

RUTINAS DE FILTRO SENO AR DE BUTTERWORTH PARA ANÁLISIS DE ESPECTROS DE PAVIMENTOS DE AUTOVÍAS

Manuel J. Melis*
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. M.Sc, MBA

A raíz del reciente Experimento Internacional sobre normalización de medidas de texturas en pavimentos de carreteras, realizado a nivel mundial bajo los auspicios de la Dirección General de Carreteras del MOPTMA en tramos escogidos de carreteras de España y Bélgica, el análisis de señales digitales adquiere cada vez mayor importancia. En este artículo se resume un método para eliminar del perfil longitudinal de una carretera las longitudes de onda no deseadas, de forma que resulte un nuevo fichero de "perfil" modificado en el que solamente figuren las irregularidades o longitudes de onda deseadas, por ejemplo, las que afectan al IRI o a la Megatextura. El filtro digital descrito en profundidad es el autoregresivo seno de Butterworth de orden 2. El objetivo del artículo es que el ingeniero que utilice algún programa comercial tipo MATLAB para filtrar la señal puede conocer en detalle los algoritmos de filtrado y sus bases.

Right after the recent international tentative on the normalization of the different measuring methods of a pavement texture, performed at world wide level in selected sections of Spain and Belgium, under the patronage of the General Roads Division of MOPTMA, the analysis of digital signals gains preferent importance for the evaluation of a highway texture.

This paper summarizes a method to eliminate, on the pavement reference data file, those wavelengths which are not interesting for the analysis, so creating a new "longitudinal profile" only containing the wished-for wavelengths. The digital filter particularly described is the self-regressive sinus of Butterworth order 2. The objective of this paper is that engineers making use of some digital filter MATLAB type programme can know the filtering algorism detail.

1. Introducción

En un anterior artículo [Ref.1] se detallaban las distintas longitudes de onda que afectan a las texturas y regularidad superficial de un pavimento. Se desarrollaba también una sencilla rutina para obtener la Transformada Discreta de Fourier (TDF) de la sucesión de cotas obtenidas al medir

el perfil longitudinal de una carretera, y se citaban algunas rutinas para obtener si se desea la Transformada Rápida de Fourier (FFT) del perfil. En definitiva, se proporcionaban unas herramientas para que cualquier técnico interesado pudiera, a partir del perfil longitudinal de la carretera obtenido con el *perfilógrafo* o con cualquier otro método, descomponer este perfil en sus sinusoides componentes obteniendo para cada senoide su longitud de onda y su amplitud. También se obtiene su fase, pero este parámetro parece de menos utilidad en la ingeniería de firmes que en otras dis-

*E.T.S. DE Ingenieros de Caminos, Universidad de La Coruña.

Recibido en ROP: enero 1994

ciplinas como la oceanografía, la estadística o la economía.

Esta técnica de análisis de una señal por medio de su periodograma o espectro de amplitudes tiene casi un siglo, desde que Schuster la utilizó en 1898, y hasta los trabajos de Yule en 1927 era el único método numérico disponible para análisis espectral. Los resultados erráticos que Yule observó en los periodogramas de series empíricas le llevaron a la utilización de los modelos autorregresivos, basados en la hipótesis de que una serie determinada está formada por una combinación lineal de series anteriores más un término de error. En lo que sigue se utiliza sólo el análisis del periodograma, que es el proceso de análisis habitual en el estudio de regularidad de pavimentos de autovías.

Obtenida la descomposición discreta de Fourier del perfil longitudinal de una carretera o autovía, es posible analizar las características superficiales del tramo estudiado separando las longitudes de onda en los intervalos habituales, que se resumen en la Tabla 1.

Analizar por ejemplo la macrotextura fina una vez obtenida la descomposición discreta del perfil consistirá en estudiar las amplitudes de las distintas longitudes de onda comprendidas en el intervalo de 1 mm a 10 mm. Estas amplitudes se pueden caracterizar por un único parámetro, que medirá la macro fina, y que en general suele ser la amplitud cuadrática media de todas las ondas contenidas en el intervalo en cuestión. El lector podrá observar que las longitudes de onda límites de intervalos que aquí se incluyen no son exactamente iguales a las dadas en la Ref.1, donde sufrieron una modificación ajena al autor. Los aquí incluidos son los realmente medidos por los equipos de Auscultación de firmes más utilizados a nivel mundial.

Sin embargo, si el lector desea comparar la megatextura de dos tramos de carretera, no puede hacerlo comparando simplemente sus espectros obtenidos por una TDF o una FFT, salvo que los datos hayan sido previamente filtrados. Se ha explicado en la Ref.1 que si se analiza un perfil longitudinal de un tramo de carretera de longitud L , obtenido muestreando la carretera con N puntos tomados a intervalos $\Delta x (L = N \Delta x)$ de 0.125 metros, para obtener de él resultados útiles es necesario un tratamiento previo de los datos. La transformada de Fourier, tanto la TDF como la FFT, sólo devuelven las longitudes de onda comprendidas en el intervalo de Nyquist ($L, 2\Delta x$), y puede verse que las amplitudes obtenidas por la TDF o la FFT de todas las longitudes de onda quedan afectadas por la existencia de longitudes de onda muy grandes, que corresponden a la pendiente de la carretera y al resto de longitudes de onda largas.

¿Por qué son inclinados los espectros de amplitudes de carreteras?

Antes de seguir, el lector debe meditar sobre el hecho de que los espectros o periodogramas de amplitudes de los pavimentos de carreteras tengan la forma inclinada típica que aparece en la literatura. En opinión del autor, ello se debe a los fenómenos siguientes:

a) Como puede verse en detalle en la [Ref.1, figura 1], el propio desarrollo de Fourier lleva implícito el que las componentes de menor longitud de onda tengan menor amplitud. Ello hace que, para un perfil logitudinal discreto con cambios bruscos de pendiente o de cota, o saltos en éstas (como ocurre en los perfiles de carreteras) la línea teórica del espectro vaya inclinándose hacia la derecha.

Tabla 1

VARIABLE DE INTERES	LONGITUDES DE ONDA LIMITES		
Microtextura	1 micra	a	1 mm
Macrotextura fina	1 mm	a	10 mm
Macrotextura gruesa	1 cm	a	10 cm
Megatextura	10 cm	a	50 cm
Regularidad superficial	50 cm	a	50 m
Trazado, rasante y pendiente	50 m	en adelante	

Figura 1.

