

CALCULO EN SEGUNDO ORDEN EN LA NORMATIVA EUROPEA

Enrique Hernández Montes*
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Edelmiro Rúa Alvarez**
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Un gran problema en el diseño de estructuras metálicas es la inestabilidad. Frente a los problemas de inestabilidad, el análisis estructural elástico en segundo orden es un procedimiento de cálculo más preciso que el análisis elástico en primer orden. Además el análisis elástico en segundo orden es de gran utilidad en estructuras traslacionales. En este artículo hacemos un comentario sobre cómo se trata este problema en la nueva norma europea Eurocódigo 3. Finalmente proponemos un método de cómo realizar el cálculo en segundo orden siguiendo las recomendaciones del Eurocódigo 3 y proponemos una matriz geométrica de rigidez que ha sido usada en el cálculo, por procedimientos de segundo orden, de los mayores edificios construidos.

There is a big problem in steel structures design: instability. The second order elastic analysis is a higher accuracy procedure to calculate structures against instability and it is a great help in traslational structures. In this paper we tell about how this problem is treated in the new european code number 3. Finally we propose a method to calculate a structure in second order following the eurocode recommendations and we also propose a geometric stiffness matrix that has been used to calculate with second order analysis the largest buildings so far.

Introducción

Entre los problemas que se presentan en el diseño y en el cálculo de una estructura metálica, existen dos:

- Las uniones.
- Los problemas de inestabilidad.

a los que el proyectista debe dedicar más atención.

En esta publicación vamos a dar una serie de recomendaciones de cómo usar el cálculo elástico en segundo orden para garantizar la estabilidad de una estructura.

*Becario del Plan de Formación del Profesorado del M.E.C. Dpto. Ingeniería Civil E.T.S. de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Granada1

**Catedrático de Estructuras Metálicas Dpto. de Mecánica de los Medios Continuos E.T.S. Caminos, U.P.M.
Recibido en ROP: abril 1994

Comentario sobre la MV-103

La norma MV-103 resuelve el problema del pandeo, mediante "el método ω " planteado por Duthail para piezas reales, que nos relaciona la tensión crítica de pandeo con la tensión última del material $\sigma_{cr}/\sigma_e = \omega$, y que se ha traducido tradicionalmente como un coeficiente que mayor el esfuerzo axial existente en la pieza:

$$\sigma^* = \frac{N^* \omega}{A} \leq \sigma_u$$

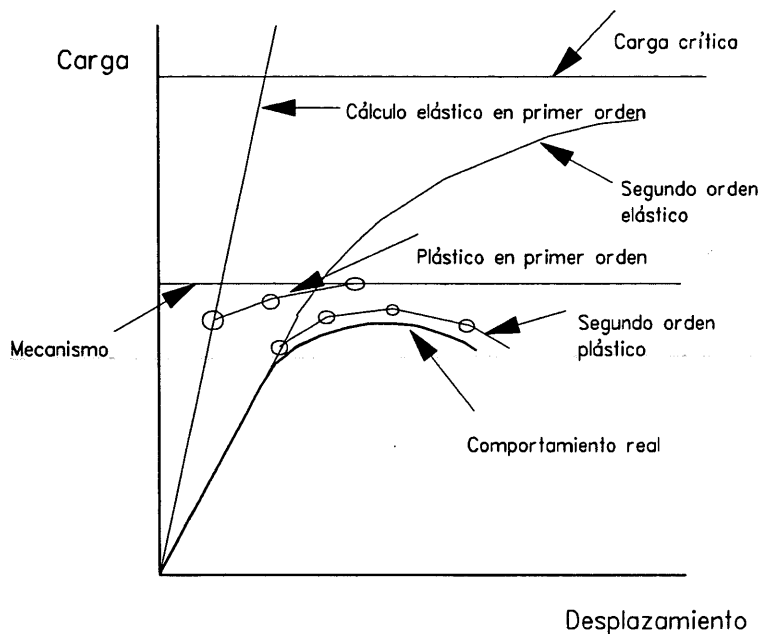
siendo:

σ_u Resistencia de cálculo del acero.

N^* Esfuerzo normal ponderado de compresión.

A Area de la sección bruta de la pieza.

ω Coeficiente de pandeo, función de la esbeltez mecánica λ de la pieza, y del tipo de acero.



