

APLICACIONES DEL METODO DE DESARROLLO EN SERIE DE AUTOFUNCIONES (MDSA) EN LA INGENIERIA OCEANOGRAFICA

I. J. Losada; M. A. Losada*, A. J. Roldán*

Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

1. Introducción

Uno de los problemas más importantes de la Ingeniería Oceanográfica, es la cuantificación de la eficacia de aquellas estructuras naturales o artificiales que se interponen en la propagación del oleaje.

Son múltiples las aproximaciones realizadas a este problema. Sin embargo, como se desprende de un reciente repaso a la literatura, el método del desarrollo en serie de autofunciones (MDSA) se muestra como una herramienta matemática potente a la hora de calcular la incidencia que la presencia de un obstáculo tiene sobre la propagación del oleaje. A pesar de ser una técnica ya conocida y aplicada desde hace algunos años, ha sido retomada por varios investigadores, mejorándola sustancialmente y posibilitando la solución de muchos problemas de importancia en la Ingeniería Oceanográfica.

Ante todo, hay que mencionar que dicho método no es, ni mucho menos, la panacea universal a nuestros problemas. Sin embargo, siempre y cuando el proyectista sea consciente de las limitaciones que dicho método presenta, el

* Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas. Departamento de Ciencias y Técnicas y del Medio Ambiente. Universidad de Cantabria.

** Recibido en ROP: enero 1993.

(MDSA) puede considerarse como una herramienta útil y de sencilla aplicación, capaz de dar una primera y rápida aproximación de la interacción oleaje-obstáculo.

Como ya se ha dicho anteriormente, varios han sido los investigadores que han aplicado esta técnica anteriormente en la Ingeniería Oceanográfica: Sollitt y Cross (1972), Dalrymple, Losada y Martin (1991), Dalrymple y Martin (1991), Losada (1991), Roldán (1992), etc.

En este artículo pretendemos presentar los fundamentos básicos de esta técnica, haciendo hincapié en sus ventajas y limitaciones, presentando su aplicación a múltiples casos de muy diferente naturaleza y que demuestran la flexibilidad y potencia del mismo. Los resultados se comparan con los datos teóricos obtenidos mediante otros métodos, así como datos experimentales de otros autores.

2. Fundamentos Generales del Método

El desarrollo detallado de los elementos matemáticos del (MDSA) va más allá de la intención perseguida en este artículo, y puede encontrarse en la bibliografía adjunta o en cualquier texto de ecuaciones diferenciales.

En general, el problema que vayamos a abordar se caracterizará por la presencia de un «obstácu-

El método MDSA puede considerarse como una herramienta útil y de sencilla aplicación, capaz de dar una primera y rápida aproximación de la interacción oleaje-obstáculo

lo», cuya naturaleza determinaremos posteriormente, en el camino de propagación del oleaje. En una primera aproximación vamos a asumir que nuestro oleaje puede ser modelado mediante un tren monocromático de ondas incidiendo oblicuamente sobre el obstáculo, y estudiaremos por tanto el problema mediante teoría lineal.

El dominio de estudio puede ser dividido en diferentes regiones, como veremos más adelante. Asumiendo fluido incompresible y movimiento irrotacional, en cada región podemos definir una ecuación de Laplace y sus correspondientes condiciones de contorno.

La resolución de el problema de contorno definido en cada una de las regiones puede realizarse aplicando el método de separación de las variables. Dicha separación reduce la ecuación de Laplace en derivadas parciales, a un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas totales, en cada una de las variables que definen este problema.

Generalmente, los nuevos problemas de contorno que surgen de realizar la separación de variables, tienen estructura de problema de Sturm-Liouville, dado que son ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas con condiciones de contorno lineales y homogéneas.

Es sabido que a todo problema de Sturm-Liouville puede asociarse un conjunto completo de autofunciones que permite expresar la solución del problema en forma de desarrollo en serie de dichas autofunciones. Una de las propiedades fundamentales de estas autofunciones es su ortogonalidad, característica que utilizaremos en la resolución del problema.

Dado que la solución al problema global debe ser continua, es necesario imponer la continuidad de la solución en las interfases definidas entre las regiones adyacentes. Las condiciones de compatibilidad que se imponen son: la continuidad del flujo de masa y de las presiones.

En regiones adyacentes, en las cuales el problema de propagación sea el mismo y por tanto las autofunciones sean iguales (p.e. placas infinitamente delgadas), es necesario definir una condición mixta de compatibilidad (Dalrymple y Martin, (1991) y Losada, (1991)), basada en el concepto de «series duales», definido por Sneddon (1966).

El potencial en cada región en las que hemos dividido el problema global puede separarse de la siguiente forma:

$$\Phi_i(x, y, z, t) = R[\phi(x, y)]I_i(z)e^{i\sigma t} \quad (2.1)$$

donde

$$I_i = \frac{ig}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2.2)$$

donde R significa parte real, g es la aceleración de la gravedad, T es el período de la onda, t es la variable tiempo y $\sigma = 2\pi/T$, la frecuencia de la onda. El número de onda en cada región, k_i , satisface la ecuación de la dispersión

$$\Gamma_i = k_i h \tanh k_i h \quad (2.3)$$

con

$$\Gamma_i = \frac{\sigma^2 h}{g} \quad (2.4)$$

Asumiendo profundidad constante en todas las regiones, la ec. (2.3) tiene raíces reales k_{i1} , donde $k_{i1} \geq 0$ y un número infinito de raíces imaginarias puras, k_{im} , con $m \geq 1$.

Como es evidente, cada uno de los potenciales deberá satisfacer las condiciones laterales, de fondo y superficie libre correspondientes en cada caso.

3. Dique Vertical con Espaldón

3.1 Desarrollo Teórico

Consideremos la interacción de un tren de ondas incidiendo oblicuamente sobre una estructura porosa homogénea, isótropa, vertical, de ancho b , y altura, a , coronada con un espaldón impermeable, entre dos regiones fluidas de profundidad constante, h . (Fig. 1)

Las características del medio poroso son: la porosidad ε , el coeficiente lineal de fricción, f y un término inercial, s (Sollitt y Cross, (1972)). Para medio poroso siempre tomamos, $s=1$.

El tren de ondas es parcialmente reflejado y parcialmente transmitido a través del medio poroso, mientras que el movimiento va amortiguándose con s .

Podemos definir un potencial para cada una de las regiones fluidas: Φ_1 en la región anterior al dique y Φ_3 en la región posterior.

En el medio poroso bajo el espaldón el movimiento del fluido definido para la velocidad de filtración, puede también describirse mediante una función potencial, Φ_2 (Sollitt y Cross, (1972)). En cada una de las regiones se define un problema de contorno regido por la ecuación de Laplace y sus correspondientes condiciones de contorno.