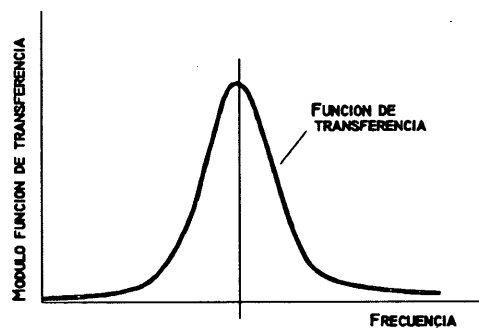


FIGURA 1A. AMPLIFICACION EN UNA FRECUENCIA

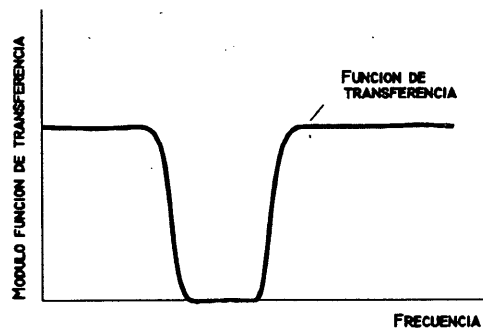


FIGURA 1B. BANDA DE RECHAZO

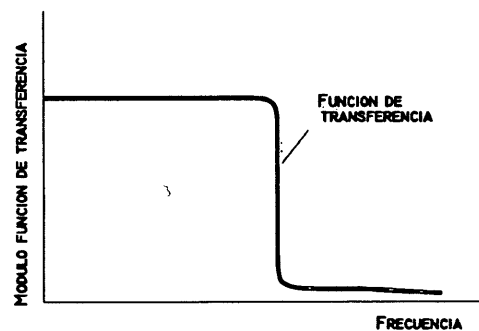


FIGURA 1C. FILTRO DE PASO BAJO

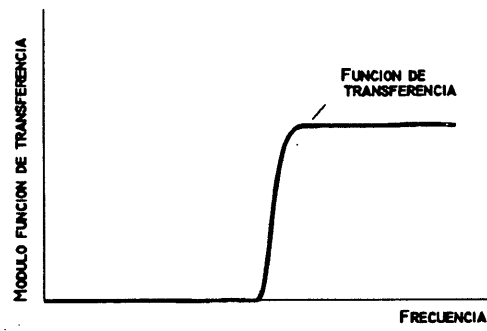


FIGURA 1D. FILTRO DE PASO ALTO

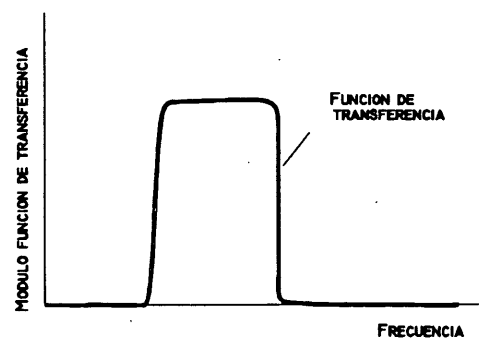


FIGURA 1E. FILTRO PASA BANDA

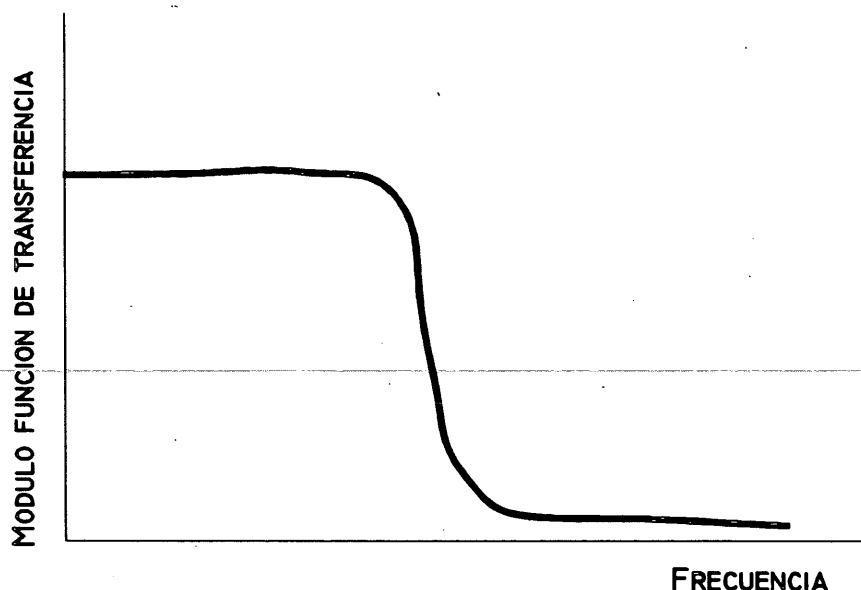
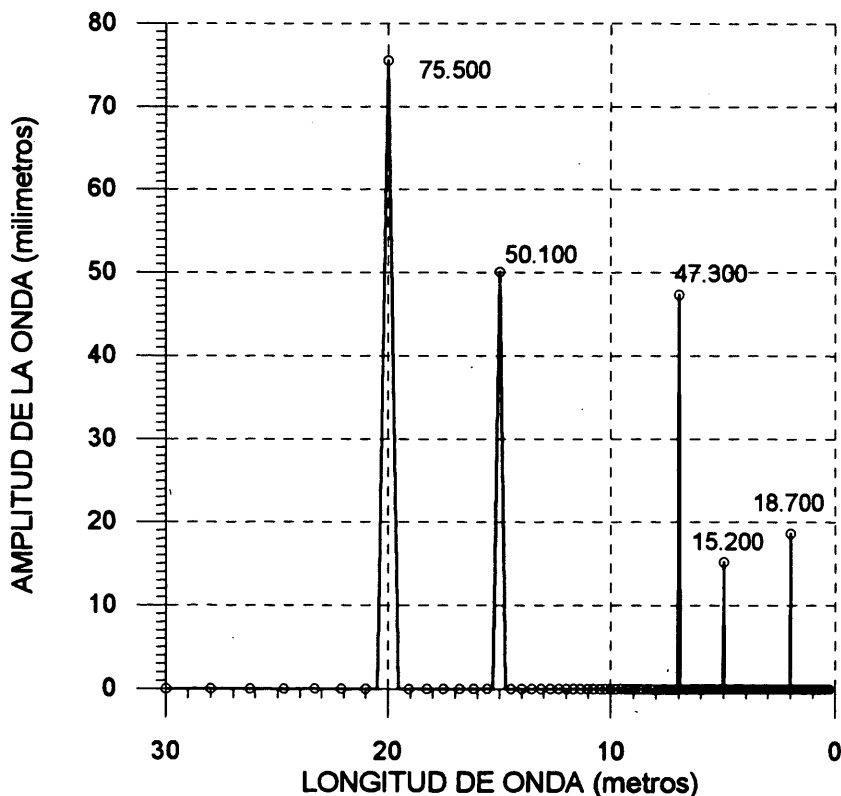


Figura 2. Filtro paso bajo de Butterworth.

b) Como puede verse también en la citada [Ref.1], cualquier desviación (por pequeña que sea) sobre la horizontal del perfil longitudinal

Figura 3A.

**PERFIL COMPUESTO POR 5 SENOS
PERFIL ORIGINAL SIN FILTRAR**



de la carretera es interpretada por la Transformada de Fourier (tanto la TDF como la FFT, naturalmente) como si fuera una sinusoide de muy grande longitud de onda. Las variaciones de cota debidas a la pendiente longitudinal son en general mucho mayores que las debidas a defectos del pavimento. Por lo tanto, en el espectro aparecerán en las longitudes de onda grandes amplitudes grandes. De hecho, en todos los espectros que el lector podrá encontrar en la literatura las mayores amplitudes corresponden a las mayores longitudes de onda.

c) En el caso de que la pendiente longitudinal fuera muy pequeña, lo que se interpretaría como una sinusoide de larguísima longitud de onda, esta longitud de onda no aparecería en el espectro, cuya banda de longitudes de onda está limitada por arriba en la mayor de Nyquist, que es igual a la longitud de carretera muestreada. En este caso la descomposición de Fourier lleva la amplitud correspondiente a dicha longitud de onda que no aparece a las máximas amplitudes del intervalo de Nyquist. Si para obtener el perfil longitudinal se han tomado N puntos separados la distancia Δx , las sucesivas longitudes de onda que forman el espectro son $N\Delta x/1$, $N\Delta x/2$, $N\Delta x/3$, $N\Delta x/4$, etc, hasta la última $N\Delta x/N = \Delta x$. Todas las amplitudes correspondientes a longitudes de onda mayores que $N\Delta x$ aparecen en las primeras longitudes de onda, y ello hace que el espectro suba al aumentar la longitud de onda. (Suele decirse que existe un "Leakage" en las ondas más largas).

d) Incluso en el caso de que en gabinete se haya quitado la tendencia, o hecho horizontal el perfil (dando a los puntos inicial y final la misma cota), las irregularidades de larga longitud causan el mismo efecto. Por sí mismas son en general las de mayor amplitud, lo que puede observarse simplemente dibujando algún centenar de perfiles, y además son interpretadas por la TDF como componentes de muy larga longitud de onda, haciendo de nuevo que a mayores longitudes de onda se asocien mayores amplitudes.

Espectros de energía de oleaje y espectros de registro de marea

Los espectros de energía de oleaje o de registros de los mareógrafos no son más que la des-

composición de Fourier de los registros de altura de oleaje o de marea en un punto. Aceptando que el oleaje es un proceso aleatorio estacionario y ergódico el espectro de oleaje puede considerarse análogo al espectro de amplitudes de una carretera, pero si la muestra es suficientemente larga, es decir, si en el registro se recogen las ondas de período más largo que puedan aparecer, puede considerarse análogo al registro que se obtendría de una carretera perfectamente horizontal. En consecuencia, el estudio de los espectros de oleaje puede arrojar mucha luz sobre los espectros de amplitudes de carreteras, tanto los de oleaje en desarrollo (sea) como los de oleaje desarrollado (swell).

Si los espectros teóricos de oleaje como el PMK que vienen utilizándose desde hace más de 30 años, o como los actualmente recomendados para España por la Norma de Puertos ROM 0.3-91 del MOPTMA pueden considerarse representativos, parece lógico pensar que el espectro de amplitudes de una carretera que consistiera en irregularidades oscilantes sobre una línea perfectamente horizontal debería tener amplitudes nulas para longitudes de onda muy largas, subir sus amplitudes en las longitudes de onda con defectos (regularidad, texturas, etc) y volver a disminuir las amplitudes para las más pequeñas longitudes de onda. Un excelente espectro debería proceder de una muestra formada por un elevadísimo número de puntos, para poder recoger las longitudes de onda muy largas, y un intervalo de muestreo muy pequeño para poder recoger las longitudes de onda muy pequeñas y eliminar en los posibles los efectos de aliasing de longitudes de onda menores. Los espectros de oleaje, incluso de los ocasionados por huracanes, que el lector puede encontrar en la literatura sobre el tema [Refs. 38, 39, 40, 41, 42], todos tienen amplitudes nulas para las frecuencias mayores y menores del registro analizado.

¿Cómo afecta a la medida de irregularidades la pendiente de una carretera?

Como se sabe (Ref.30, 31, 32), el IRI se obtiene a través de un algoritmo numérico efectuado sobre las cotas del perfil longitudinal de la carretera y no se obtiene de forma directa por la descomposición de Fourier. Sin embargo, las texturas sí se miden cada vez más como amplitud cuadrática media de las sinusoides componentes en ca-