Tipos de análisis

Figura 1

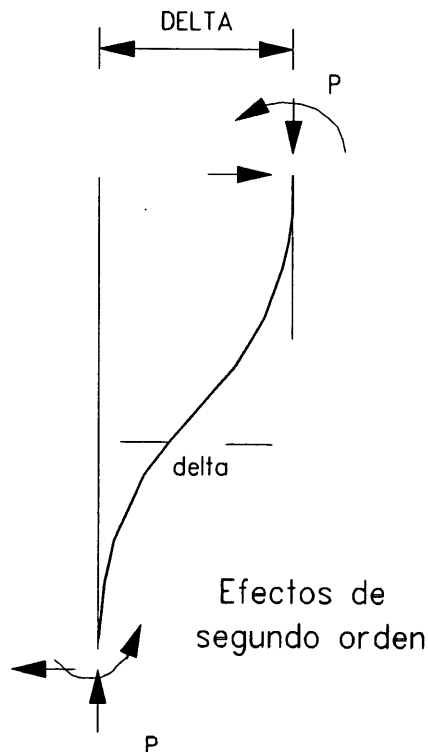


Figura 2

Tipos de análisis estructural

En la figura 1, comentamos los tipos de análisis que pueden plantearse.

El análisis elástico en primer orden es el comúnmente empleado por los programas de cálculo matricial y tiene como inconveniente el que no pone de manifiesto la posible existencia de la inestabilidad. Para este tipo de cálculo:

$$\{P\}[K] = \{\delta\}$$

donde:

K es la matriz de rigidez de la estructura.
P son las acciones exteriores sobre la estructura.
 δ las deformaciones.

Como es fácil observar en ningún momento aparece la presencia de la inestabilidad, dado que δ es proporcional a P. Fácilmente intuimos que debe de existir una carga que sobrepasada ésta la estructura sea inestable, y que una vez cargada con esa carga, una pequeña sobrecarga adicional lleve la estructura al colapso (Carga crítica de pandeo de la estructura).

Para asegurar la estabilidad de una estructura por el proceso de cálculo elástico de primer orden, debemos realizar en todas y cada una de las barras la comprobación indicada en la ecuación 1, garantizando así que en dicha estructura no se produce el pandeo en ninguna barra. Este cálculo es correcto siempre que la estructura sea intrasla-cional.

Los métodos de cálculo elásticos en primer orden analizan la estructura obteniendo los esfuerzos sobre las barras y las longitudes de pandeo de éstas para posteriormente comprobar a pandeo dichas barras. Lo que no puede determinarse por este método es la carga crítica de pandeo de la estructura, que aparece reflejada en la figura 1, ni el coeficiente de seguridad respecto a dicha carga.

En el análisis elástico en segundo orden, el equilibrio se formula sobre la estructura deformada. Este tipo de análisis tiene en cuenta los mo-

mentos producidos por los esfuerzos de los extremos de las barras combinados con los desplazamientos que se han producido en dichas barras. Si estos desplazamientos son los de los extremos de la barra, le llamaremos efectos $P\Delta$ a los efectos de segundo orden. Si los desplazamientos son los que se producen en el interior de la barra, suponiendo que sus extremos no han sufrido movimientos, a los efectos de segundo orden se les denomina efectos $P\delta$, figura 2.

El análisis anelástico en primer orden incluye los efectos de que algún miembro pueda ceder de varias formas pero normalmente mediante un modelo de rótula plástica. Para poder hacer este tipo de análisis el Eurocódigo 3 obliga a que el pórtico sea intraslacional.

Un cálculo en segundo orden anelástico es el único método que se presenta como riguroso en el análisis estructural. Pero no existe en la actualidad ningún programa disponible para oficinas de cálculo que pueda realizar este tipo de análisis.

La inestabilidad en el Eurocódigo 3.

El eurocódigo 3 presenta una estructura de norma pero un desarrollo de libro de texto, debido a que su primera concepción fue como directiva comunitaria y no ha sido modificado sustancialmente al tomar aspecto de norma. Explicando entre otras cosas los tipos de análisis estructural utilizable para deducir los esfuerzos.

El ingeniero, cuando utiliza medios informáticos para calcular una estructura debe siempre conocer en qué campo está y cuales son las hipótesis que el programa que maneja ha adoptado.

El eurocódigo 3 en el apartado 5.2.1.2 (4) nos dice que la teoría elástica de primer orden sólo se podrá usar en dos casos:

- a) Pórticos arriostrados.
- b) Pórticos intraslacionales.

