408 249	0,914 853	- 1,061 425
0,234 837	0,765 993	- 0,325 299	0,871 916	- 0,868 784
0,280 462	0,751 151	- 0,262 506	0,832 277	- 0,720 338
0,331 563	0,737 737	- 0,214 230	0,795 467	- 0,604 174
0,388 440	0,725 552	- 0,176 598	0,761 104	- 0,512 020
0,451 396	0,714 435	- 0,146 898	0,728 869	- 0,438 013
0,520 736	0,704 249	- 0,123 196	0,698 497	- 0,377 925
0,596 764	0,694 882	- 0,104 088	0,669 764	- 0,328 654
0,679 787	0,686 241	- 0,088 541	0,642 478	- 0,287 889
0,770 115	0,678 243	- 0,075 786	0,618 474	- 0,253 889
0,868 056	0,670 820	- 0,065 239	0,591 608	- 0,225 322
0,973 923	0,663 914	- 0,056 457	0,567 754	- 0,201 162
1,088 030	0,657 472	- 0,049 096	0,544 800	- 0,180 606
1,210 695	0,651 449	- 0,042 888	0,522 646	- 0,163 023
1,342 236	0,645 808	- 0,037 624	0,501 201	- 0,147 912
1,482 975	0,640 513	- 0,033 136	0,480 384	- 0,134 873
1,633 236	0,635 534	- 0,029 291	0,460 118	- 0,123 582
1,793 346	0,630 844	- 0,025 981	0,440 332	- 0,113 779
1,963 634	0,626 420	- 0,023 121	0,420 956	- 0,105 253
2,144 433	0,622 239	- 0,020 638	0,401 927	- 0,097 831
2,336 079	0,618 284	- 0,018 476	0,383 178	- 0,091 374
2,538 910	0,614 537	- 0,016 585	0,364 645	- 0,085 770
2,753 267	0,610 982	- 0,014 926	0,346 259	- 0,080 931
2,979 495	0,607 605	- 0,013 485	0,327 950	- 0,076 789
3,217 942	0,604 394	- 0,012 176	0,309 640	- 0,073 299
3,468 958	0,601 338	- 0,011 035	0,291 241	- 0,070 435
3,732 898	0,598 425	- 0,010 022	0,272 651	- 0,068 198
4,010 119	0,595 647	- 0,009 119	0,253 745	- 0,066 623
4,300 981	0,592 995	- 0,008 315	0,234 366	- 0,065 793
4,605 850	0,590 480	- 0,007 594	0,214 308	- 0,065 876
4,925 092	0,588 035	- 0,006 949	0,193 278	- 0,067 202
5,259 078	0,585 714	- 0,006 369	0,170 833	- 0,070 457
5,608 182	0,583 491	- 0,005 847	0,146 237	- 0,077 308
5,972 782	0,581 359	- 0,005 376	0,118 050	- 0,083 310
6,353 260	0,579 314	- 0,004 950	0,082 548	- 0,208 065
6,750 000	0,577 350		0,000 000	

De dicha figura se deduce que las expresiones de las tres raíces de la ecuación son las siguientes:

$$x_1 = 2 \cdot r$$

$$x_2 = -2\left(r \cdot \cos 60^\circ + s \cdot \cos 30^\circ\right) = -2\left(r \cdot \frac{1}{2} + s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -r - \sqrt{3} \cdot s$$

$$x_3 = -r + \sqrt{3} \cdot s$$

Por otra parte, se recuerdan las relaciones entre las raíces y los coeficientes de las ecuaciones [1]

La segunda de ellas, teniendo en cuenta la primera, se puede escribir del modo siguiente

$$\begin{aligned} x_1(x_2 + x_3) + x_2 \cdot x_3 &= -x_1^2 + x_2 \cdot x_3 = \\ -4 \cdot r^2 + r^2 - 3s^2 &= -3r^2 - 3s^2 = p \end{aligned}$$