PERFIL COMPUESTO POR 5 SENOS PERFIL FILTRADO POR BUTTERWORTH SOBRE LONG.DE ONDA 10 metros

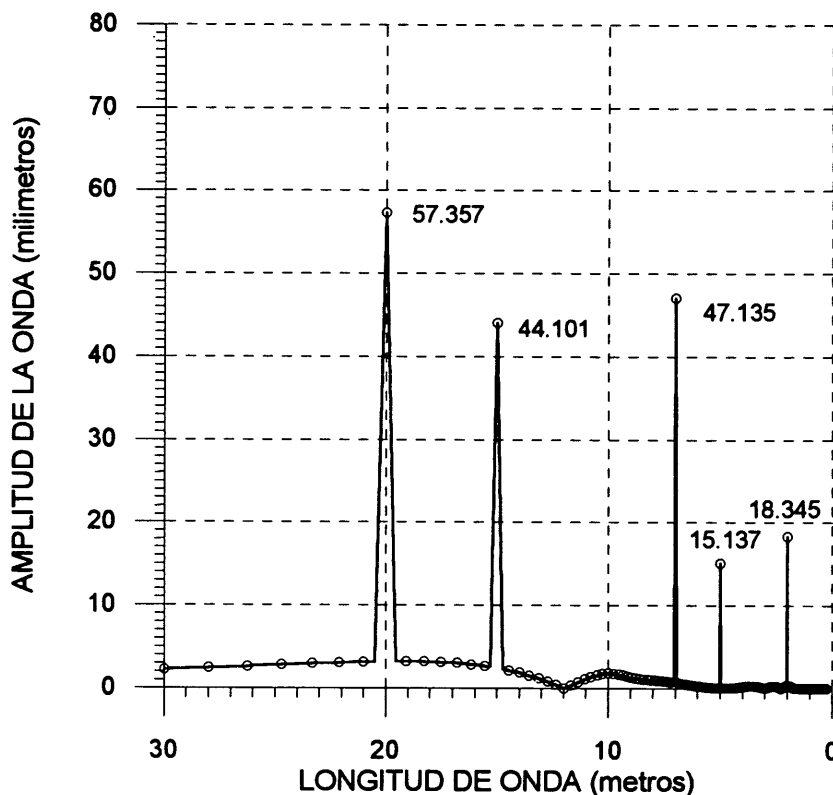
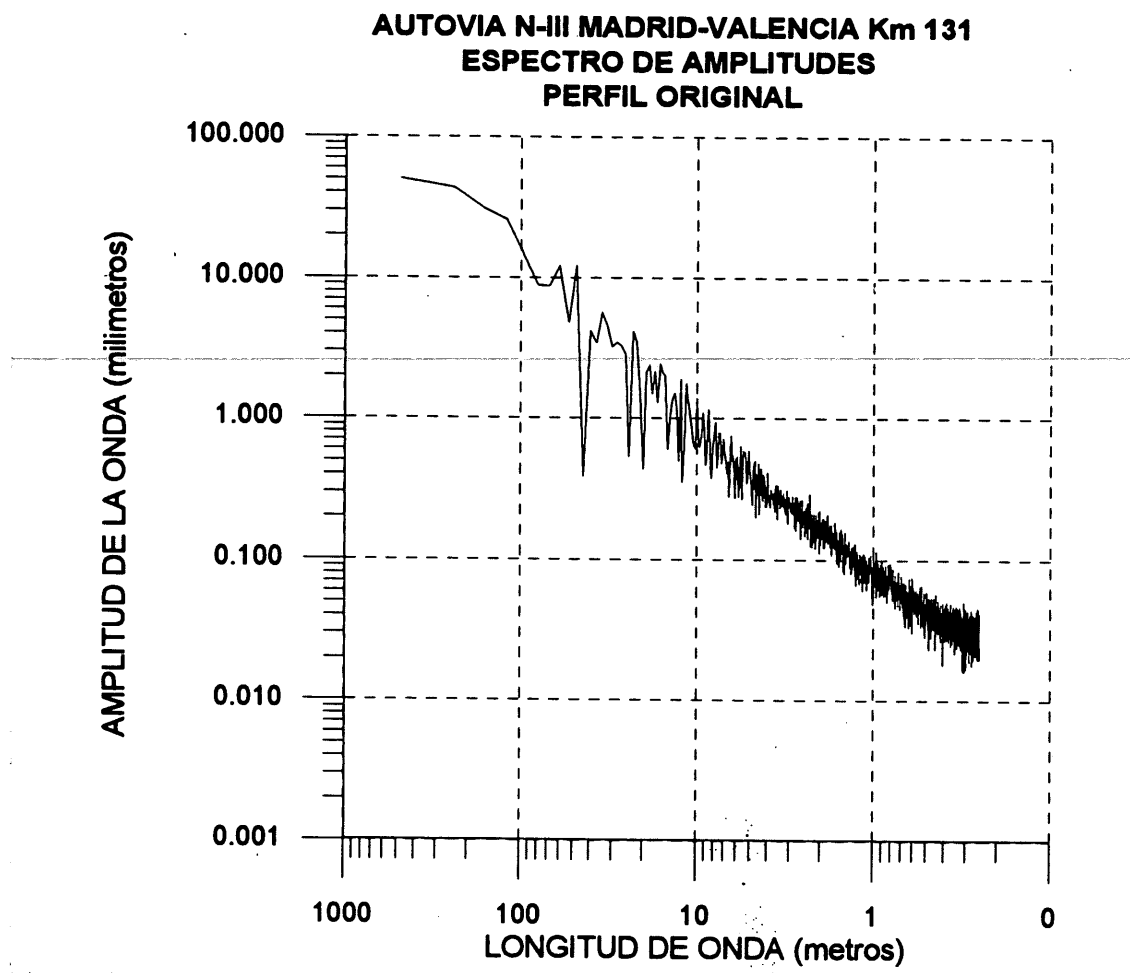


Figura 3B.

da intervalo, ya que los métodos alternativos son muy lentos y costosos. Por tanto es evidente que si la pendiente de una carretera modifica las amplitudes de sus sinusoides componentes, las medidas de textura también quedarán modificadas.

La influencia de la inclinación de una carretera en las amplitudes de sus sinusoides componentes puede verse en detalle en la Ref.1. En el ejemplo incluido en esta referencia se analizaba un perfil de carretera teórico formado por 3 sinusoides de amplitudes 15.2, 18.7 y 47.3. Cuando la carretera es perfectamente horizontal la TDF (o la FFT con las constantes adecuadas, que pueden ponerse en cualquier rutina comercial si se tiene la fuente) devuelve estas amplitudes exactas, figura 3b de la citada referencia. Sin embargo, al dar a la carretera una pendiente estas amplitudes varían, aunque por el Teorema de Parseval su suma de cuadrados será en ambos casos igual a la varianza de las cotas. Como en una carretera inclinada la varianza de las cotas es mucho mayor que en la misma carretera horizontal, el teorema ya nos in-

Figura 4A.



dica que las amplitudes serán mayores. La pendiente de una carretera por tanto parece que debe modificar las medidas de texturas si no se toman las precauciones adecuadas.

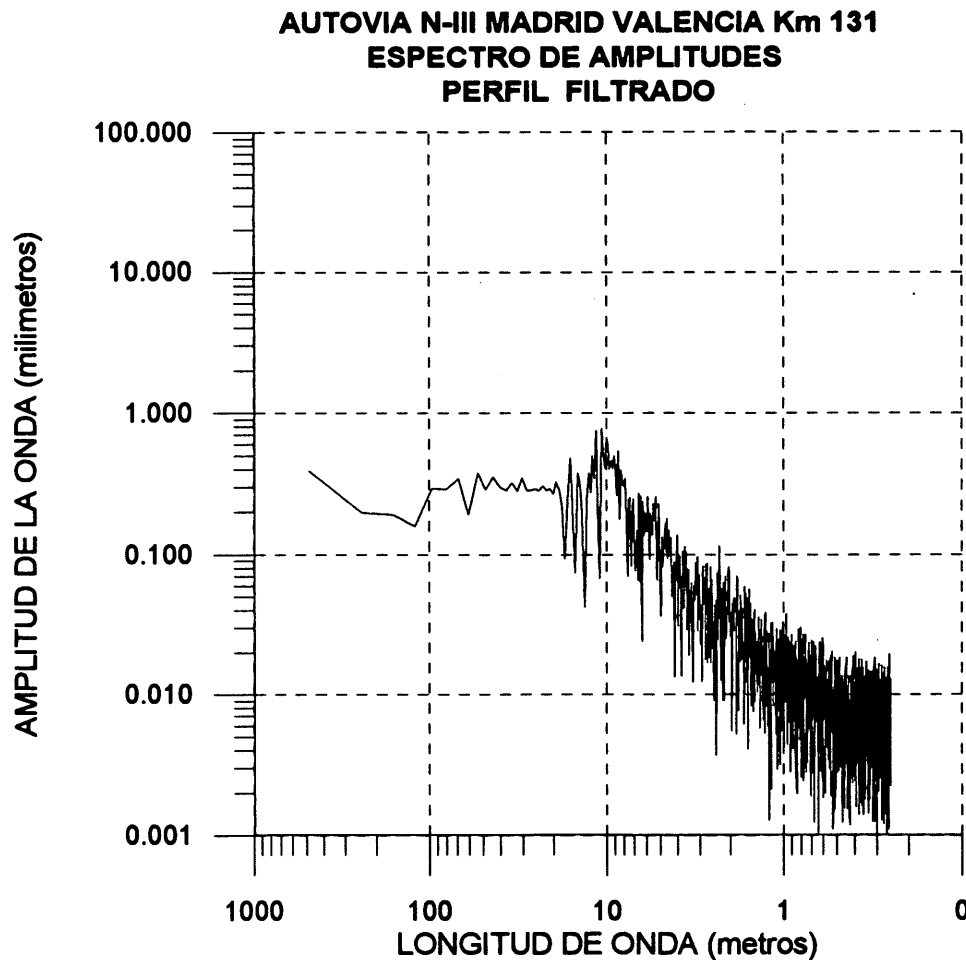
Como consecuencia de todo lo anterior, para analizar con exactitud las características superficiales de un pavimento de carretera será necesario en primer lugar poner la carretera perfectamente horizontal, es decir, eliminar la tendencia o pendiente, que en la práctica es una pendiente recta o una parabólica en los acuerdos, y que conceptualmente puede hacerse fácilmente si se conoce el perfil teórico de la carretera a través de su proyecto. Si esto no es posible, sería deseable al menos eliminar la influencia de las sinusoides cuya longitud de onda sea mayor que la máxima del intervalo de longitudes de onda que se desee estudiar. Para la regularidad superficial, por ejemplo, eliminar las mayores de 50 o 100 metros. De la misma forma, para analizar la megatextura sería necesario eliminar la influencia de las longitudes

de onda mayores de 50 cm, y así sucesivamente para el resto de las texturas.

El borrador de la norma ISO/DIS 8608

Confirma las reflexiones anteriores la reciente Norma ISO/DIS 8608 (Ref.24), borrador de 1991, que intenta llegar a una medida de la bondad de un pavimento a través del análisis de su espectro de amplitudes, ajustando por regresión una recta a la curva obtenida de la TDF o FFT, después de un suavizado del espectro cuya necesidad el autor no llega a comprender. Entre las recomendaciones que incluye para el proceso de los datos del perfil antes de la obtención de la Transformada de Fourier (FFT o TDF) figura la eliminación de la pendiente longitudinal o tendencia (detrending), que recomienda llevar a cabo con un filtro de paso alto (es decir, que deje pasar las altas frecuencias, que son las bajas longitudes de onda y filtre

Figura 4B.