Sin embargo se podrá usar siempre la teoría de segundo orden.

Para poder usar la teoría de primer orden, que es la normalmente utilizada por todos los programas comerciales hay que estar dentro de los supuestos a ó b. El supuesto b se especifica por el

Eurocódigo en el apartado 5.2.5.2 (4), dándonos así la definición de pórtico intraslacional, que para pórticos planos de edificación con vigas unidas a los pilares en cada planta, se debe satisfacer:

$$\frac{\delta}{h} \frac{V}{H} \leq 0,1$$

donde:

δ desplazamiento horizontal relativo entre una planta y la anterior 2.

h altura entre plantas.

H reacción horizontal en la planta.

V reacción vertical total en la planta.

El Eurocódigo también da varias maneras de tomar en cuenta los efectos de segundo orden (apartado 5.2.6.2). Una forma es hallando las longitudes de pandeo de las barras en las posiciones desplazadas, forma esta más tediosa que hacer un análisis en segundo orden como posteriormente explicaremos. La segunda forma es mediante el uso del método de los momentos mayorados, donde los momentos resultantes del análisis elástico de primer orden se incrementarán multiplicándolos por el cociente:

$$\frac{1}{1 - \frac{V_{sd}}{V_{cr}}}$$

en donde:

V_{sd} = valor de cálculo de la carga vertical total.

V_{cr} = su valor elástico crítico en el momento de la rotura en el estado traslacional.

Pero para este método de los momentos mayorados el eurocódigo impone la condición de que V_{sd}/V_{cr} sea mayor que 0,25, situación esta muy alejada de la inestabilidad, y aplicable sólo a pórticos planos de edificación de tipo rectangular.

Cálculo en segundo orden

El objetivo del cálculo de segundo orden consiste en tener en cuenta los efectos $P\Delta$ o lo que es lo mismo: el tener en cuenta *el trabajo de las fuerzas exteriores debido a las deformaciones por*

ellas producidas. De la mayor o menor importancia de estos efectos puede depender la estabilidad de la estructura.

Así si en un análisis elástico en primer orden tenemos:

$$\{P\} = [K]\{\delta\}$$

donde para una barra de una estructura reticulada plana tenemos:

$$P = \begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ M_i \\ P_{xj} \\ P_{yj} \\ M_j \end{Bmatrix} \quad \delta = \begin{Bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ \theta_i \\ dx_j \\ dy_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 & \frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

Realizar un análisis en segundo orden significa tener en cuenta que las deformaciones combinadas con las cargas exteriores, acarrearán nuevos esfuerzos. Luego hay que establecer una ecuación de equilibrio similar a la ecuación 5, pero de forma diferencial:

$$\{P\} = ([K] - [G_N])\{\delta\}$$

Esta ecuación debe de resolverse de forma iterativa por los distintos procesos que existen (p.ej. Newton-Rapson).

Como una buena aproximación proponemos la siguiente matriz geométrica G_N :

$$[G_N] = \frac{N}{I} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esta matriz geométrica de rigidez G_N tiene una aproximación suficiente y es el resultado de usar dos términos en la serie de Taylor de la deformación de una barra. Oficinas de Cálculo de Estructuras como S.O.M. han usado sólo los dos términos antes mencionados para calcular en segundo orden la estabilidad de los edificios mayores del mundo, según vemos por Hajjar 1991 (ref.4).

Veamos una deducción fácil de la matriz G_N . Si consideramos la figura 3, observamos que al establecer el equilibrio de la posición desplazada, aparecen unas fuerzas que denominamos de segundo orden, estas nos equilibran la barra:

$$F_{2orden} = \frac{Nd}{1}$$

al expresar d en función de los desplazamientos de los extremos de las barras obtenemos la matriz G_N , como vamos a ver.

Situamos el sistema local de referencia coincidiendo el eje de las x con el eje longitudinal de la barra, tal y como aparece en la figura 4. Expresamos δ' según la ecuación 11 y comparando con la figura 3 tenemos que $d=dy_j-dy_i$.

$$\delta' = \begin{Bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ \theta_i \\ dx_j \\ dy_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

donde: $d = dy_j - dy_i$

volviendo a escribir la ecuación 8, tenemos

$$\{P\} = [K]\{\delta'\} - [G_N]\{\delta'\}$$

pudiendo ser interpretado $G_N\delta'$ como un incremento de carga ΔP

$$\Delta P = \frac{N}{1} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ \theta_i \\ dx_j \\ dy_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N \frac{d}{1} \\ 0 \\ 0 \\ -N \frac{d}{1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Advertimos que las expresiones de P , K , G_N y ΔP que hemos dado son en ejes locales y que para hacer uso de la ecuación 8 hay que expresarlas en ejes globales.