Las condiciones de compatibilidad en las interfases ($x=0$ and $x=b$) son en $x=0$:

No flujo en el espaldón:

$$\Phi_{1x} = 0 \text{ en } -h + a < z \leq 0 \quad (3.1)$$

Continuidad de la velocidad:

$$\Phi_{1x} = \varepsilon \Phi_{2x} \text{ en } -h < z \leq -h+a \quad (3.2)$$

Continuidad de la presión:

$$\Phi_1 = (s - if)\Phi_2 \text{ en } -h < z \leq -h+a \quad (3.3)$$

en $x=b$:

No flujo en el espaldón:

$$\Phi_{3x} = 0 \text{ en } -h+a < z \leq 0 \quad (3.4)$$

Continuidad de la velocidad:

$$\varepsilon \Phi_{2x} = \Phi_{3x} \text{ en } -h < z \leq -h+a \quad (3.5)$$

Continuidad de la presión:

$$(s-if)\Phi_2 = \Phi_3 \text{ en } -h < z \leq -h+a \quad (3.6)$$

Estas condiciones garantizan la continuidad de la solución entre regiones adyacentes.

y, para incidencia oblicua:

$$\Phi_2(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \left\{ A_n e^{-z\sqrt{K_n^2 + \lambda^2}} + B_n e^{(z-b)\sqrt{K_n^2 + \lambda^2}} \right\} \quad (3.10)$$

A_n y B_n son las amplitudes complejas de las ondas en el interior de la estructura porosa.

La dependencia con la profundidad viene dada ahora por

$$P_n(z) = \cos K_n(h+z) \quad (3.11)$$

donde $\{\cos K_n(h+z), n=0, 1, 2, \dots\}$ es un conjunto completo de funciones ortogonales en el dominio $-h \leq z < -h+a$.

En el medio poroso bajo el espaldón K_n satisface la relación

$$K_n = \frac{n\pi}{a} \begin{cases} \text{incidencia normal: } n=1, 2, 3, \dots \\ \text{incidencia oblicua: } n=0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.12)$$

3.2. Solución

Aplicando el método de separación de las variables, obtenemos las expresiones de los potenciales en cada región. En la Región 1, el potencial ε_1 (p.e. Dalrymple, Losada, Martín, (1991)), viene dado por

$$\Phi_1(x, z) = I_0(z) \left\{ e^{-iz\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}} + R_0 e^{iz\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) R_n e^{iz\sqrt{k_n^2 - \lambda^2}} \quad (3.7)$$

donde la suma infinita representa una familia de modos evanescentes necesaria para satisfacer las condiciones de compatibilidad en las interfaces.

$\lambda = k_y = k \sin \theta$ es la componente del número de onda, k , del tren de ondas incidente en la dirección y .

El subíndice 0 se refiere al modo progresivo que se propaga hacia el dique reflejándose en el mismo.

Los n modos evanescentes se disipan rápidamente a medida que se alejan del dique y vienen caracterizados por las infinitas raíces imaginarias de la ecuación de las dispersión.

R_0 es el coeficiente de reflexión complejo y asumimos que la onda incidente tiene amplitud unidad.

La dependencia con la profundidad viene dada por $I_n(z)$, que se expresa como

$$I_n(z) = \frac{ig}{\sigma} \frac{\cosh k_n(h+z)}{\cosh k_n h} \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

Para un problema de Sturm-Liouville es conocido que las autofunciones $\{\cosh k_n(h+z), n=0, 1, 2, \dots, N\}$, correspondientes a distintos autovalores, K_n , son ortogonales.

En la Región 2 el potencial de velocidades depende del ángulo de incidencia.

Para incidencia normal:

$$\Phi_2(x, z) = [A_0 x + B_0] + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z) \left\{ A_n e^{-z\sqrt{K_n^2 + \lambda^2}} + B_n e^{(z-b)\sqrt{K_n^2 + \lambda^2}} \right\} \quad (3.9)$$

con el fin de cumplir la condición de no flujo vertical en $z = -h, -h+a$.

Finalmente, en la Región 3:

$$\Phi_3(x, z) = T_0 I_0(z) e^{-i(z-b)\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n I_n(z) e^{-i(z-b)\sqrt{k_n^2 - \lambda^2}} \quad (3.13)$$

donde I_0 e I_n se definen como anteriormente ec.(3.8). T_0 es el coeficiente de transmisión complejo y las $T_n, n < 0$ son las amplitudes complejas de los modos evanescentes en la parte posterior del dique.

Con el fin de satisfacer las condiciones de compatibilidad en las interfaces definidas por $(x=0$ y $x=b)$, se substituyen los potenciales $\Phi_i (i=1, 2, 3)$ en las ecuaciones (3.1) a (3.6), obteniéndose un sistema de ecuaciones en R_0, R_n, T_0, T_n, A_n y B_n . Utilizando la ortogonalidad de las funciones I_n en el dominio $(-h, 0)$ y de P_n en $(-h, -h+a)$ se quita la dependencia en z del sistema, simplificando notablemente el algebra del mismo.

El sistema de ecuaciones se hace finito estableciendo unos límites finitos para M y N que son el número de modos evanescentes en el agua y en la región porosa respectivamente.

Truncando las series, obtenemos un sistema de $2(M+1) + 2(N+1)$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas.

3.3. Solución de onda plana

La solución de onda plana simplifica la técnica de resolución notablemente, dado que asume que

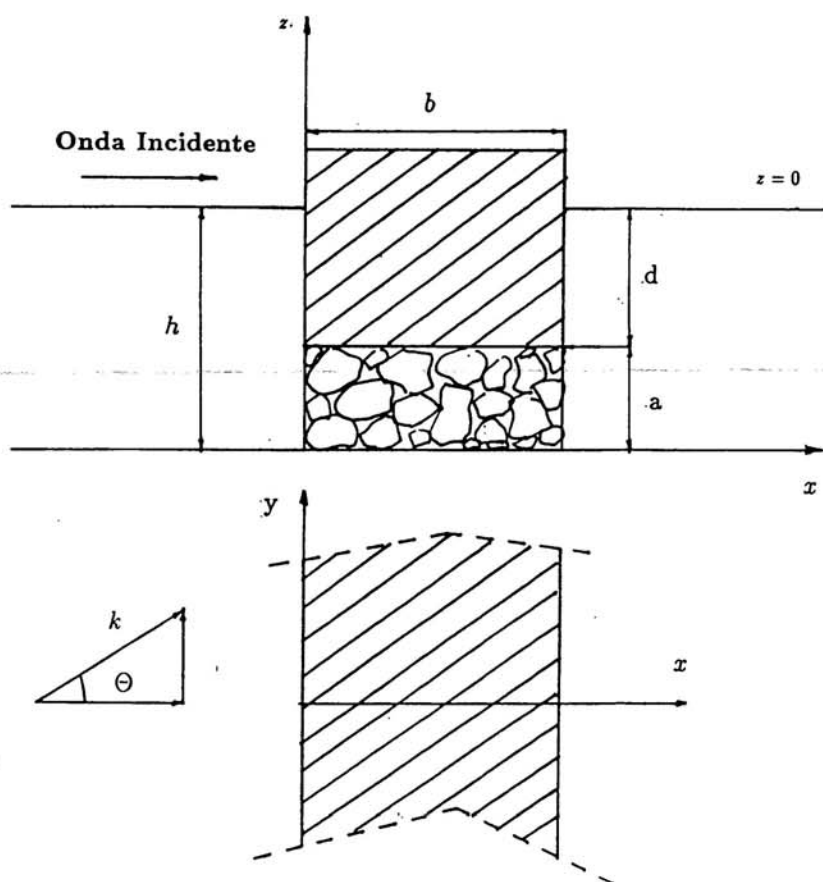


Figura 1. Dique Vertical con Espaldón.

sólo es necesario emplear el modo más progresivo en cada región para compatibilizar las soluciones.