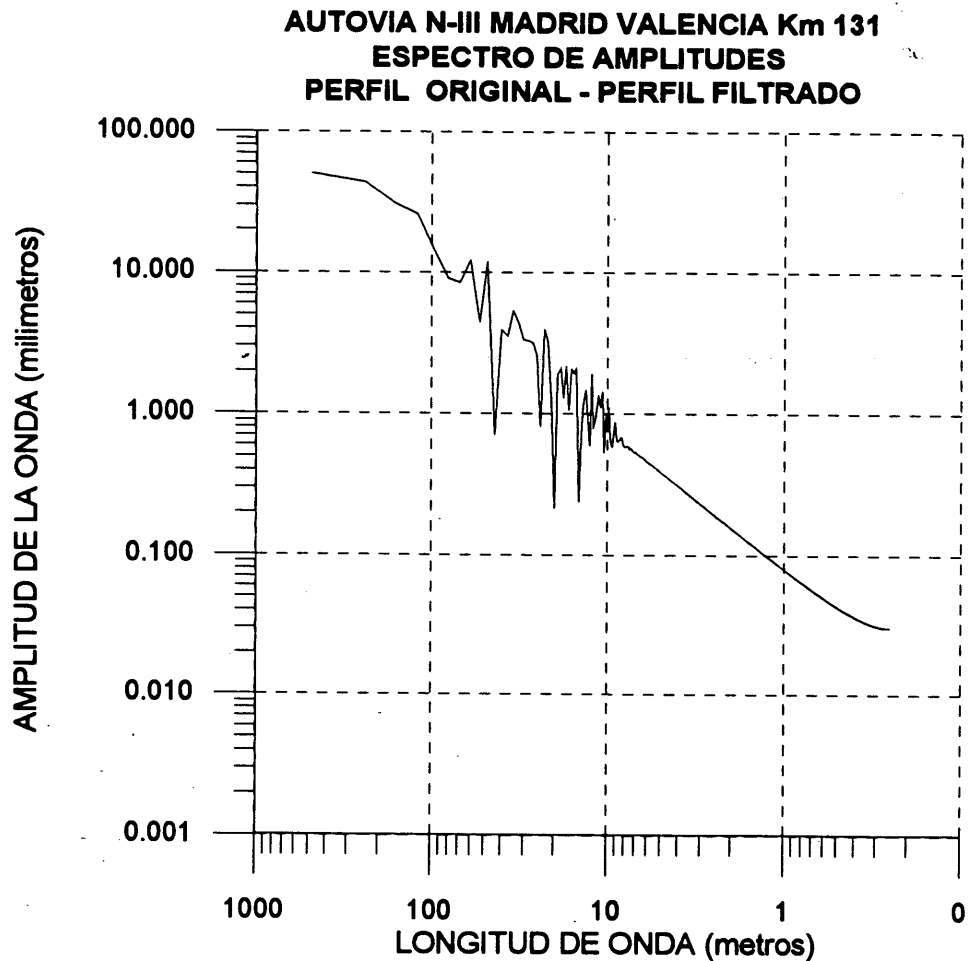
o reduzca las grandes longitudes de onda) con una frecuencia de corte apropiada. Sugiere la norma también la posibilidad de quitar la tendencia por métodos de regresión digital con polinomios de orden bajo.

Es opinión del autor que dicha Norma no ataca el problema en su raíz. Esta raíz parece ser el hecho de que en las bandas de longitudes de onda que más acusan la irregularidad superficial según la mide el IRI (es decir, longitudes de onda de 0.5 a 10 metros, aproximadamente), una mala regularidad superficial viene dada en el espectro por *mayores amplitudes relativas que en las bandas próximas*. En la citada [Ref.1, figura 5] puede verse el espectro de un tramo de Autovía de pésimo IRI, mayor que 3, y cómo en la banda de 2 a 3 metros las amplitudes relativas son muy altas. El ajuste de este espectro por regresión de una recta dirá bien poco sobre este gravísimo problema. Lo mismo ocurrirá en las bandas de megatextura, macrotextura y microtextura. El autor opina por

tanto que la caracterización de la regularidad del pavimento según propone la citada Norma ISO es un método bastante inútil, y que debe sustituirse por un análisis de bandas, similar al que se utiliza en otros campos como la Estadística o la Economía. La definición de "mayor amplitud relativa" y su análisis debe ser objeto de otro artículo. Por otra parte, la eliminación de la tendencia con un paso bajo como recomienda la Norma probablemente sólo sea útil y deba hacerse tras eliminar las curvas polinómicas del trazado (rectas o parábolas), por alguno de los métodos descritos en la literatura, de los que el mejor parece ser el ajuste del polinomio por mínimos cuadrados. Puede verse un tratamiento adecuado en el clásico texto de Otnes y Enochson [Ref.2].

Como puede verse, el tratamiento o filtrado de los datos es una operación esencial para el adecuado análisis del perfil de un pavimento. El presente artículo intenta describir de una forma sencilla uno de los métodos de eliminación de las

Figura 4C.



longitudes de onda no deseadas en un perfil longitudinal, lo que se resuelve en la práctica con los llamados filtros digitales, cuyo diseño y construcción es hoy día toda una rama de la teoría de señales digitales.

2. Perfil longitudinal. Sucesión discreta de cotas

El cálculo del IRI, del HRI, de las texturas, de la fisuración y del resto de los parámetros superficiales de una carretera se obtienen a partir de un medición muy exacta del perfil. En los modernos equipos de auscultación de carreteras, el perfil se toma con intervalos pequeñísimos. Piense el lector, por ejemplo, en que los modernos equipos como el Video-Láser RST circulan midiendo a 90 km/h, muestreando la carretera con lámparas láser de 32 KHz, es decir, a 32.000 pulsos por se-

gundo. Como en 1 segundo recorre 25 metros, la distancia de muestreo mínima teórica es de $25/32000 = 0,781$ mm. Con lámparas de 64 KHz, a 64.000 pulsos por segundo, las muestras están distanciadas 0,39 mm. El lector puede imaginar la potencia de cálculo y de análisis que debe desarrollarse en los chips de proceso de los datos de cada lámpara láser, y el posterior proceso en el ordenador de a bordo, para el manejo de esta ingente cantidad de información.

Si el perfil se ha obtenido con intervalo constante Δx , la sucesión de cotas obtenidas puede representarse de la forma

$$y(x), y(x+\Delta x), y(x+2\Delta x), y(x+3\Delta x), \dots$$

Se ha visto en Ref.1 que la transformada discreta de Fourier permite expresar la sucesión ob-

servada de cotas, como una suma de curvas senos y cosenos cuyas respectivas amplitudes son los pares (a_k, b_k)

$$y_n = \sum_{k=0}^{N/2} (a_k \cos \frac{2\pi}{N} kn + b_k \sin \frac{2\pi}{N} kn)$$

y que vienen dadas por las expresiones

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos \frac{2\pi}{N} kn$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \sin \frac{2\pi}{N} kn$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

El problema consiste en, dada la sucesión de cotas anterior y_n , obtener a partir de ella otra sucesión de cotas q_n tal que en ésta queden eliminadas las longitudes de onda no deseadas. Al obtener la TDF o la FFT de la nueva sucesión de cotas (es decir, del nuevo perfil longitudinal), no aparecerán más que las longitudes de onda deseadas, y las correspondientes amplitudes serán las que realmente corresponden a esas longitudes de onda, en lugar de estar modificadas y enmascaradas por las correspondientes a otras longitudes de onda. Obtenidas así las amplitudes de un intervalo de longitudes de onda, por ejemplo, la macrotextura, será ya posible comparar unos tramos de carretera con otros de forma real, y las conclusiones obtenidas serán científicamente correctas.

3. Expresión de los perfiles longitudinales como ecuaciones en diferencias

A partir de la sucesión de cotas y_n del perfil original, equiespaciadas la distancia Δx , se define una nueva sucesión de cotas q_n , igualmente equiespaciadas Δx . La sucesión q_n será el perfil filtrado. La forma más general de obtener esta nueva sucesión es a partir de la expresión

AUTOVIA N-III MADRID VALENCIA Km 131 PERFILES ORIGINAL, FILTRADO y DIFERENCIA

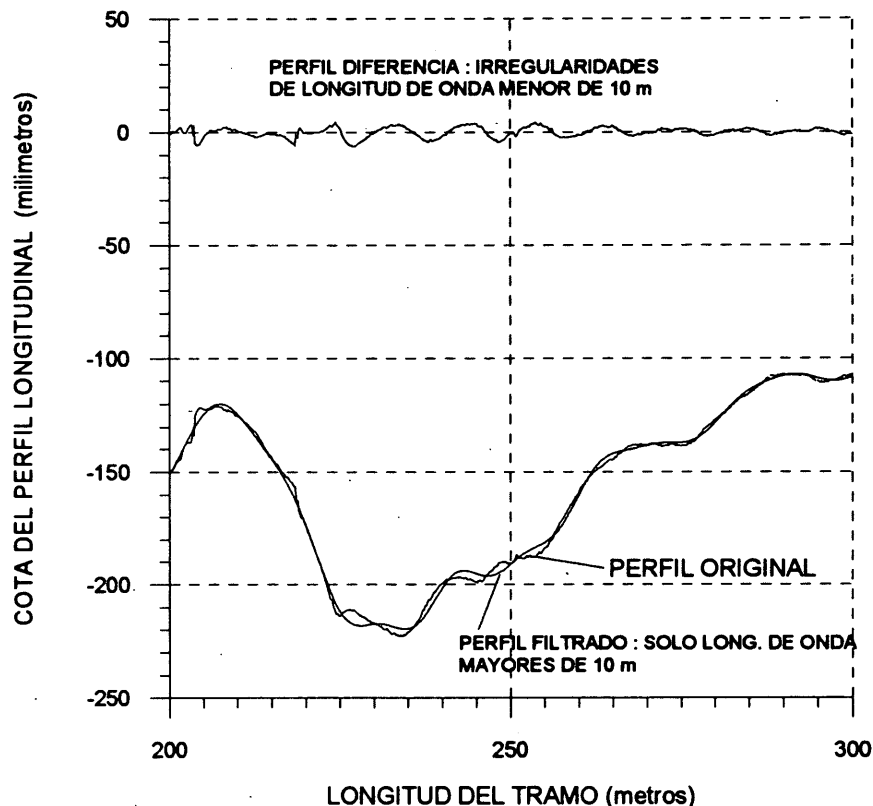


Figura 5.