Pero

$$r^2 + s^2 = U^2$$

y queda por lo tanto

$$U^2 = \frac{-p}{3}$$

La tercera igualdad del grupo [1] se puede presentar como sigue

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2r(-r - \sqrt{3} \cdot s)(-r + \sqrt{3} \cdot s) = 2r(r^2 - 3 \cdot s^2) = -q$$

Tanto "r" como "s" se pueden definir en función de la magnitud U y del ángulo α definido en la figura 5, por lo cual

$$r = U \cdot \cos \alpha$$

$$s = U \cdot \sin \alpha$$

Procede sustituir los valores de "r" y de "s" por los que se acaban de definir, y queda la siguiente expresión

$$2 \cdot U \cdot \cos \alpha (U^2 \cdot \cos^2 \alpha - 3U^3 \sin^2 \alpha) = -q$$

ó sea

$$2 \cdot U^3 \cdot \cos \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha) = -q$$

Se puede prescindir de la magnitud "U" en función de "p" pues

$$U = \sqrt{\frac{-p}{3}}$$

así que

$$U^3 = \sqrt{\frac{-p^3}{27}}$$

y sustituyendo tal valor en la definición de "q" se llega a la siguiente expresión

$$-q = 2 \sqrt{\frac{-p^3}{27}} \cdot \cos \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha) \quad [4]$$

Con ella se ha logrado establecer la relación existente entre los coeficientes "p" y "q" de la ecuación, y el valor del ángulo α .

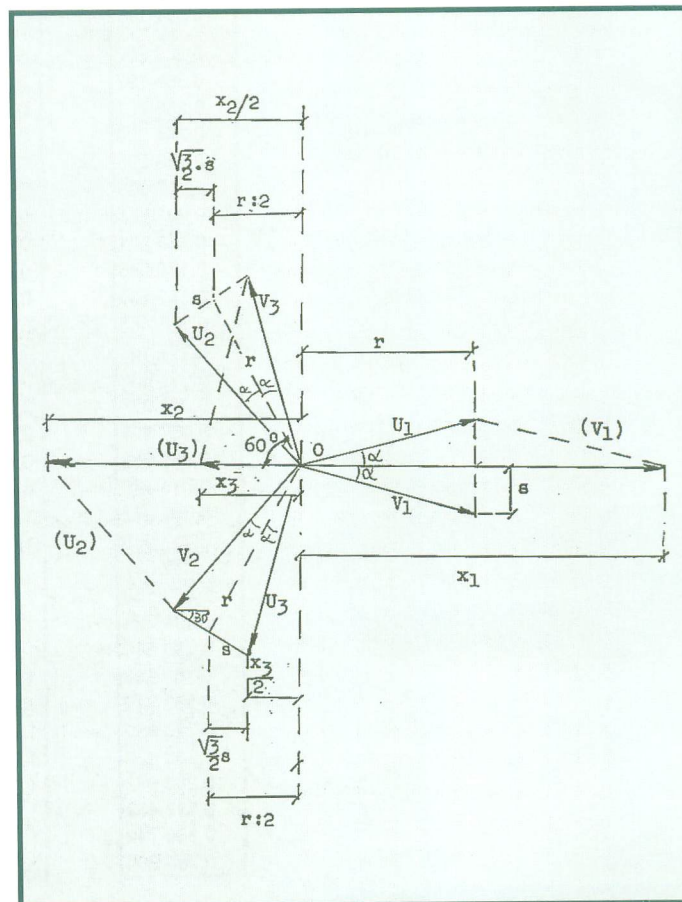


Figura 5.