Dalrymple, Losada y Martín (1991), demostraron que dicha aproximación es válida para $kh < 1.5$.

Con este procedimiento, obtenemos un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. La principal ventaja es que puede obtenerse expresiones analíticas de R_o y T_o .

3.4. Presiones bajo el Espaldón

Un factor importante en el diseño de espaldones es la acción de las subpresiones debido al oleaje. Los métodos empleados en la actualidad asumen que la ley de presiones es lineal, lo cual es incorrecto, como ha sido demostrado por Liu (1985) analíticamente y por otros investigadores de forma experimental.

Sollitt y Cross (1972), obtuvieron la siguiente ecuación de Bernoulli linealizada:

$$s \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + f\sigma\Phi = 0 \quad (3.14)$$

donde ρ , es la densidad del agua. Substituyendo la expresión de Φ_2 en (3.14), resulta el siguiente campo de presiones en la Región 2:

$$\frac{P_2}{\rho} = -\sigma(is + f)\Phi_2 - gz \quad (3.15)$$

La fuerza vertical, F_v , inducida por el oleaje incidente se evalúa integrando la presión a lo largo de la base del espaldón, con lo que llegamos a:

$$F_v = -\rho\sigma(is + f) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(A_n + B_n) \frac{1 - e^{-b\sqrt{K_n^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{K_n^2 + \lambda^2}} \right\} \quad (3.16)$$

3.5. Resultados

Los resultados obtenidos concuerdan favorablemente con aquellos obtenidos por otros investigadores para incidencia normal, utilizando otras técnicas.

La técnica variacional empleada por Black (1970), Fig. 2, presenta idénticos resultados que la teoría presente para los coeficientes de reflexión y de transmisión utilizando la solución completa.

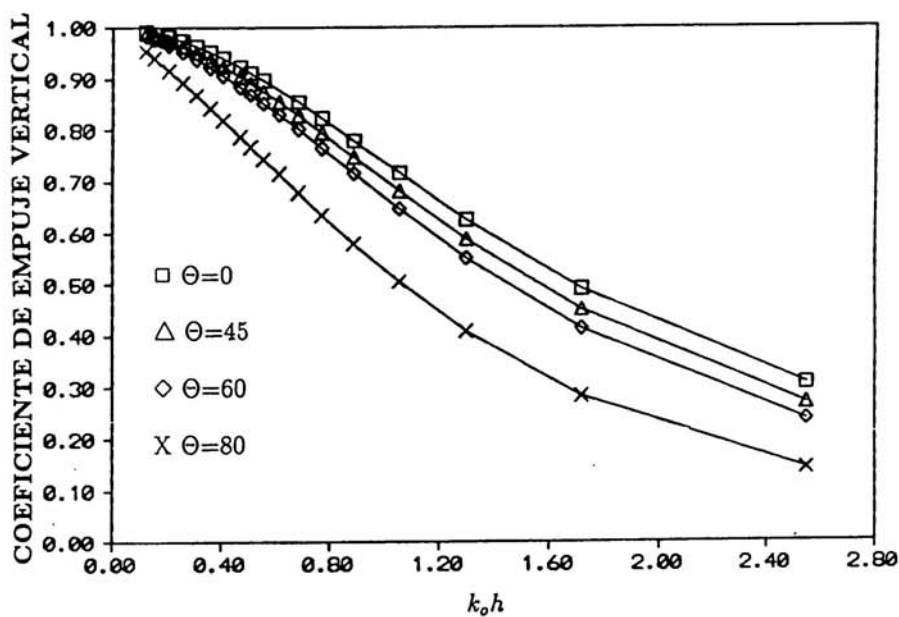
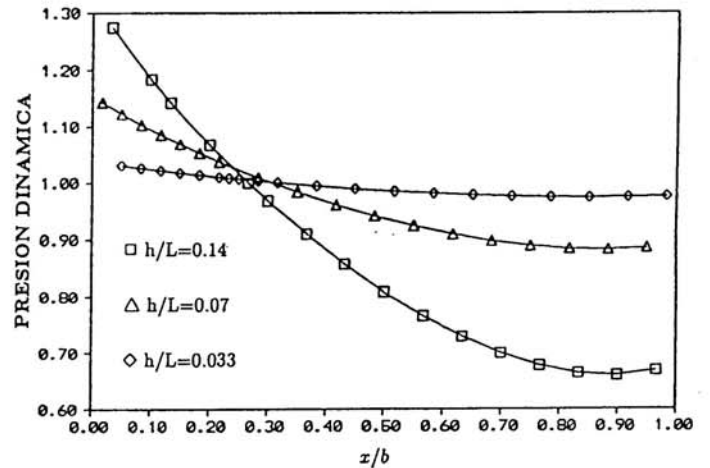
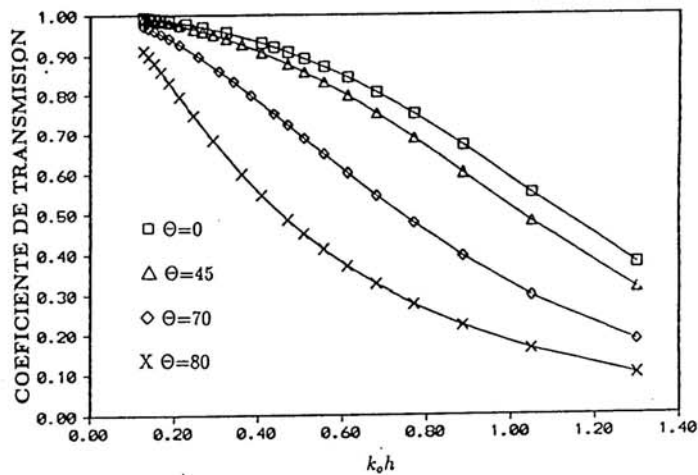
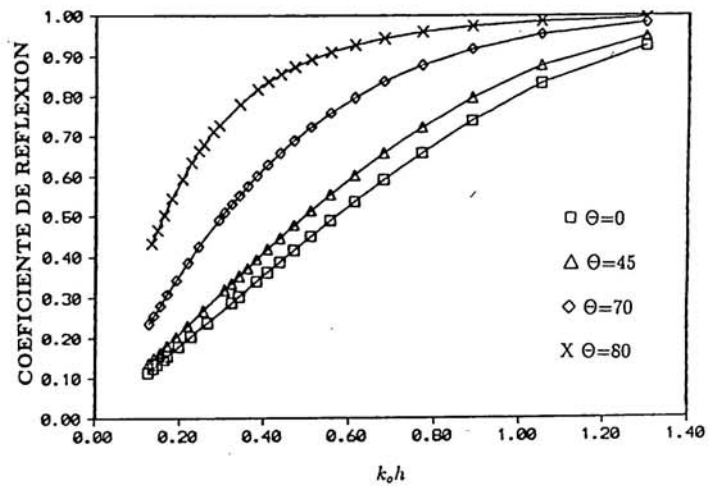
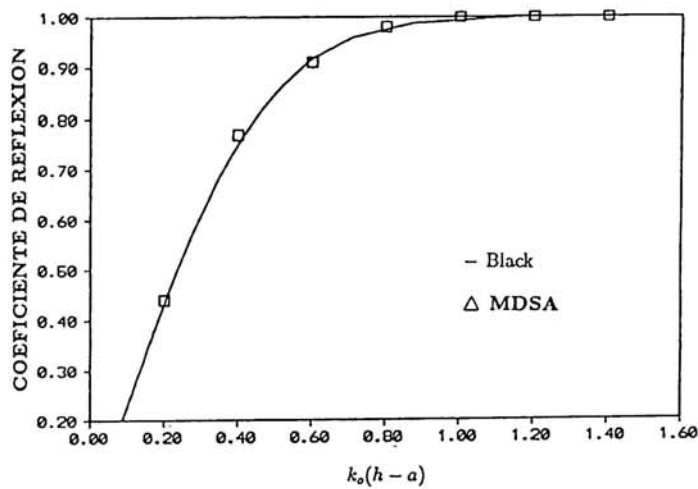
En las Figs. 3 y 4 se presenta los coeficientes de reflexión y transmisión frente a k_0h para la solución completa y para varios ángulos de incidencia. Los resultados muestran que ondas de períodos más cortos experimentan más reflexión y menos transmisión para cualquier ángulo de incidencia. Asimismo, se puede observar que mayores ángulos de incidencia conducen a un aumento de la reflexión con la consiguiente reducción en la transmisión.