(Ec.1)

$$q_n = \sum_{i=0}^N b_i y_{n-1} - \sum_{i=1}^N a_i q_{n-i}$$

Esta expresión quiere decir que las cotas q_n del nuevo perfil filtrado se obtienen a partir de las cotas del perfil original y_n por medio de una transformación lineal. Cada cota del nuevo perfil se calcula multiplicando cada una de las cotas del perfil original por un coeficiente a_i y sumando algebraicamente los resultados obtenidos. Además, en el caso general dado por la expresión anterior, cada cota del nuevo perfil depende también de una combinación lineal de las cotas del nuevo perfil previamente calculadas, multiplicadas por los distintos coeficientes b_i (por eso la segunda sumatoria comienza en $i=1$).

Esta es la expresión más general de un filtro digital lineal. El problema de los filtros digitales consiste precisamente en obtener los coeficientes a_i y b_i de forma que se cumplan las condiciones siguientes:

- En el perfil filtrado q_n deben desaparecer las longitudes de onda no deseadas. Por ejemplo, para analizar la regularidad superficial (es decir, el IRI) adecuadamente, deberán desaparecer las longitudes de onda mayores de 50 ó 100 m.
- La desaparición debe ser lo más eficaz posible.
- El número de coeficientes a utilizar, es decir, el número de elementos del perfil original y los previos del perfil transformado debe ser lo más pequeño posible para que los cálculos sean rápidos.

4. La transformada Z del perfil y el operador de retardo

Para la sucesión de cotas y_k del perfil longitudinal inicial de la carretera

$$y_k \approx y_{0\Delta x}, y_{1\Delta x}, y_{2\Delta x}, \dots, y_{k\Delta x}$$

se define la Transformada z de dicha sucesión como la relación

$$Z(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$$

donde la variable z es una variable compleja cualquiera.

Por otra parte, como la sucesión de cotas y_n representa una secuencia de muestras tomadas a intervalos Δx , que puede también interpretarse como período de muestreo T, la transformada de Fourier del perfil tendrá la expresión

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{-i\omega k T}$$

Por tanto, para la variable compleja $z = e^{i\omega T}$, la Transformada z del perfil coincide con su Transformada de Fourier. Esto quiere decir que el análisis del perfil transformado puede hacerse con la transformación en z, y que para conocer su respuesta en frecuencia bastará sustituir z por $e^{i\omega T}$.

En la literatura [Refs.4, 10, 11, 13, etc] puede verse la demostración de que la Transformada z posee la propiedad de linealidad. Además, el Teorema del Retardo (Shifting Theorem) de la Transformada z dice que

$$Z[y_{t-k\Delta x}] = z^{-k} Z(y_t)$$

por lo que a la variable compleja z suele llamarse en algunos textos *operador de retardo*.

Aplicando la Transformación z a la expresión anterior

$$q_n = \sum_{i=0}^N b_i y_{n-i} - \sum_{i=1}^N a_i q_{n-i}$$

se obtiene

$$Z(q) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} Z(y) - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} Z(q)$$

y despejando Z(q), que es la transformada z del perfil filtrado q, en función de Z(y), que es la del perfil original y, se obtiene

(Ec.3)

$$Q(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_N Z^{-N}}{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_N Z^{-N}} Y(Z)$$

La función H(z) dada por la expresión

(EC.4)

$$H(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_N Z^{-N}}{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_N Z^{-N}}$$

se denomina Función de Transferencia del sistema, y es como se ve una función racional. Los coeficientes a_i y b_i son los llamados coeficientes del sistema, de los que algunos pueden ser nulos.

Para obtener la respuesta en frecuencia del sistema basta sustituir Z por $e^{i2\pi f}$ en la función de transferencia. En general, por lo tanto, la función de transferencia en frecuencias tendrá la forma siguiente (teniendo en cuenta que $2\pi f = \omega$)

(EC.5)

$$H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-i\omega} + \dots + b_N e^{-iN\omega}}{a_0 + a_1 e^{-i\omega} + \dots + a_N e^{-iN\omega}}$$

Dependiendo de la forma de esta función, el espectro de frecuencias de la función $Q(Z)$ de salida, es decir, del perfil filtrado, tendrá modificadas las amplitudes de las ondas componentes con respecto al espectro de frecuencias del perfil de entrada. Por lo tanto es posible aprovechar esta propiedad de la transformada Z y trabajar de la forma siguiente con el perfil de entrada:

- 1.- Se elige una forma de función de transferencia tal que en el intervalo de frecuencias dado por $0-\pi$ tenga la forma deseada para el filtro digital. Esta función es naturalmente una función de ω .
- 2.- Se opera con la expresión analítica de esta función de transferencia elegida de forma que se llegue a un cociente de polinomios en $e^{-i\omega}$.
- 3.- Una vez obtenida esta expresión en cociente de polinomios, se vuelve de la transformada de Fourier a la Transformada Z , sustituyendo simplemente $e^{-i\omega}$ por la variable z . Se llega de este modo a la expresión de la Ec.2.
- 4.- Los coeficientes de los polinomios así obtenidos en el numerador y el denominador de la función polinómica son los coeficientes a_i y b_i de la Ec.3.
- 5.- Las cotas modificadas, es decir, el perfil filtrado, se obtienen a partir de la expresión dada por la Ec.1. Los coeficientes a_i y b_i permiten operar sobre las cotas del perfil original, y sobre las que van siendo calculadas del perfil filtrado, para ir obteniendo las sucesivas cotas del perfil filtrado.

El diseño de la función de transferencia, que es una función de la frecuencia circular ω , depen-

de como es natural de las longitudes de onda que se quieran eliminar con el filtro o dejar pasar por él. Como en Ingeniería de firmes es mucho más intuitivo trabajar con longitudes de onda, se recuerda (ver Ref.1) que, siendo la distancia entre cotas Δx , la relación entre frecuencias angulares y longitudes de onda es la siguiente:

(EC.6)

$$\text{Frecuencia circular} = 0 \dots \dots \dots \pi$$

$$2\pi / \infty \dots \dots \dots 2\pi / 2$$

$$\text{Long. de onda} \quad \quad \quad \infty \Delta x \dots \dots \dots 2\Delta x$$

Puede verse que el intervalo de 0 a π en la frecuencia circular es el intervalo de Nyquist visto en [Ref.1] para las longitudes de onda. Naturalmente, el siguiente elemento del cero de las frecuencias es el correspondiente al valor $N\Delta x$, que es el primero con el que se trabaja. Se ve por tanto que si se desea en el filtro una longitud de onda de corte de, por ejemplo, 10 metros, debe calcularse su correspondiente frecuencia angular para diseñar la función de transferencia, y el cálculo se hace de la forma siguiente:

Supóngase que las cotas del perfil longitudinal de la carretera se han obtenido muestreando a 12.5 cm de intervalo. Como se sabe [Ref.1], la mínima longitud de onda que podrá analizarse es de 25 cm, de forma que para este tipo de trabajos es prácticamente inútil el uso del Dipstick o perfilógrafo manual, porque una longitud de onda mínima de 50 ó 60 cm que proporcionan no permite ningún análisis de utilidad práctica. Si con este muestreo a 12.5 cm se desea eliminar las longitudes de onda superiores a 10 metros, esta longitud de onda de corte resulta igual a $10 \text{ m} / 0.125 \text{ m} = 80$ veces el intervalo de muestreo. La correspondiente frecuencia angular, de acuerdo con la Ec.6 anterior, será por lo tanto $2\pi/80 = \pi/40$. De la misma forma se dimensionarían otras frecuencias características del filtro deseado.

5. Los filtros digitales.

Paso alto, paso bajo, banda de rechazo y pasabanda o banda de paso

El perfil transformado $Q(Z)$ se obtiene a partir del perfil original $Y(Z)$ por medio de la función de transferencia. Este proceso se denomina filtrado digital. Como la función de transferencia es un cociente de polinomios en Z , pueden darse diversos

casos, dependiendo de ambos polinomios del denominador y del denominador.

Al sustituir en la función de transferencia la variable Z por la expresión $e^{i2\pi fT}$, o lo que es lo mismo, por la $e^{i\omega}$, se obtiene una función en la frecuencia ω . Dado que al sustituir la variable Z por la expresión $e^{i2\pi fT}$ se obtiene la relación entre los espectros de amplitudes de los perfiles de entrada y de salida del filtro, esta relación viene definida por la forma de la función de transferencia. Esta función es compleja, y la variación de su módulo con la frecuencia es la parte más importante del filtro. Esto quiere decir que:

- Si el módulo de la función de transferencia tiene un máximo en la frecuencia ω_1 , es decir, en la longitud de onda λ_1 , el espectro de amplitudes del perfil filtrado será amplificado en esa longitud de onda. Ver figura 1a.
- Si el módulo de la función de transferencia es nulo en el intervalo $\lambda_1 - \lambda_2$, en el perfil filtrado habrán desaparecido todas las longitudes de onda correspondientes a dicho intervalo. Ver figura 1b.
- Si el módulo de la función de transferencia es nulo para todas las frecuencias mayores de ω_1 , el perfil filtrado tampoco contendrá esas frecuencias. El filtro se llama en este caso "filtro paso bajo", o en inglés "low pass filter", porque sólo deja pasar las bajas frecuencias. Ver figura 1c.
- Si por el contrario el módulo de la función de transferencia es nulo para todas las frecuencias menores de ω_1 , el perfil filtrado tampoco contendrá esas frecuencias. El filtro se llama en este caso "filtro paso alto", o en inglés "high pass filter", porque sólo deja pasar las altas frecuencias. Ver figura 1d.
- Finalmente, si el módulo de la función de transferencia es igual a la unidad (que es el valor máximo que puede tomar el módulo de las funciones de transferencia) en el intervalo $\lambda_1 - \lambda_2$ y nulo en el resto de las frecuencias, en el perfil filtrado habrán desaparecido todas las longitudes de onda exteriores a dicho intervalo. Ver figura 1e. El filtro se llama "filtro pasabanda" o en inglés "band pass filter", porque sólo deja pasar las longitudes de onda de una banda determinada.