Ecuaciones de TERCER GRADO con TRES raíces reales

TABLA 4

$$p^3/q^2 < -6,75$$

$\frac{q}{\sqrt{-p^3}}$	K_1	$\frac{dif. K_1}{dif. \frac{q}{\sqrt{-p^3}}}$	K_2	$\frac{dif. K_2}{dif. \frac{q}{\sqrt{-p^3}}}$
- 0,384 900	0,577 350	49,668 883	1,154 701	- 0,333 364
- 0,384 668	0,588 897	16,411 381	1,154 623	- 0,333 484
- 0,383 964	0,600 444	9,752 928	1,154 388	- 0,333 726
- 0,382 780	0,611 991	6,899 725	1,153 993	- 0,334 095
- 0,381 107	0,623 538	5,315 380	1,153 434	- 0,334 592
- 0,378 934	0,635 085	4,307 870	1,152 707	- 0,335 222
- 0,376 254	0,646 632	3,610 978	1,151 809	- 0,335 990
- 0,373 056	0,658 179	3,100 455	1,150 734	- 0,336 900
- 0,369 332	0,669 726	2,710 517	1,149 480	- 0,337 958
- 0,365 072	0,681 273	2,403 076	1,148 040	- 0,339 170
- 0,360 266	0,692 820	2,154 554	1,146 410	- 0,340 542
- 0,354 907	0,704 367	1,949 571	1,144 585	- 0,342 083
- 0,348 984	0,715 914	1,777 673	1,142 559	- 0,343 799
- 0,342 489	0,727 461	1,631 499	1,140 326	- 0,345 702
- 0,335 411	0,739 008	1,505 722	1,137 879	- 0,347 801
- 0,327 742	0,750 555	1,396 388	1,135 212	- 0,350 107
- 0,319 473	0,762 102	1,300 503	1,132 317	- 0,352 635
- 0,310 594	0,773 649	1,215 756	1,129 186	- 0,355 397
- 0,301 097	0,785 196	1,140 338	1,125 810	- 0,358 410
- 0,290 971	0,796 743	1,072 808	1,122 181	- 0,361 693
- 0,280 207	0,808 290	1,012 009	1,118 288	- 0,365 265
- 0,268 797	0,819 837	0,956 999	1,114 120	- 0,369 150
- 0,256 731	0,831 384	0,907 002	1,109 666	- 0,373 375
- 0,244 000	0,842 931	0,861 376	1,104 913	- 0,377 968
- 0,230 595	0,854 478	0,819 583	1,099 846	- 0,382 964
- 0,216 506	0,866 025	0,781 169	1,094 451	- 0,388 403
- 0,201 725	0,877 572	0,745 749	1,088 709	- 0,394 328
- 0,186 241	0,889 119	0,712 996	1,082 604	- 0,400 793
- 0,170 046	0,900 666	0,682 625	1,076 113	- 0,407 859
- 0,153 130	0,912 213	0,654 393	1,069 214	- 0,415 596
- 0,135 485	0,923 760	0,628 088	1,061 880	- 0,424 090
- 0,117 100	0,935 307	0,603 525	1,054 084	- 0,433 441
- 0,097 968	0,946 854	0,580 540	1,045 791	- 0,443 770
- 0,078 078	0,958 401	0,558 992	1,036 964	- 0,455 224
- 0,057 421	0,969 948	0,538 754	1,027 561	- 0,467 985
- 0,035 988	0,981 495	0,519 715	1,017 530	- 0,482 274
- 0,013 770	0,993 042	0,501 773	1,006 815	- 0,498 375
0,009 242	1,004 589	0,484 841	0,995 346	- 0,516 648
0,033 058	1,016 136	0,468 838	0,983 042	- 0,537 564
0,057 687	1,027 683	0,453 693	0,969 802	- 0,561 748
0,083 138	1,039 230	0,439 342	0,955 505	- 0,590 055
0,109 421	1,050 777	0,425 725	0,939 997	- 0,623 688
0,136 544	1,062 324	0,412 791	0,923 081	- 0,664 403
0,164 517	1,073 871	0,400 491	0,904 495	- 0,714 883
0,193 349	1,085 418	0,388 782	0,883 884	- 0,779 485
0,223 050	1,096 965	0,377 625	0,860 733	- 0,865 864
0,253 628	1,108 512	0,366 982	0,834 256	- 0,989 092
0,285 092	1,120 059	0,356 820	0,803 135	- 1,184 577
0,317 453	1,131 606	0,347 110	0,764 801	- 1,567 859
0,350 719	1,143 153	0,337 823	0,712 644	- 3,958 198
0,384 900	1,154 701	0,577 350	0,577 350	