La Fig. 5 presenta el comportamiento de la distribución dinámica de presiones, $p/\rho g a_i$, bajo el espaldón como una función del ángulo de incidencia y de h/L , siendo a_i la amplitud de la onda incidente. Se puede observar que la distribución de la presión no sigue una ley lineal. Asimismo se hace notar que aquellas distribuciones que cancelan la presión en la parte posterior del espaldón generan un diseño con un factor de inseguridad importante. Mayores ángulos de incidencia dan lugar a subpresiones menores.

En la Fig. 6 se presenta el coeficiente adimensional correspondiente a la fuerza de empuje vertical, $F_v/(\rho g b)$. La Fig. 6 demuestra que para ondas más largas, las fuerzas verticales de empuje disminuyen; además, dicha fuerza disminuye al aumentar el ángulo de incidencia.

4. Placas Verticales de Pared Delgada

Las placas verticales de pared delgada pueden ser utilizadas como elementos para la reducción



De izquierda a derecha y de arriba a abajo.

Figura 2. Resultados obtenidos comparados con la teoría de Black. $b/d=0.5$, $h/d=2$, $f=0$, $\epsilon=1$, $\theta=0^\circ$

Figura 3. Coeficiente de Reflexión vs. kh para diferentes ángulos de incidencia. $h/b=0.2$, $h/d=4$, $f=0.5$, $\epsilon=0.45$

Figura 4. Coeficiente de Transmisión vs. kh para diferentes ángulos de incidencia. $h/b=0.2$, $h/d=4$, $f=0.5$, $\epsilon=0.45$

Figura 5. Distribución de la Presión Dinámica para diferentes h/L . $h/b=1.66$, $h/d=1.25$, $f=0$, $\epsilon=1$

Figura 6. Coeficiente de Empuje vertical vs. kh para distintos ángulos de incidencia. $h/b=2$, $b/d=1.66$, $f=1$, $\epsilon=0.5$

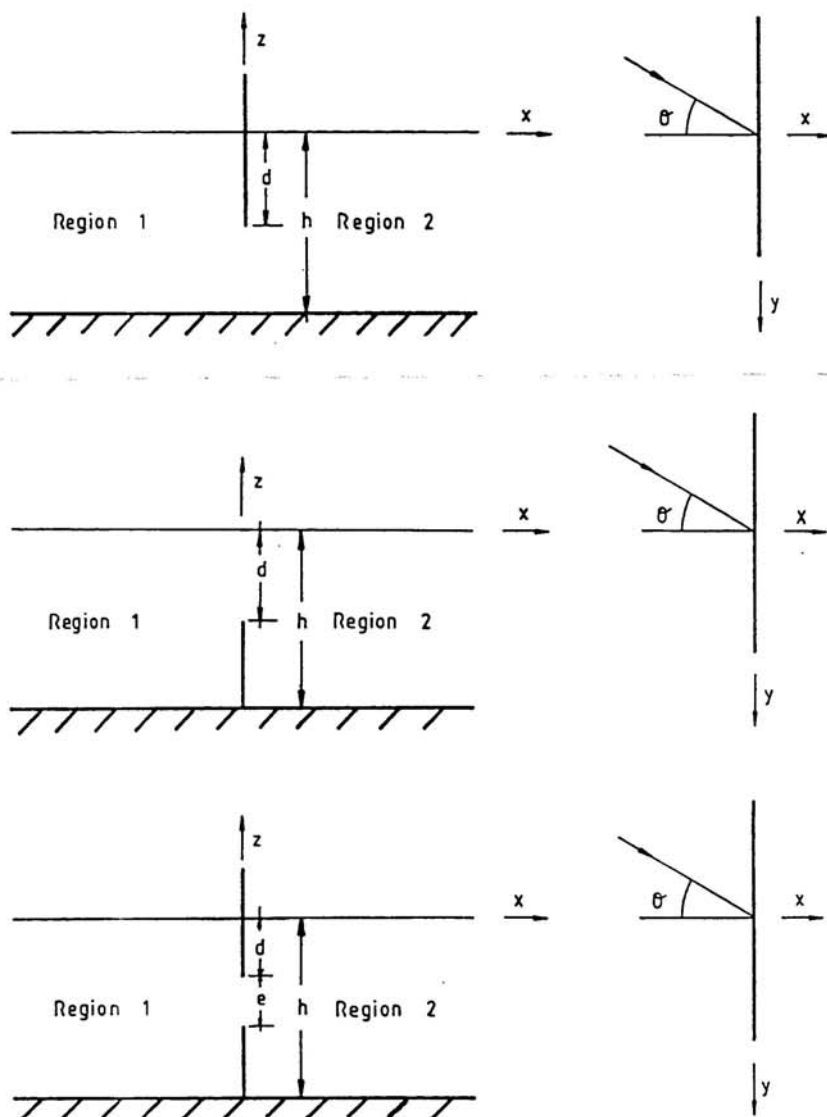


Figura 7. Barreras Verticales Rígidas.

de energía fundamentalmente en dos situaciones: aquellas en las que nos encontremos en áreas de poca energía y allí donde nuestra limitación de espacio es importante. Quiere esto decir, que este tipo de elemento, en cualquiera de sus tres modalidades, Fig. 7, es ideal para disipar energía en el interior de dársenas.