Los gráficos de la figura 1 son puramente teóricos, y en la práctica es imposible diseñar una función de transferencia que simule un escalón

perfecto. Por ello el problema práctico consiste en obtener una curva tal que se parezca o aproxime lo más posible a la función deseada para la banda de frecuencias o longitudes de onda necesaria. Una vez obtenida esta función, el segundo paso del problema consiste en calcular los coeficientes a_i y b_i del filtro que permitan calcular las cotas del nuevo perfil a partir de las cotas del perfil original.

Los tipos de filtro digital más conocidos o importantes son los siguientes:

5.1.- Filtros MA (de Moving Average. Media móvil)

Se denominan también filtros de "respuesta impulsional finita", en inglés FIR, de Finite Impulse Response. El denominador es igual a la unidad. La función de transferencia es de la forma

$$H(Z) = b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_N Z^{-N}$$

y la expresión de las cotas del perfil filtrado Q en función de las cotas Y del perfil original es

$$q_n = \sum_{i=0}^N b_i y_{n-i} = b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \dots + b_N y_{n-N}$$

es decir, que para calcular el perfil filtrado sólo se necesitan las cotas del perfil original. Por eso se llaman filtros de medias móviles. Las funciones de transferencia de la propia media móvil de dos sumandos o la de la Regla de 3 m o la del Viágrafo, que no son más que medias móviles de varios puntos, se obtienen inmediatamente por la transformada z y la utilización del operador de retardo.

5.2.- Filtros AR (de Autoregresivos)

Se denominan también filtros de respuesta impulsional infinita, en inglés IIR, de Infinite Impulse Response. En este tipo de filtros la salida realimenta la entrada. El numerador es igual a la unidad. La función de transferencia es de la forma

$$H(Z) = \frac{1}{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_N Z^{-N}}$$

y la expresión de las cotas del perfil filtrado Q en función de las cotas Y del perfil original es

$$q_n = y_n - a_1 q_{n-1} - a_2 q_{n-2} - \dots - a_N q_{n-N}$$

es decir, que para calcular el perfil filtrado sólo se necesitan una cota del perfil original, y N cotas anteriores del perfil filtrado o de salida.

5.3.- Filtros ARMA (de MA y Auto regresivos)

Son la expresión general del filtro. El numerador y el denominador son polinomios, y su función de transferencia es de la forma

$$H(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_N Z^{-N}}{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_N Z^{-N}}$$

se denomina Función de Transferencia del sistema, y es como se ve una función racional. Las raíces del numerador se denominan ceros del filtro, y las del denominador polos del filtro.

6. Diseño de un filtro digital sencillo. Filtro AR seno de Butterworth, de paso bajo orden 2

A la vista de la ecuación (Ec.5) general de la función de transferencia del filtro,

$$H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-i\omega} + \dots + b_N e^{-iN\omega}}{a_0 + a_1 e^{-i\omega} + \dots + a_N e^{-iN\omega}}$$

es evidente que los filtros más sencillos de obtener son los MA o los AR. En general los filtros más utilizados son los de orden bajo. Se dice que un filtro es de orden 2, por ejemplo, si el denominador es un polinomio de orden 2 en la variable $e^{-i\omega}$. Su expresión será por lo tanto

(Ec.7)

$$H(\omega) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega}}$$

Como ya se ha dicho y puede verse, la función de transferencia es una función compleja. Su módulo define la respuesta del filtro.

Entre los filtros más sencillos, conocidos y utilizados están los autorregresivos AR, y dentro de ellos la familia de filtros seno de Butterworth. La expresión general de su función de transferencia es

(Ec.8)

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left\{ \frac{\sin \omega / 2}{\sin \omega_c / 2} \right\}^{2M}}$$

Esta familia de filtros son de paso bajo, es decir, que dejan pasar las frecuencias de 0 a la frecuencia de corte deseada. La frecuencia ω_c es la denominada frecuencia de corte, y puede verse esquemáticamente en la figura 2. Es la frecuencia a partir de la cual el módulo de la función de transferencia comienza a bajar hasta llegar a cero.

El problema consiste ahora en calcular los 4 coeficientes b_0 , a_0 , a_1 y a_2 que hagan que la expresión de la Ec.8 sea igual a la de la Ec.7. Para ello, conocida la expresión general de la Ec.7, su módulo al cuadrado tendrá la forma

(Ec.9)

$$|H(\omega)|^2 = \frac{b_0^2}{|a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega}|^2}$$

Se analiza a continuación el caso más sencillo, $M = 2$, para el que los coeficientes del filtro pueden calcularse a mano o con hoja electrónica (F.Melis, [Ref.4]).

El módulo del polinomio complejo del denominador se calcula fácilmente multiplicándolo por su conjugado, y se obtiene la expresión

(Ec.10)

$$|a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega}|^2 = (a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega})(a_0 + a_1 e^{+i\omega} + a_2 e^{+i2\omega})$$

y recordando las expresiones de Moivre

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$$

$$e^{-i\omega} = \cos \omega - i \sin \omega$$

se obtiene

(Ec.11)

$$\left| a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega} \right|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_1(a_0 + a_2)(e^{+i\omega} + e^{-i\omega}) + a_0 a_2 (e^{i2\omega} + e^{-i2\omega})$$

Para igualar las ecuaciones de Butterworth y la anterior la forma más conveniente es poner el módulo en función del coseno. La ecuación 11 resulta

(Ec.12)

$$\left| a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega} \right|^2 = a_0^2 + a_2^2 + 2a_1(a_0 + a_2)\cos \omega + 2a_0 a_2 \cos 2\omega$$

Poniendo la expresión de Butterworth en función del coseno, de la forma siguiente

(Ec.13)

$$\frac{1}{1 + \left\{ \frac{\sin \omega / 2}{A} \right\}^4} = \frac{A^4}{A^4 + \sin^4 \omega / 2}$$

donde para simplificar se ha hecho $A = \sin(\omega/2)$, y recordando que

$$\sin(\omega/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{2}}$$

se obtiene

$$\sin^4(\omega/2) = \frac{1}{4}(1 - \cos \omega)^2 = \frac{1}{8}(3 - 4\cos \omega + \cos 2\omega)$$

Por lo tanto, la expresión del módulo de la función de transferencia queda como sigue

(Ec.14)

$$\frac{8A^4}{8A^4 + 3 + \cos 2\omega - 4\cos \omega} = \frac{b_0^2}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1(a_0 + a_2)\cos \omega + 2a_0 a_2 \cos 2\omega}$$

y como puede verse se llega a un sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas, que permite calcular los coeficientes b_0 y a_i deseados del filtro. El sistema de ecuaciones es

$$b_0^2 = 8A^4$$

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 8A^4 + 3$$

$$2a_0 a_2 = 1$$

El sistema se simplifica [F.Melis, Ref.4] bastante teniendo en cuenta que para $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ se cumple, respectivamente

$$\omega = 0 \quad a_0 + a_1 + a_2 = A^2 \sqrt{8}$$

$$\omega = \pi \quad a_0 - a_1 + a_2 = A^2 \sqrt{A^4 + 1} \cdot \sqrt{8}$$

$$a_0 a_2 = \frac{1}{2}$$

y además, como la función de transferencia es 1 para $\omega = 0$,

$$b_0 = a_0 + a_1 + a_2$$

Con todo ello se llega a las sencillas expresiones

$$a_0 + a_2 = \sqrt{8} \left[A^2 + \sqrt{A^4 + 1} \right]$$

$$a_0 a_2 = 1/2$$

y los coeficientes del filtro resultan ser:

$$a_1 = \sqrt{2} \left[A^2 - \sqrt{A^4 + 1} \right]$$

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{2}}$$

$$a_0 = \frac{1}{2a_2}$$

$$b_0 = a_0 + a_1 + a_2$$

Una vez calculados los coeficientes a , se dividen los 3 por a_0 , que es la forma habitual de representar el filtro.

Como ejemplo, para el caso citado anteriormente de que se muestree la carretera cada 12.5 cm y se desee eliminar las longitudes de onda mayores de 10 metros, la frecuencia de corte resulta ser $\omega_c = \pi / 40 = 0.078539$. Los coeficientes resultan ser

$$A = \sin(\omega_c/2) = 0.0392598$$

$$a_1 = -1.412035$$

$$a_2 = 0.668907$$

$$a_0 = 0.747488$$

y dividiendo por a_0 se obtiene

$$a_1 = -1.889042$$

$$a_2 = 0.894874$$

$$a_0 = 1.0$$

y

$$b_0 = 0.005832$$

De esta forma, la expresión de este sencillo filtro paso bajo de Butterworth, de orden 2, resulta en:

$$q_n = b_0 y_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2}$$

es decir

$$q_n = 0.005832 y_n - 1.889042 q_{n-1} + 0.894874 q_{n-2}$$

Se observa que en cada paso se necesita trabajar con la cota y del perfil y con los dos elementos inmediatamente anteriores, recién calculados, del perfil filtrado. Ello es por ser un filtro AR. Como al comenzar los cálculos no hay elementos calculados en el perfil filtrado, podría tomarse el valor 0 para los dos primeros elementos q , pero el algoritmo del filtro tarda mucho en llegar a su fun-

cionamiento estable. Lo que suele hacerse es tomar para los valores iniciales el valor medio de las cotas del perfil original, o al menos la media de los primeros elementos. De esta forma el filtro actúa eficazmente casi desde el principio.