Procedimiento de cálculo

De la explicación de la ecuación anterior deducimos que el problema del análisis en segundo orden puede ser resuelto por dos caminos. El primero usando a cada paso la variación de la matriz $K-G_N$, y un segundo: introduciendo como cargas exteriores las acciones de segundo orden ΔP deducidas anteriormente en la ecuación 12.

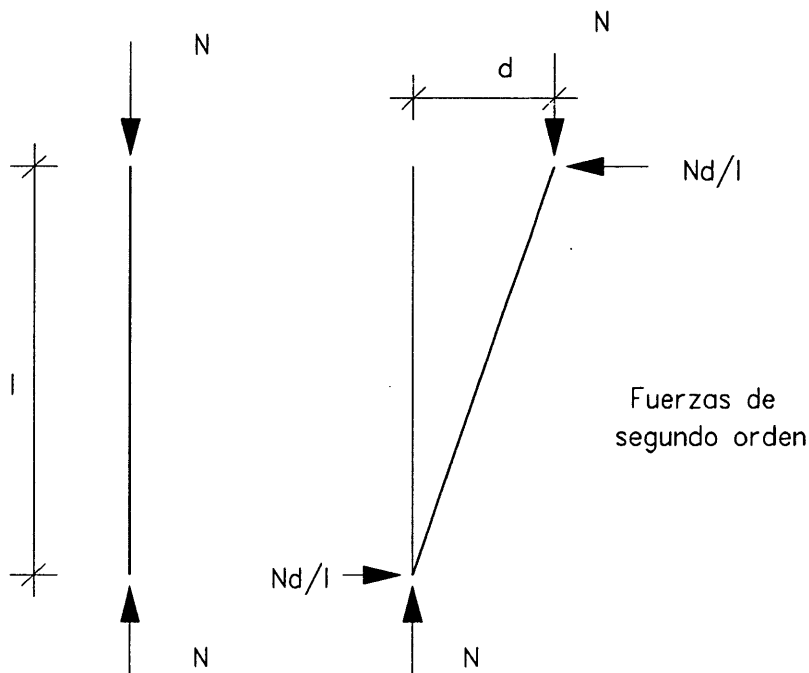
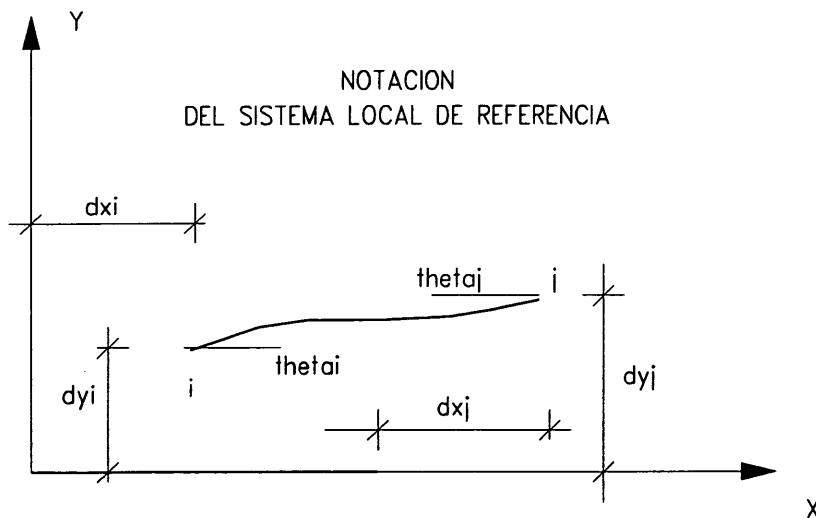
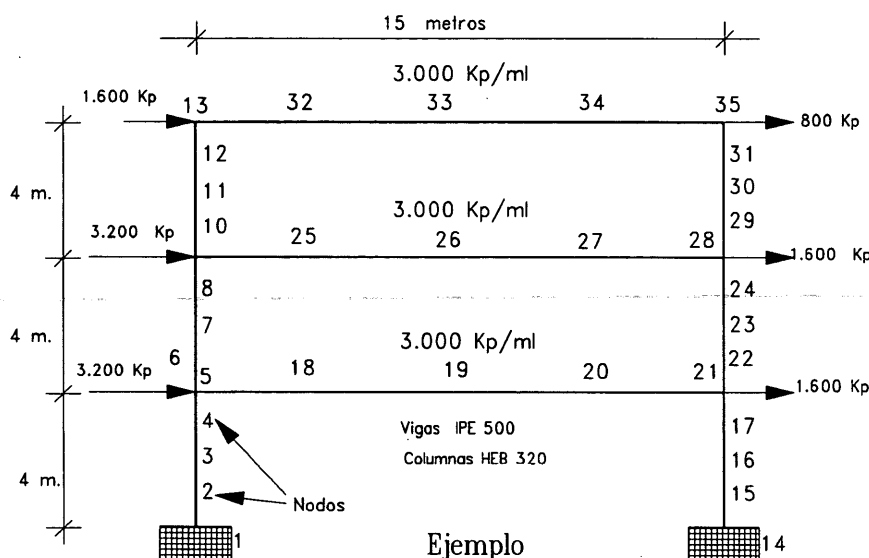