Losada, 1991, aplicando el MDSA, estudió las diferentes situaciones que se presentan al ubicar una placa vertical, infinitamente delgada, en el camino de la propagación de un tren de ondas lineal. Dado que las autofunciones a ambos lados de la placa son las mismas (se supone igual profundidad de propagación en las dos regiones), el problema se resuelve elaborando unas condiciones de acuerdo, denominadas duales, en las que se combina la conservación de flujo y presión en la abertura y aplicando una técnica de minimización para el error cometido.

Se considera un tren lineal de ondas propagándose por una profundidad constante, h , con una

amplitud unidad, formando un ángulo θ con la normal a la barrera.

Para un fluido no viscoso e incompresible y flujo irrotacional, el campo ondulatorio incidente se puede representar por un potencial de velocidades $\Phi(x, y, z, t)$, que satisface la ecuación de Laplace.

Debido a la delgadez de la placa, el dominio de estudio $-\infty < x < \infty$, se puede dividir en dos regiones, $x < 0$, región incidente, y, $x > 0$, región de transmisión estando la placa ubicada en $x = 0$. En cualquiera de las dos regiones, es válida la ecuación de Laplace y las condiciones cinemática y dinámica de superficie libre y la condición cinemática en el fondo.

Además, la condición de no flujo a lo largo de la placa requiere que:

$$n \cdot \text{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (4.1)$$

donde n representa el vector unitario normal a la superficie de la barrera. En este trabajo solamente se considera el caso de barreras verticales, en consecuencia, la condición de no flujo es:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

En el infinito se debe satisfacer la condición de radiación de Sommerfeld, de tal forma que las ondas producto de la perturbación del tren incidente por la presencia de la placa se comporten como ondas progresivas:

$$\lim_{kz \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \pm ik \right] \Phi = 0 \quad (4.3)$$

4.1. Solución

Una solución válida para la región incidente, $x < 0$ es:

$$\phi_1(x, z) = I_1(z) e^{-i\sqrt{k^2 - \lambda^2}x} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) R_n e^{i\sqrt{k_n^2 - \lambda^2}x} \quad (4.4)$$

$$I_n(z) = \frac{ig}{2\sigma} \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh k_n h} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

$$\Gamma = k_n h \tanh k_n h \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

El primer término representa el tren de ondas incidente, mientras que el segundo término contiene el tren de ondas reflejado en la barrera, $n = 1$, e infinitos modos evanescentes, $n > 1$, que al

corresponder con las raíces imaginarias de la ecuación de dispersión decaen rápidamente al alejarse de la barrera. El coeficiente R_1 es el coeficiente de reflexión del modo progresivo (onda plana) y viaja en el sentido negativo del eje x .

La solución en la región de la transmisión, $x > 0$, para el caso de placa aislada es:

$$\phi_2(x, z) = I_1(z)e^{-i\sqrt{k^2 - \lambda^2}x} - \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z)B_n e^{-i\sqrt{k_n^2 - \lambda^2}x} \quad (4.7)$$

donde B_1 es el coeficiente del modo progresivo que modifica el modo principal incidente; los restantes coeficientes B_n , con $n > 1$, representan los modos evanescentes.

Obligando a que el flujo en la placa, $x = 0$, sea igual en ambas regiones, se obtiene:

$$\begin{aligned} -iq_1 I_1(z) + i \sum_{n=1}^{\infty} R_n I_n(z) q_n &= \\ = -iq_1 I_1(z) + i \sum_{n=1}^{\infty} B_n I_n(z) q_n \end{aligned} \quad (4.8)$$

siendo:

$$q_n = \sqrt{k_n^2 - \lambda^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

De aquí se deduce que:

$$R_n = B_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

Esta ecuación tiene tres importantes implicaciones que han sido puestas de manifiesto por Dalrymple y Martín (1990), para el caso de propagación a través de un sistema de diques exentos.

1. Los trenes de onda provocados por la presencia de la placa son simétricos alrededor del eje z .
2. La componente de la velocidad en el eje x es la misma a ambos lados de la placa a lo largo del eje y .
3. Teniendo en cuenta que R_1 es el coeficiente de reflexión del modo incidente y $T_1 = 1 - B_1$, el coeficiente de transmisión del modo progresivo, se puede obtener una relación entre los coeficientes de reflexión y transmisión:

$$R_1 + T_1 = 1 \quad (4.11)$$

4.2. Condiciones de Acuerdo: Series duales

Las condiciones a satisfacer por ambos potenciales, en la sección $x = 0$ son:

$$\Phi_{ix} = 0 \quad i = 1, 2 \quad \text{en la placa} \quad (4.12)$$

$$\Phi_{1x} = \Phi_{2x} \quad \text{en el hueco} \quad (4.13)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{en el hueco} \quad (4.14)$$

Haciendo uso del potencial aguas arriba, la ecuación (4.12) se escribe:

$$-iq_1 I_1(z) + i \sum_{n=1}^{\infty} R_n I_n(z) q_n = 0 \quad \text{en la placa} \quad (4.15)$$

La ecuación (4.13) se cumple automáticamente, tal y como se ha visto anteriormente. Finalmente, la condición (4.14) se puede expresar como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n I_n(z) = 0 \quad \text{en el hueco} \quad (4.16)$$

Las dos condiciones (4.13) y (4.14) se conocen con el nombre de series duales o relaciones duales; Sneddon (1966). Para obtener la solución del problema, es decir, evaluar los coeficientes R_n , es necesario resolver el sistema de ecuaciones definido por éstas.

Sin embargo, el procedimiento a seguir no es el mismo que si se dispusiera de dos series distintas de autofunciones, una a cada lado de la placa, es decir, una para cada región, como ocurre, por ejemplo, en el caso del dique con espaldón.

En este caso, es necesario combinar ambas condiciones para construir una única condición de acuerdo mixta que especifique el potencial o la velocidad a lo largo del eje z , de manera análoga a lo realizado por Dalrymple y Martín (1991) para el caso de trenes de onda propagándose por un sistema de diques exentos. Llamando a esta condición mixta $G(z)$ para $-h < z < 0$, se tiene:

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n I_n(z) \quad \text{en el hueco} \quad (4.17)$$

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n I_n(z) q_n - q_1 I_1(z) \quad \text{en la placa} \quad (4.18)$$

Para determinar R_n , se puede seguir diversas técnicas, en particular la de los mínimos cuadrados. Para ello, es necesario que:

$$\int_{-h}^0 |G(z)|^2 dz \quad (4.19)$$

tenga un mínimo.

Minimizando esta integral con respecto a cada R_n se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\int_{-h}^0 G^* \frac{\partial G}{\partial R_m} dz = 0 \quad m = 1, 2, \dots, \infty \quad (4.20)$$

donde:

$$\frac{\partial G}{\partial R_m} dz = I_m(z) \quad \text{en el hueco} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial G}{\partial R_m} dz = q_m \cdot I_m(z) \quad \text{en la placa} \quad (4.22)$$

G^* : complejo conjugado de $G(z)$.

Truncando la ecuación (4.20) en N términos y resolviendo para los N valores de R_n simultáneamente, se obtiene una ecuación matricial de dimensiones, $N \times N$, que puede resolverse numéricamente.