7. Diseño de un filtro seno de Butterworth general de paso bajo. Método de Otnes-Enochson

La expresión general del filtro de la Ec.8 puede ponerse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + \left\{ \frac{\sin \omega / 2}{\sin \omega_c / 2} \right\}^{2M}} = \\ &= \frac{1}{1 + \left\{ \frac{\sin \omega / 2}{A} \right\}^{2M}} = \frac{A^{2M}}{A^{2M} + \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2M}} \end{aligned}$$

Se trata ahora de obtener en el denominador un polinomio de grado $2M$ en $e^{-i\omega}$. Ello puede hacerse de dos formas:

- Llegando a la expresión completa del polinomio, de forma que se obtengan directamente los coeficientes a_i .

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= \frac{1}{A^{2M} + \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2M}} = \\ &= \frac{1}{1 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega} + \dots + a_{2M} e^{-i2M\omega}} \end{aligned}$$

- Calculando las $2M$ raíces del denominador, que en general son complejas, y expresando el polinomio de grado $2M$ como un producto de M polinomios de grado 2.

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= \frac{1}{A^{2M} + \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2M}} = \\ &= \frac{1}{(1 + a_{11} e^{-i\omega} + a_{12} e^{-i2\omega})(1 + a_{21} e^{-i\omega} + a_{22} e^{-i2\omega}) \dots (1 + a_{M1} e^{-i\omega} + a_{M2} e^{-i2\omega})} \end{aligned}$$

Habitualmente se utiliza este segundo método, porque los filtros de orden alto pueden producir inestabilidades. Los filtros de orden dos encañados, como el que resulta en este método, producen un filtrado mucho más eficaz.

Para obtener los polinomios de segundo grado necesarios hay que calcular los 2M polos del filtro, es decir, las 2M raíces de la ecuación del denominador.

$$\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} = 2M \sqrt{-A^{2M}}$$

y dado que

$$-1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$$

se obtiene

$$\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} = A e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{2M}}$$

El método de Otnes-Enochson para el cálculo de las raíces complejas del arco seno puede verse detallado en la [Ref.2]. Poniendo la ecuación en la forma general

$$\operatorname{sen}(u+iv) = a + ib$$

se conocen a y b, y se desea calcular u y v. Otnes-Enochson escriben la ecuación en la forma

$$\operatorname{sen}(u+iv) = \operatorname{sen} u \cos iv + \cos u \operatorname{sen} iv$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} i\theta &= i \sinh \theta \\ \cos i\theta &= \cosh \theta \end{aligned}$$

puede reescribirse en la forma

$$\operatorname{sen} u \cosh v + i \cos u \sinh v = a + ib$$

de donde resulta

$$\operatorname{sen} u \cosh v = a$$

$$\cos u \sinh v = b$$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$, se obtiene

$$\operatorname{sen}^2 u \cosh^2 v = a^2$$

$$(1 - \operatorname{sen}^2 u) \sinh^2 v = b^2$$

de las que se obtiene

$$(\cosh^2 v - a^2) \operatorname{sen}^2 u = b^2 \cosh^2 v$$

que, teniendo en cuenta $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$, se reduce a la ecuación bicuadrada

$$\sinh^4 v + (1 - a^2 - b^2) \sinh^2 v - b^2 = 0$$

Definiendo $C = 1 - a^2 - b^2$, que sólo depende de la frecuencia de corte ω_c , se obtienen las soluciones del seno hiperbólico de v en la forma

$$\sinh^2 v = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4b^2}}{2}$$

Otnes-Enochson llaman D a la raíz positiva, es decir

$$D = \frac{-C + \sqrt{C^2 + 4b^2}}{2} = \sinh^2 v = \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \right)^2$$

Se obtiene así

$$e^{2v} - 2\sqrt{D}e^v - 1 = 0$$

y llamando $E = e^v$

$$E = e^v = \sqrt{D} + \sqrt{D+1}$$

y se obtiene

Tabla 2

Orden 10

Paso 1	$a_1 -1.969625044382247$	$a_2 0.975715054422223$
Paso 2	$a_1 -1.925201342818645$	$a_2 0.931150651203793$
Paso 3	$a_1 -1.889042016727029$	$a_2 0.894874285369754$
Paso 4	$a_1 -1.863681918211777$	$a_2 0.869430675659839$
Paso 5	$a_1 -1.850649929539701$	$a_2 0.856355295405709$
	$b_0 0.0058643210$	

$$v = \ln E = \ln[\sqrt{D} + \sqrt{D+1}]$$

$$1 - 2e^{(-\alpha_m)} \cos \beta_m z^{-1} + e^{(-2\alpha_m)} z^{-2}$$

La incógnita u se calcula recordando que

Y por lo tanto los coeficientes del filtro para el paso m serán

$$\cos u \sinh v = b$$

$$a_{1m} = 2e^{(-\alpha_m)} \cos \beta_m$$

$$u = \arccos\left(\frac{b}{\sinh v}\right) = \arccos\left(\frac{b}{\sqrt{D}}\right)$$

$$a_{2m} = -e^{(-2\alpha_m)}$$

Volviendo ahora a la expresión del denominador del filtro

8. Programa de cálculo. Resultados

$$\sinh \frac{\omega}{2} = A e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{2M}}$$

El programa de cálculo utilizado en los ejemplos que siguen está escrito en C basado en las rutinas en *Fortran* dadas por Otnes-Enochson en la [Ref.2] y la modificaciones de F.Melis de [Ref.4]. Para el filtro seno de Butterworth de grado 10, con longitud de onda de corte en 10 metros, los coeficientes resultantes son los reflejados en la tabla 2

se calculan sus raíces (α_m , β_m), $m = 1 \dots M$ como se acaba de ver. La expresión del denominador en función del operador de retardo z tendrá entonces la forma

Para ver el funcionamiento del filtro se ha diseñado una carretera horizontal teórica formada por la suma de las siguientes sinusoides reflejadas en la tabla 3.

Tabla 3

Sinusoide	Long de onda	Amplitud
1	2	18.7
2	5	15.2
3	7	47.3
4	15	50.1
5	20	75.5

Tabla 4

Sinusoide	Long. de onda	Amplitud original	Amplitud filtrada en 10 m
1	2	18.7	18.345
2	5	15.2	15.137
3	7	47.3	47.135
4	15	50.1	44.101
5	20	75.5	57.357

En figura 3a puede verse su periodograma, calculado por la rutina de M.Melis de [Ref.1]. Tras aplicar el filtro de orden 10 de longitud de onda de corte en 10 metros, su periodograma puede verse en la figura 3b, y las amplitudes resultantes son las reflejadas en la tabla 4.

Se comprueba que las amplitudes de las sinusoides inferiores a 10 m de longitud de onda no han sufrido apenas modificación, mientras que la amplitud de la sinusoide de 20 m de longitud de onda ha reducido su amplitud de 75.5 mm a 57.35 mm, es decir, en un 24%, y la de longitud de onda 15 m sufre una reducción del 12%.

Como puede verse, el filtro seno de Butterworth no es el más eficaz. Dentro de los más corrientemente utilizados son más eficaces el filtro tangente de Butterworth, con la misma expresión que el seno pero utilizando la función tangente, los filtros del tipo Chebyshev y los filtros elípticos, que tienen caídas más verticales en las frecuencias de corte y en muchos casos menores ondulaciones en las bandas de rechazo.

Pese a la relativamente baja calidad del filtro seno de Butterworth aquí descrito, es muy ilustrativo su efecto sobre el espectro de amplitudes de una autovía real. En la figura 4 puede verse el espectro de amplitudes de un tramo de 500 metros de la Autovía N III Madrid-Valencia, en el PK 131, sentido Madrid, carril derecho, rodada derecha, a 60 cm del borde interior de la raya blanca. El perfil está tomado muestreando a 12.5 cm con el sofisticado equipo Video-Láser RST de AEPO.

En la figura 4a se ha dibujado el espectro de amplitudes correspondiente al perfil longitudinal ASCII obtenido directamente del output del procesador de a bordo. En la figura 4b puede verse el mismo espectro de amplitudes tras pasar el perfil por el filtro seno de Butterworth de orden 10 que se acaba de describir. Puede verse que las amplitudes de sinusoides de longitud de onda mayor de 10 metros se han reducido drásticamente y aunque no pasan a ser nulas, se han dividido por un factor mayor de 100. La figura 4c es el periodograma del perfil resto, es decir, el correspondiente a las longitudes de onda mayores de 10 metros, que coinciden exactamente con las del perfil original.

Comparando los espectros de las figuras 4a y 4b se observa en primer lugar que las amplitudes

de la banda de megatextura e IRI (regularidad superficial) han bajado sustancialmente. En la longitud de onda de 1 metro, las amplitudes que en el perfil sin filtrar eran de 0.1 mm han pasado a ser de 0.02 mm tras el filtro. Esta diferencia se debe a la influencia de las mayores longitudes de onda, que se ha comentado al comienzo del presente artículo. Como en España están empezando a utilizarse las modernas técnicas de análisis de texturas por medición de la amplitud cuadrática media de cada banda, el lector debe meditar bien y exigir un completo y exhaustivo detalle sobre el tratamiento que se ha dado al perfil antes de las medidas de textura.