Merced a ella y sustituyendo valores, se ha llegado a las igualdades que definen las raíces, que son las siguientes

$$x_1 = 2 \cdot r = 2 \cdot U \cdot \cos \alpha = 2 \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \cos \alpha = \sqrt{-p} \cdot K_1$$

$$x_2 = -r - \sqrt{3} \cdot s = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \cos \alpha - \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin \alpha = -\sqrt{-p} \cdot K_2$$

siendo

$$K_1 = 2 \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3}}$$

$$K_2 = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3}} + \sin \alpha$$

Aun cuando solo se han determinados dos raíces, la tercera se obtiene por adición algebraica de las dos ya halladas, y cambiando de signo tal adición.

La representación de cómo evolucionan los valores de K_1 y de K_2 en función de los coeficientes "p" y "q" de la ecuación, se ha realizado en el GRÁFICO N° 4.

Para lograr mayor exactitud, se ha confeccionado la TABLA N° 4, en cuya primer columna se han insertado los valores de la fracción

$$\frac{q}{\sqrt{-p^3}}$$

en tanto que en las columnas siguientes figuran los de K_1 y K_2 , así como sus correspondientes "Cocientes de diferencias" para facilitar las interpolaciones.

CONSIDERACIONES FINALES

Los GRÁFICOS y TABLAS que se han deducido cubren todas las posibilidades de las ecuaciones de tercer grado, con coeficientes reales.

Para seleccionar cual es el GRÁFICO o TABLA que procede utilizar, se hará en función del valor de la fracción p^3/q^2

Si esta fuese positiva, por serlo el coeficiente "p", se resuelve la ecuación mediante el GRÁFICO N° 1 y para mayor exactitud, con la TABLA N° 1. Sus valores se deberán multiplicar por

$$\sqrt{p}$$

para obtener las raíces de la ecuación.

Si el valor de la citada fracción fuese inferior a 0,5 en valor absoluto (es decir, si está comprendido entre -0,5 y 0,5), deberán utilizarse el GRÁFICO y TABLA N° 2. Se obtienen las raíces multiplicando por

$$\sqrt[3]{-q}$$

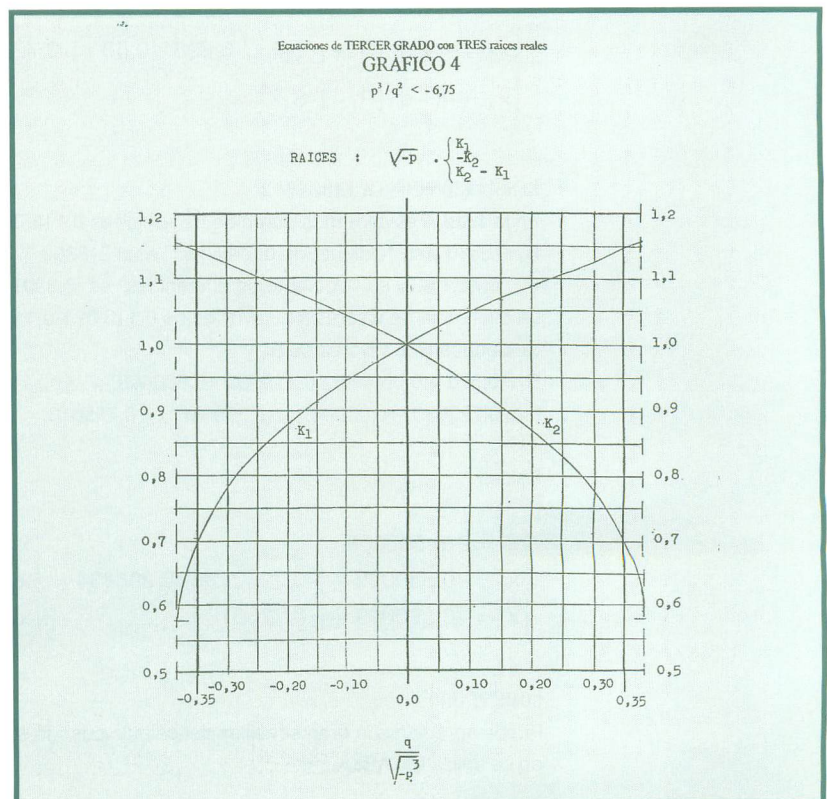
El GRÁFICO y la TABLA N° 3 corresponden a los casos en que, siendo "p" negativo, la citada fracción tiene un valor comprendido entre -0,5 y -6,75. El factor a aplicar es