El número de términos, N , de la serie depende del problema estudiado. En general, con 15 términos es suficiente para que el error cometido sea despreciable.

4.3. Resultados

La Fig. 8 presenta el coeficiente de transmisión para una placa sumergida desde la superficie como una función de d/h y $kh = 2.136$ para incidencia normal. Los resultados obtenidos se comparan con los experimentales de Wiegel (1960) y los teóricos calculados por Liu (1982) mediante integrales de contorno.

En la Fig. 9 se puede observar la variación con el ángulo de incidencia de la máxima fuerza ejercida sobre una barrera sumergida desde la superficie para, $d/h = 0.3$, $kh = 2.136$ y $N=50$. Dicha fuerza está adimensionalizada por F_w , que se define como $F_w = (\rho g a / kh) \tanh(kh)$.

Figura 8. Coeficiente de Transmisión vs. d/h para distintas Soluciones. $kh=2.136$, $\theta=0^\circ$. A la derecha Figura 9. Fuerza adimensional de Empuje total sobre la Placa vs. ángulo de incidencia. $kh=2.136$, $d/h=0.3$

5. Canal con Paredes Rugosas

Un puerto puede definirse como un área parcialmente cerrada, conectada al mar a través de un abertura. Algunas veces, dicha conexión se reali-

za a través de un canal delimitado generalmente mediante diques porosos que sirven para controlar la propagación hacia el interior de la dársena. Otra forma de controlar la agitación en estos canales es el uso de paredes rugosas, Battjes (1965). La rugosidad se consigue mediante la introducción de placas colocadas de forma periódica que se comportan como elementos disipadores de energía. La eficacia de estos disipadores se reduce cuando se producen fenómenos resonantes entre los mismos.

En este caso, realizamos una expansión de las autofunciones para estudiar la propagación de un tren de ondas en un canal dotado con paredes rugosas, Fig. 10. La expansión se realiza sobre el ancho del canal y por tanto de diferente manera que en los casos anteriores.

La sección del canal es $2b$ y el hueco entre placas es $2l$. La distancia entre dos pares consecutivos de placas es s , siendo el número de pares de placas N . Se supone las placas infinitamente delgadas al igual que en el caso anterior.

Definimos como Región 1 aquella en la que $x \leq 0$. Entre cada dos placas consecutivas definimos una nueva región, siendo la Región $N+1$ la que se extiende en $x (N-1)s$.

Assumiendo teoría lineal de ondas podemos resolver el problema si conocemos el potencial, $\phi(x, y, z, t)$, en la región j , para $j = 1, 2, \dots, N+1$. En cada región de profundidad constante, h , deberán satisfacerse la ecuación de Laplace, las condiciones de superficie libre y las condiciones de no flujo en el fondo y en las paredes laterales del canal.

Finalmente, asumimos que la región $N+1$ es totalmente absorbente para lo cual será necesario especificar la condición de radiación en la misma.

5.1. Condiciones de Compatibilidad

Como en los casos anteriores será necesario asegurar la continuidad de la solución en las interfases.

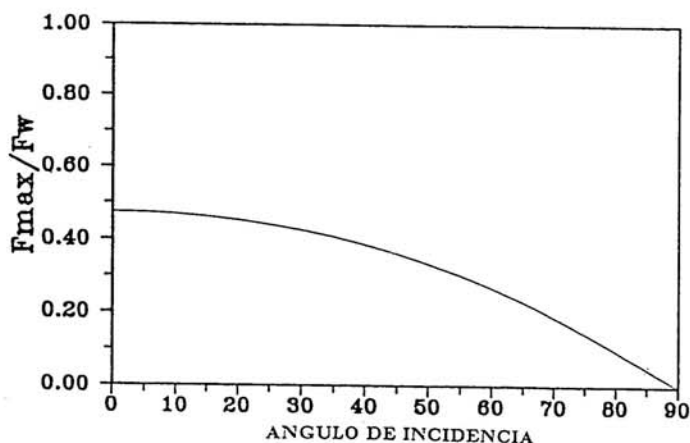
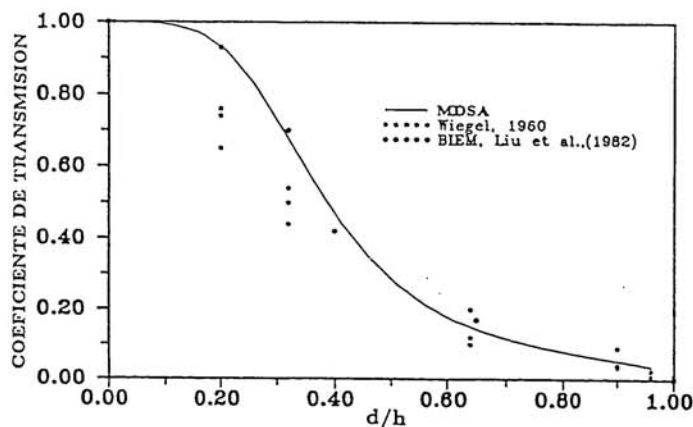
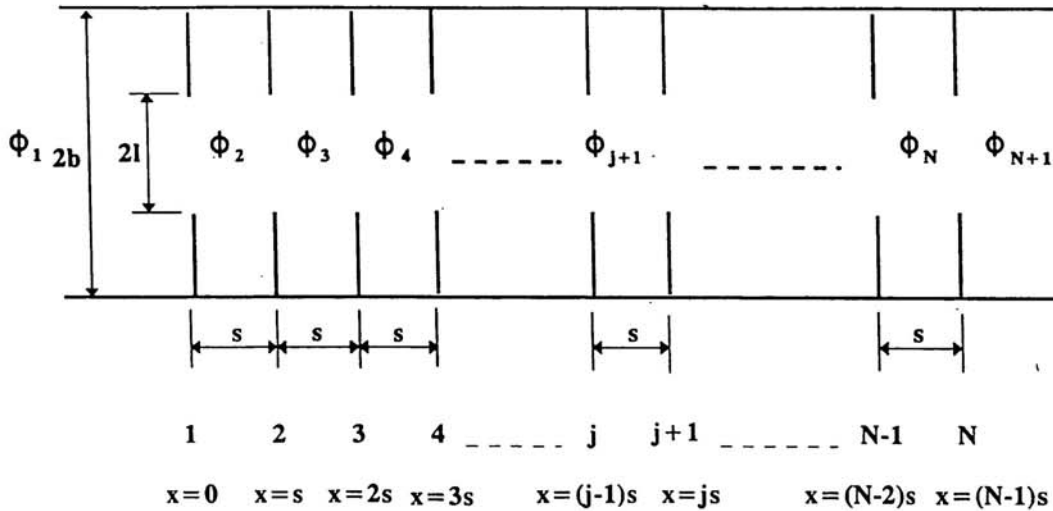


Figura 10. Canal con barreras laterales.