Los buenos equipos de auscultación actualmente utilizados en España llevan en EPROM programados todos los circuitos de filtrado necesarios, en muchos casos de tipo analógico en lugar de digital, ya que el filtrado por software es lento, como se ha visto, y además es imposible hacerlo en tiempo real como se precisa a bordo de los equipos. En general los filtros suelen eliminar en primer lugar el aliasing (ver [Ref.1]) con un paso bajo que elimina las altas frecuencias (pequeñas longitudes de onda) no deseadas. Tienen además los filtros paso alto (que elimina las bajas frecuencias, es decir, las largas longitudes de onda que corresponderían a trazado), y en general en cada banda analizada aplican los correspondientes pasabanda. Sin embargo, si un usuario quiere trabajar en el análisis del perfil longitudinal de un tramo de autovía obtenido en obra por métodos topográficos, o con el PERFILOGRAFO-DIPSTICK, debe posiblemente aplicar algún tipo de filtro digital como el aquí descrito para poder obtener resultados significativos, o simplemente para poder comparar espectros de distintos tramos y poder sacar consecuencias, por ejemplo, del adecuado funcionamiento de los equipos de extendido.

Finalmente, para ver de forma muy gráfica en qué consiste un filtrado, se presenta en la figura 5 un detalle ampliado del perfil original de la citada autovía N-III, superimpuesto al perfil filtrado. Puede observarse que el perfil filtrado sigue muy exactamente al perfil original, pero es mucho más suave, ya que las irregularidades correspondientes a longitudes de onda menores de 10 metros han sido eliminadas. La diferencia entre ambos perfiles es precisamente el perfil de las irregularidades, es decir, las componentes de longitud de onda menores de 10 metros, que pueden verse dibujadas sobre el eje de abscisas. Los espectros

de cada uno de los tres perfiles son los presentados en la figura 4.

La utilización del programa de filtrado, que está a disposición del lector interesado, consiste en dos etapas. (a) La primera etapa consisten en la generación de los coeficientes del filtro, que dependen del orden M (par) del filtro que se desee usar y de la longitud de onda de corte. Esta primera etapa genera un fichero ASCII con los coeficientes a utilizar, fichero que es leído por la rutina de la segunda etapa. (b) La segunda etapa consiste en el proceso de filtrado propiamente dicho. Este consiste en $M/2$ pasos sucesivos en cascada. El primer paso comienza a partir de las cotas del perfil longitudinal, con los dos primeros coeficientes y el b_0 . El fichero de salida es la entrada del siguiente paso, que utiliza los siguientes coeficientes del filtro. Vuelve a generar otro ASCII de salida que es el input del tercer paso, y así sucesivamente hasta terminar los $M/2$ pasos. En el ejemplo anterior el filtro es de 5 pasos en cascada.

Para finalizar, el lector debe tener en cuenta que si desea utilizar filtros digitales en su micro sin preocuparse de cómo se obtienen, existen varios programas específicos de muy sencillo manejo. El más conocido es sin duda el MATLAB, cuya versión en micro puede generar los coeficientes de cualquiera de los filtros comentados en este artículo (Butterworth, Chebyshev, Elípticos, etc), si bien genera filtros ARMA, y no los sencillos tipo AR que aquí se han descrito.

Bibliografía

- [1] "TEXTURAS Y REGULARIDAD DE UN PAVIMENTO. CALCULO DE LAS LONGITUDES DE ONDA MAS IMPORTANTES EN LA REGULARIDAD SUPERFICIAL DE UNA CARRETERA". Manuel J. Melis. RUTAS, N° 34. Enero-Febrero 1993.
- [2] "APPLIED TIME SERIES ANALYSIS", R. OTNES y L.ENOCHSON. Wiley, 1978.
- [3] "DIGITAL FILTERS", R.W. Hamming. Prentice Hall, 1977.
- [4] "APUNTES SOBRE SERIES TEMPORALES", Francisco Melis. I.N.E 1986.Documento de trabajo
- [5] "LA ESTIMACION DEL RITMO DE VARIACION EN SERIES ECONOMICAS", Francisco Melis, "Estadística Española", Vol.33,N° 126, 1991
- [6] "CONSTRUCCION DE INDICADORES CICLICOS MEDIANTE ECUACIONES EN DIFERENCIAS", Francisco Melis, "Estadística Española", N° 98, Enero-Marzo 1983
- [7] "NOTAS SOBRE CONTABILIDAD NACIONAL Y ANALISIS DE COYUNTURA", Francisco Melis, Servicio de Estudios de Coyuntura, 1986
- [8] "STOCHASTIC MODELS, ESTIMATION AND CONTROL", P.S.Maybeck, Academic Press 1979
- [9] "SIGNALS AND SYSTEMS: CONTINUOUS AND DISCRETE", R.E.Ziemer, W.H.Tranter, D.R. Fannin, MacMillan 1993
- [10] "THE ANALYSIS OF TIME SERIES: THEORY AND PRACTICE", C. Chatfield. Chapman Hall 1978
- [11] "SIGNALS AND SYSTEMS", A.V.Oppenheim, A.S.Willsky, I.T.Young, Prentice-Hall 1983
- [12] "SIGNAL PROCESSING IN C", Reid & Passin, Wiley, 1992
- [13] "TRATAMIENTO NUMERICO DE LA SEÑAL", M.Bellanger, Masson, 1991
- [14] "SOBRE LA HIPOTESIS DE COMPONENTES Y LA EXTRACCION DE LA SEÑAL DE COYUNTURA SIN PREVIA DESESTACIONALIZACION", Francisco Melis, "Revista Española de Economía", Vol.6,N° 1 y 2, 1989
- [15] "AGREGACION TEMPORAL Y SOLAPAMIENTO O 'ALIASING'", Francisco Melis. "Estadística Española", N° 130, 1992
- [16] "SYSTEM DYNAMICS", K.Ogata, Prentice Hall 1992
- [17] "LINEAR SYSTEMS. A STATE VARIABLE APPROACH WITH NUMERICAL IMPLEMENTATION". R.Decarlo. Prentice Hall 1989
- [18] "NUMERICAL RECIPES IN C", Cambridge Univ.Press, William H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky y W.T.Vetterling, 1988,1991
- [19] "LINEAR CONTROL SYSTEMS ANALYSIS AND DESIGN". J.D.Azzo, C.Houpis. McGraw 1988
- [20] "APPLIED NUMERICAL METHODS" CARNAHAN, LUTHER y WILKES, WILEY 1969. Versión Española Manuel J. Melis y E. de Miguel, Ed.Rueda 1979.
- [21] "ADAPTIVE FILTER THEORY" S.HAYKIN, Prentice Hall 1991.
- [22] "SIGNAUX ET SYSTEMES LINEAIRES" Y.THOMAS, Masson 1993.
- [23] "LINEAR CONTROL SYSTEMS" C.ROHRS, J.MELSA, D.SCHULTZ, McGraw 1993.
- [24] BORRADOR NORMA "ISO/DIS 8608 INTERNATIONAL STANDARD". 1991. "ROAD SURFACE PROFILES. REPORTING OF MEASURED DATA".
- [25] "SIMULACION DE LA REPARACION DE LA REGULARIDAD SUPERFICIAL DE UNA CARRETERA. PROGRAMAS DE LA REGLA DE 3 m Y DEL VIAGRAFO", Manuel J.Melis, Rutas Nov-Dic 92
- [26] "FOURIER SERIES AND HARMONIC ANALYSIS". Stanley Thornes, K.A.Stroud, 1984.

- [27] "FOURIER ANALYSIS", Simon & Schuster, Hwei P. Hsu, 1970
- [28] "PROBLEMS ENCOUNTERED IN USING ELEVATION POWER SPECTRA AS CRITERIA OF PAVEMENT CONDITION", B.E.Quinn & K.Hagen, 1968
- [29] "REGULARIDAD SUPERFICIAL DE LOS PAVIMENTOS EXTENDIDOS MECANICAMENTE", V.Sánchez Blanco, L.T.y M.S, 1969
- [30] "CALCULO DEL IRI DE UNA CARRETERA A PARTIR DE SU PERFIL LONGITUDINAL". Manuel J. Melis, RUTAS Mayo-Junio 1992.
- [31] "EL IRI, EL HRI Y LOS MODELOS DE CUARTO DE COCHE Y DE MEDIO COCHE. SOLUCION POR EL METODO DE LA ECUACION DE ESTADO". Manuel J. Melis, R.OBRAS PUBLICAS Abril 1993.
- [32] "EL IRI Y EL MODELO DE COCHE ENTERO. SOLUCION POR EL METODO DE LA ECUACION DE ESTADO". Manuel J. Melis, R.OBRAS PUBLICAS. Septiembre 1993.
- [33] "STATE SPACE AND LINEAR SYSTEMS", McGRAW-HILL, 1971, D.M.WIBERG.
- [34] "MODERN CONTROL ENGINEERING". K.Ogata. Prentice Hall 1990
- [35] "SISTEMAS DIGITALES Y ANALOGICOS. TRANSFORMADAS DE FOURIER Y ESTIMACION ESPECTRAL", Athanasios Papoulis, Boixareu Ed., 1978
- [36] "DISCRETE TIME SIGNAL PROCESSING", A.Oppenheim, R.W.Schafer. Prentice Hall 1989
- [37] "C LANGUAGE ALGORITHMS FOR DIGITAL SIGNAL PROCESSING". P.Embree, Prentice Hall 1991
- [38] "NEARSHORE DYNAMICS AND COASTAL PROCESSES", K.Horikawa, Univ.Tokyo Press, 1988
- [39] "RANDOM SEAS AND DESIGN OF MARITIME STRUCTURES", Y.Goda, Univ.Tokyo Press, 1985
- [40] ROM 0.3-91 "RECOMENDACIONES PARA OBRAS MARITIMAS. OLEAJE. ANEJO 1.- CLIMA MARITIMO EN EL LITORAL ESPAÑOL", MOPTMA 1991
- [41] "INTRODUCCION A LA ESTRUCTURA DEL OLEAJE", P.Suarez Bores, CEDEX 1967
- [42] "SHORE PROTECTION MANUAL", Coastal Engineering Research Center, Dept.of the Army, USA, 1984. ■