$$\sqrt{-p}$$

Finalmente, si tal relación fuese inferior a -6,75, las ecuaciones tendrán TRES RAICES REALES, y se pueden resolver con el GRÁFICO y la TABLA N° 4. También hay que multiplicar sus valores por

$$\sqrt{-p}$$

para obtener las raíces.



EJEMPLO

La ecuación $x^3 - 23 \cdot x - 328 = 0$

tiene las raíces :

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 \\ x_2 &= -4 - j \cdot 5 \\ x_3 &= -4 + j \cdot 5 \end{aligned}$$

Valores auxiliares $\frac{-p^3}{q^2} = \frac{23^3}{328^2} = 0,113093$

Por estar comprendida entre -0,5 y 0,5 se utilizarán el GRÁFICO y la TABLA nº 2. $\sqrt[3]{-q} = \sqrt[3]{328} = 6,896434$

RESOLUCIÓN CON EL GRÁFICO Nº 2

La abscisa 0,113 tiene las siguientes ordenadas, señaladas con flechas

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,58 \\ R_2 &= 0,72 \end{aligned}$$

Raíces :

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-q} \cdot 2 \cdot R_1 = 6,896 \cdot 2 \cdot 0,58 \\ x_2 &= -\sqrt[3]{-q} \cdot (R_1 + j \cdot S_1) = -6,896 \cdot (0,58 + j \cdot 0,72) \\ x_3 &= -\sqrt[3]{-q} \cdot (R_1 - j \cdot S_1) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 7,999 \\ x_2 &= -3,999 - j \cdot 4,965 \\ x_3 &= -3,999 + j \cdot 4,965 \end{aligned} \right\}$$

RESOLUCIÓN CON LA TABLA Nº 2

En la TABLA el valor más parecido de $-p^3/q^2$ es 0,113 051 para el que

$R_1 = 0,580$ y su "Cociente de diferencias" es 0,218303

$S_1 = 0,725030$ y su "Cociente de diferencias" es -0,399761

La diferencia de valores de $-p^3/q^2$ es de 0,113 093-0,113 051 = 0,000 042

Se deducen los valores de R_1 y S_1

$R_1 = 0,580 + 0,000042 \cdot 0,218303 = 0,580009$

$S_1 = 0,725030 + 0,000042 \cdot (-0,399761) = 0,725013$

Raíces

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot 0,580009 \\ x_2 &= -0,580009 - j \cdot 0,725013 \\ x_3 &= -0,580009 + j \cdot 0,725013 \end{aligned} \right\} \cdot 6,896434 = \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 7,999987 \\ x_2 &= -3,999993 - j \cdot 5,000005 \\ x_3 &= -3,999993 + j \cdot 5,000005 \end{aligned} \right\}$$

COMENTARIO

Puede apreciarse la gran sencillez del cálculo cuando se utiliza el GRÁFICO y la elevada aproximación obtenida cuando se utiliza la TABLA.