Las condiciones se expresan en este caso como,

$$(\phi_j)_x = (\phi_{j+1})_x = 0 \quad \text{en } x = (j-1)s \quad (5.1)$$

$$y \quad l \leq |y| \leq b$$

$$(\phi_j)_x = (\phi_{j+1})_x \quad \text{en } x = (j-1)s \quad (5.2)$$

$$y \quad |y| \leq l$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi_j - \phi_{j+1}) = \frac{f}{2g}(\phi_{j+1})_x |(\phi_{j+1})_x| + \frac{f}{g}(\phi_{j+1})_{xt}, x = (j-1)s \quad y \quad |y| \leq l \quad (5.3)$$

para $j = 1, 2, \dots, N+1$

Esta última condición se ha obtenido a partir de la ecuación de Bernoulli basándose en el modelo para pérdidas de carga para ondas largas de Mei, Liu e Ippen, (1974).

f y L son dos coeficientes empíricos relacionados con la pérdida de energía cinética e inercia aparente respectivamente en cada par de placas. Siguiendo a Mei (1974), utilizaremos la siguiente expresión para $f: f = [(2b/c \cdot 2l) - 1]^2$, con $c = 0.62 + 0.38(l/b)^3$.

Losada (1991) demostró que en la mayor parte de los casos el término debido a la inercia aparente es despreciable, por lo que trabajaremos únicamente con el término debido a la fricción.

Además, para ser consecuentes con la aplicación de la teoría lineal de ondas, linelizaremos la ec. (5.3); por tanto:

$$\phi_j - \phi_{j+1} = \frac{-ig}{\sigma} C_{ej} (\phi_{j+1})_x \quad (5.4)$$

donde C_{ej} es un coeficiente de fricción equivalente. Siguiendo a Mei (1974),

$$C_{ej} = \frac{f}{2g} \frac{8}{3\pi} \left| \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right| \quad (5.5)$$

que depende del potencial, no conocido hasta que la solución haya sido obtenida por completo. Por ello será preciso utilizar un sistema iterativo de resolución.

Los potenciales se expresan como,

$$\phi_1(x, y) = \sum_{n=0} [A_n^{(1)} e^{-iq_n x} + B_n^{(1)} e^{iq_n x}] \cos(n\lambda y) \quad (5.6)$$

$$\phi_j(x, y) = \sum_{n=0} [A_n^{(j)} e^{-iq_n (x-(j-2)s)} + B_n^{(j)} e^{iq_n (x-(j-1)s)}] \cos(n\lambda y) \quad (5.7)$$

$$\phi_{N+1}(x, y) = \sum_{n=0} [A_n^{(N+1)} e^{-iq_n (x-(N-1)s)}] \cos(n\lambda y) \quad (5.8)$$

$$\text{donde } q_n = \sqrt{k^2 - (n\lambda)^2}, \lambda = \pi/b.$$

Las autofunciones correspondientes a este problema $\cos(n\lambda y)$, $n = 1, 2, \dots, \infty$ forman un conjunto ortogonal completo en el dominio $(-b \leq y \leq b)$.

Substituyendo la expresión de los potenciales en la condición de flujo ec. (5.2), obtenemos una relación entre los $B_m^{(j)}$ y $A_m^{(j)}$.

Con las dos condiciones restantes, ecs. (5.1) y (5.3), es necesario definir una condición mixta que viene dada por:

$$G(y) = 0 \quad \text{en } 0 \leq |y| \leq b \quad (5.9)$$

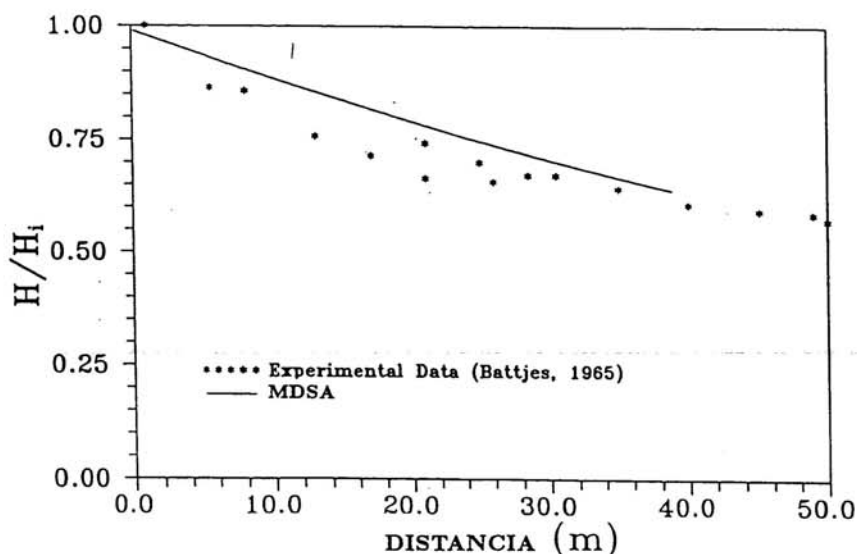


Figura 11. Evolución de la altura de ola en el canal. $T=1.98$ s, $h=0.6$ m, $2b=3.0$ m, $2l=2.9$ m, $s=0.2$ m, $N=195$, $M=5$

Para determinar los $A_n^{(i)}$ minimizamos

$$\int_{-l}^l |G(y)|^2 dy \quad (5.10)$$

respecto a todas las $A_n^{(i)}$, llegando a un sistema de ecuaciones, que truncando las series a M términos y resolviendo los $M \cdot N$ valores de $A_m^{(i)}$ simultáneamente, llegamos a un sistema complejo que puede resolverse mediante cualquier subrutina a tal efecto.

Se define el coeficiente de reflexión, C_r , como el valor absoluto del coeficiente más progresivo $B_0^{(1)}$ en la Región 1. Análogamente, el coeficiente de transmisión se define como el valor absoluto del coeficiente más progresivo $A_0^{(N+1)}$ en la Región $N+1$.

6. Resultados

Los resultados obtenidos mediante este modelo se comparan en la Fig. 11 con los datos experimentales de Battjes (1965). En dicha figura se muestra la evolución de la altura de ola promediada a lo largo del canal para el siguiente caso, $h=0.6$ m, $T=1.98$ s, $2l=2.9$ m, $s=0.2$ m, $N=195$ placas y $M=5$.

Como se puede comprobar, existe una buena correspondencia entre los resultados experimentales y los teóricos.

En la Fig. 12 se presenta las isolíneas de altura de ola para, $h=0.6$ m, $T=1.373$ s, $2l=2.6$ m, $2b=3.0$ m, $s=0.67$ m, $N=20$ y $M=25$. Para estos parámetros, la altura de 1 m se atenúa hasta los 0.3 m.

7. Otros casos estudiados

A continuación, se relaciona una serie de casos estudiados siguiendo el método expuesto y que se pueden encontrar en la bibliografía que acompaña este artículo.

En teoría lineal:

- Propagación de ondas a través de diques porosos multicapa.
- Propagación y atenuación de ondas sobre un medio poroso.
- Propagación de ondas sobre un dique sumergido impermeable o poroso.
- Reflexión y difracción de trenes monocromáticos de ondas debido a una cuña impermeable. (Losada, 1991).
- Propagación por un canal con una transición brusca y limitado por una barrera porosa.
- Resonancia en dársenas.
- Propagación en estructuras porosas con simetría radial. (Roldán, 1992).