Figura 3

Este segundo camino es el que hemos desarrollado en el ejemplo siguiente. Introducimos las deformaciones originadas por los efectos de segundo orden en forma de acciones exteriores siguiendo el dibujo de la figura 3, este procedimiento nos va a permitir introducir las imperfecciones iniciales de los pórticos como acciones exteriores tal y como aconseja el eurocódigo en el apartado 5.2.4.3 (6).

Figura 4





Ejemplo

En la figura adjunta representamos un pórtico del tipo reticular de 15 metros de luz y que calcularemos mediante análisis lineal en primer y segundo orden.

Las cargas vienen representadas en la figura y analizaremos el desplazamiento del punto 13 y la evolución de los momentos máximos que se producen en la viga del punto 21.

Para obtener mayor precisión en la deformada y analizar los efectos $P\delta$ durante el mismo proceso, es necesario discretizar cada barra, y hemos observado que una discretización de tres o cuatro elementos por barra es suficiente para obtener una buena aproximación. En este ejemplo hemos discretizado cada barra en cuatro elementos, permitiendo esta discretización una convergencia más rápida del proceso de cálculo.

Consideramos que se produce la estabilización cuando entre dos iteraciones sucesivas la diferencia de desplazamientos sea menor de 0,01 cm.

Hacemos mención de que tanto la matriz K como la matriz G_N cambia su expresión en cada

iteración debido fundamentalmente a que el movimiento de la estructura implica unos nuevos cambios de coordenadas.

Para el cálculo, la carga distribuida en las vigas la hemos concentrado en los puntos en los que hemos discretizado la estructura. Cuando en el cuadro realizado en este ejemplo hablamos de iteración 1, nos referimos a los resultados procedentes del análisis lineal en primer orden. Las demás iteraciones son el resultado de ir considerando los efectos de segundo orden por pasos.

Iteración	Momentos del punto 21 (Kp cm)	Desplazamiento x_{13} (cm)
1	$7,7 \cdot 10^6$	9,14
2	$8,1 \cdot 10^6$	10,18
3	$8,2 \cdot 10^6$	10,29
4	$8,2 \cdot 10^6$	10,31
5	$8,2 \cdot 10^6$	10,31

Bibliografía

- (1) Eurocódigo 3. Norma Europea de "Proyecto de estructuras de Acero". (1992).
- (2) Galéa Y. (1984) "Flambement des structures planes á barres". Revue Construction Métallique, n.3 1984.
- (3) MV-103/1972. Norma española de Acero en Edificación.
- (4) Donald W. White y Jerome R. Hajjar. (1991) "Application of Second-Order Elastic Analysis in LRFD: Research to Practice". Engineering Journal AISC 4.1991.
- (5) Bjorhovde R. (1985). "Approches d'analyse de résistance au flambement". Revue Construction Métallique, n.1 1985.
- (6) Gaylord E.H. y Stallmeyer J.E "Design of Steel Structures". McGraw-Hill 1992. Libro. ■

1) Dirección: Departamento de Ingeniería Civil E.T.S. Caminos, Canales y Puertos Campus Fuentenueva 18002 Granada. Telf y fax. (958)244148

2) Observamos que para analizar si una estructura es traslacional o no, hay que calcularla previamente como traslacional.