En teoría no lineal:

- Interacción de un tren no lineal de ondas con placas verticales.
- Propagación de un tren de ondas modulado por una pared vertical. (Roldán, 1992)

8. Conclusiones

1. El MDSA es un método sencillo y eficaz para evaluar la eficiencia de distintas estructuras costeras incluso considerando la propagación en medios porosos.

2. Utilizando teoría lineal somos capaces de calcular coeficientes de reflexión y transmisión así como fuerzas sobre las estructuras para oleajes incidendo oblicuamente.

3. La solución de onda plana nos da resultados analíticos sencillos que nos permiten hacer una rápida primera estimación del elemento que estamos diseñando.

4. La solución completa exige únicamente la utilización de una subrutina para la resolución de sistemas de ecuaciones.

5. Se puede considerar efectos de fricción basándose en la formulación semiempírica realizada por Mei et al. (1974).

6. Los resultados obtenidos concuerdan en todos los casos de una manera adecuada con los resultados experimentales o numéricos obtenidos por otros autores.

7. Aunque se ha presentado casos con trenes de ondas monocromáticos, es necesario mencionar que es posible estudiar casos con espectros de oleaje, dado que el hecho de utilizar teoría lineal nos permite aplicar el principio de superposición y, por tanto, sumar los resultados obtenidos para trenes con distintas frecuencias.

8. El hecho de resolver todos los casos en teoría lineal no es una limitación dado que Roldán (1992) ya ha resuelto alguno de estos casos para ondas de amplitud finita y trenes modulados.

9. Como desventaja fundamental presenta la limitación de requerir interfases verticales u hori-

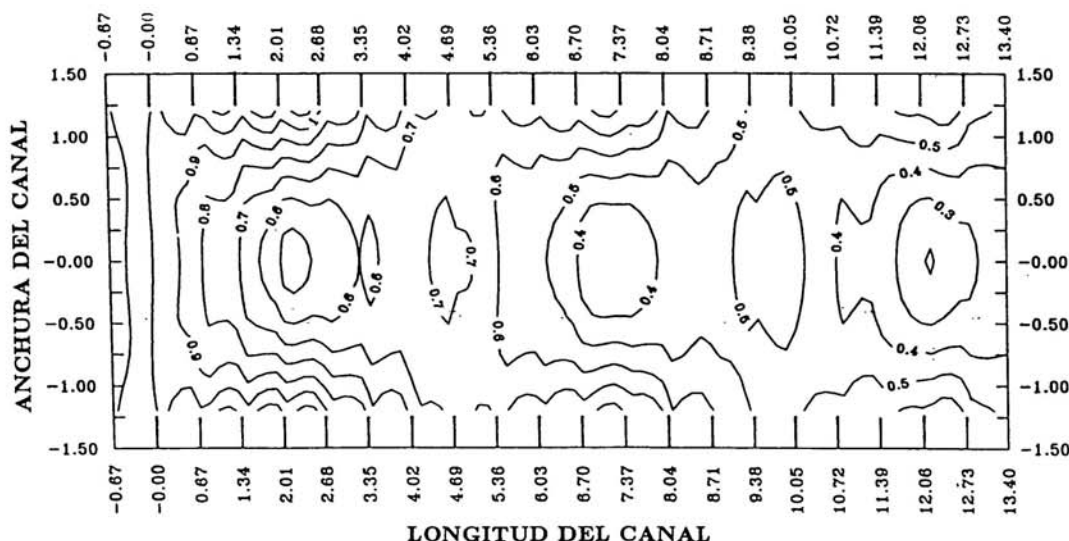


Figura 12. Isolneas de
Altura de Ola.
 $T=1.373$ s, $h=0.6$ m,
 $2b=3.0$ m, $2l=2.6$ m,
 $s=0.67$ m, $N=20$, $M=25$

zontales estando aún los casos de interfases inclinadas sin resolver.

Agradecimientos

I.J.L. ha realizado parte de este trabajo siendo Becario del Programa para Doctores y Tecnólogos en el Extranjero y A.J.R. siendo Becario de F.P.I. del M.E.C.

M.A.L. agradece a la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) por su apoyo a través del proyecto N.º PB89-0381.

Referencias

- Battjes, J.A., 1965. Wave attenuation in a channel with roughened sides. *Special Coastal Engineering Conference*, ASCE, Santa Barbara, California, pgs. 425-460.
- Dalrymple, R.A. y Martin, P.A., 1991. Wave diffraction through offshore breakwaters. *Journal Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 116, N.º 6, pgs. 727-741.
- Liu, P.L.-F. y Abbaspour, M., 1982. Wave scattering by a rigid thin barrier. *Journal Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, N.º 108, pgs. 479-491.
- Liu, P.L.-F., 1987. Resonant reflection of water waves in a long channel with corrugated boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, N.º 179, pgs. 371-381.
- Losada, I.J., Losada, M.A., Dalrymple, R.A., 1990. Oscillatory Flow in granular Media. *Proc. 2nd European Specialty Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, pgs. 259-269.
- Losada, I.J., 1991. Estudio sobre la propagación lineal de un tren de ondas sobre un medio discontinuo. *Tesis Doctoral*, Universidad de Cantabria.
- Losada, I.J., Losada, M.A., Roldán, A.J., 1992. Propagation of oblique incident waves past rigid vertical thin barriers. *Applied Ocean Research*, N.º 14, pgs. 191-199.
- Losada, I.J., Losada, M.A., Dalrymple, R.A., 1991. Water Waves on Crown Breakwaters. *Journal Waterways, Harbors and Coastal Engineering Div.*, ASCE, vol. 119, n.º 4, pgs. 367-380.
- Dalrymple, R.A., Losada M.A. y Martin, P.A., 1991. Reflection and Transmission from porous structures under oblique wave attack. *Journal of Fluid Mechanics*, N.º 224, pgs. 625-644.
- Mei, C.C., Liu, P.L.-F., e Ippen, A.T., 1974. Quadratic loss and scattering of long waves. *Journal Waterways, Harbors and Coastal Engineering Div.*, ASCE, Vol. 100, N.º WW3, pgs. 217-239.
- Roldán, A.J., 1992. Sobre la transformación de un tren de ondas lineal, no lineal y modulado por un medio discontinuo. *Tesis Doctoral*, Universidad de Cantabria.
- Roldán, A.J., Losada, M.A. y Losada, I.J., 1992. Theoretical Study of the wave attenuation in a channel with roughened sides. *Proc. 23rd International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, chapter 213.
- Sneddon, I.N., 1966. Mixed Boundary Value Problems in potential Theory. North Holland Publishing Co., Amsterdam.
- Sollitt, C.K. y Cross, R.H., 1972. Wave transmission through permeable breakwaters. *Proc. 13th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, pgs. 11827-1846.
- Wiegel, R.L., 1960. Transmission of waves past a rigid vertical thin barrier. *Journal Waterways, Harbors and Coastal Engineering Div.*, ASCE, Vol. 86, N.º WW1, paper 2413.