

EL IRI Y EL MODELO DE COCHE ENTERO. CALCULO POR EL METODO DE LA ECUACION DE ESTADO

Manuel J. Melis*
Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos, M. Sc, MBA

1. Generalidades y Antecedentes

En anteriores artículos [Ref.3 y 4] desarrollábamos respectivamente los métodos de cálculo del IRI por integración del modelo de cuarto de coche por diferencias finitas y del modelo de medio coche por el método de la Ecuación de Estado o del Espacio de Estado. El presente artículo es realmente una continuación de la Ref.4, y en él se resume el modelo de coche entero (full-car) tal como lo define la norma americana ASTM E-1170 (Ref.6), y se integra dicho modelo de coche completo por el método de la Ecuación de Estado, ya conocido y que se ha detallado en la (Ref. 4).

La integración del modelo de coche entero permite obtener un indicador de la regularidad superficial de una carretera más completo que el IRI y que incluso el «HRI» o «IRI-Medio Coche», y que podría denominarse en castellano «IRI- Coche Entero». Este indicador es similar al HRI en el sentido de que tiene en cuenta el estado de las dos rodadas izquierda y derecha sobre las que circula el automóvil o el camión, pero además tiene en cuenta los dos ejes del mismo y por ello representa mejor la calidad de rodadura que los modelos de cuarto de coche o de medio coche, que sólo representan una rueda o un eje. Además, como se verá a continuación, el modelo de coche completo permite analizar no sólo IRI y el balanceo (giros a derecha e izquierda sufridos por el

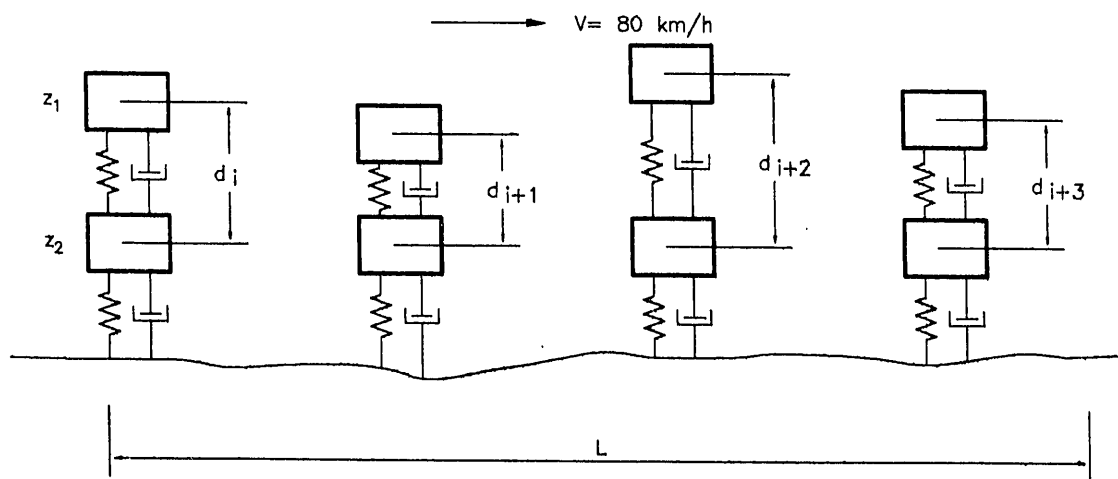
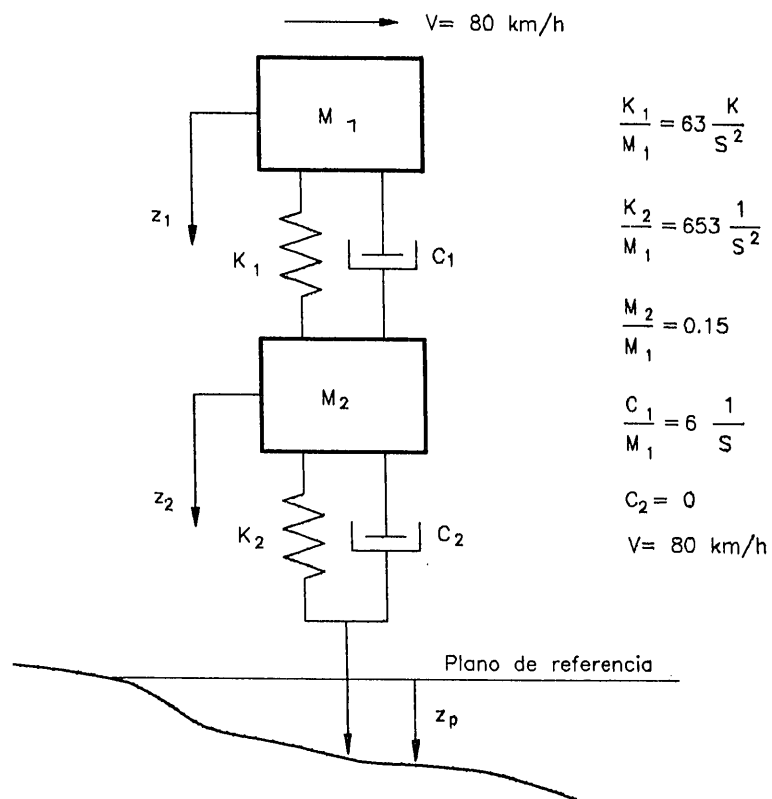
conductor) sino también el cabeceo (giros hacia delante y hacia atrás). Puede por lo tanto obtenerse un indicador del balanceo del vehículo similar al «IRI-Balanceo» visto con el medio coche y además un indicador del cabeceo o «IRI-Cabeceo» que puede ser también interesante para la medida o evaluación más completa del confort de una rodadura. Además, la simulación de los esfuerzos dinámicos sufridos por el pavimento reflejan con mayor exactitud la circulación real de los automóviles por las carreteras, y por lo tanto los resultados de este modelo de coche entero permiten mejores aproximaciones al estudio de las zonas con disminución dinámica de la adherencia de la rueda o a las zonas en que los esfuerzos dinámicos pueden llegar a dañar peligrosamente al pavimento.

2. La norma ASTM E1170-91. Modelo de Coche Entero

La figura 1 indica el modelo de cuarto de coche y una explicación gráfica del indicador IRI. El lector ya sabe que una de las definiciones más sencillas que pueden darse del IRI es hacerlo como la variación en la distancia entre las masas superior e inferior del modelo de cuarto de coche, acumulada en valor absoluto a lo largo de la longitud de carretera recorrida y dividida por esa longitud recorrida, que en España la norma fija en 100 m. Los valores de las constantes (masas, muelles y amortiguadores) del cuarto de coche son las «Gol-

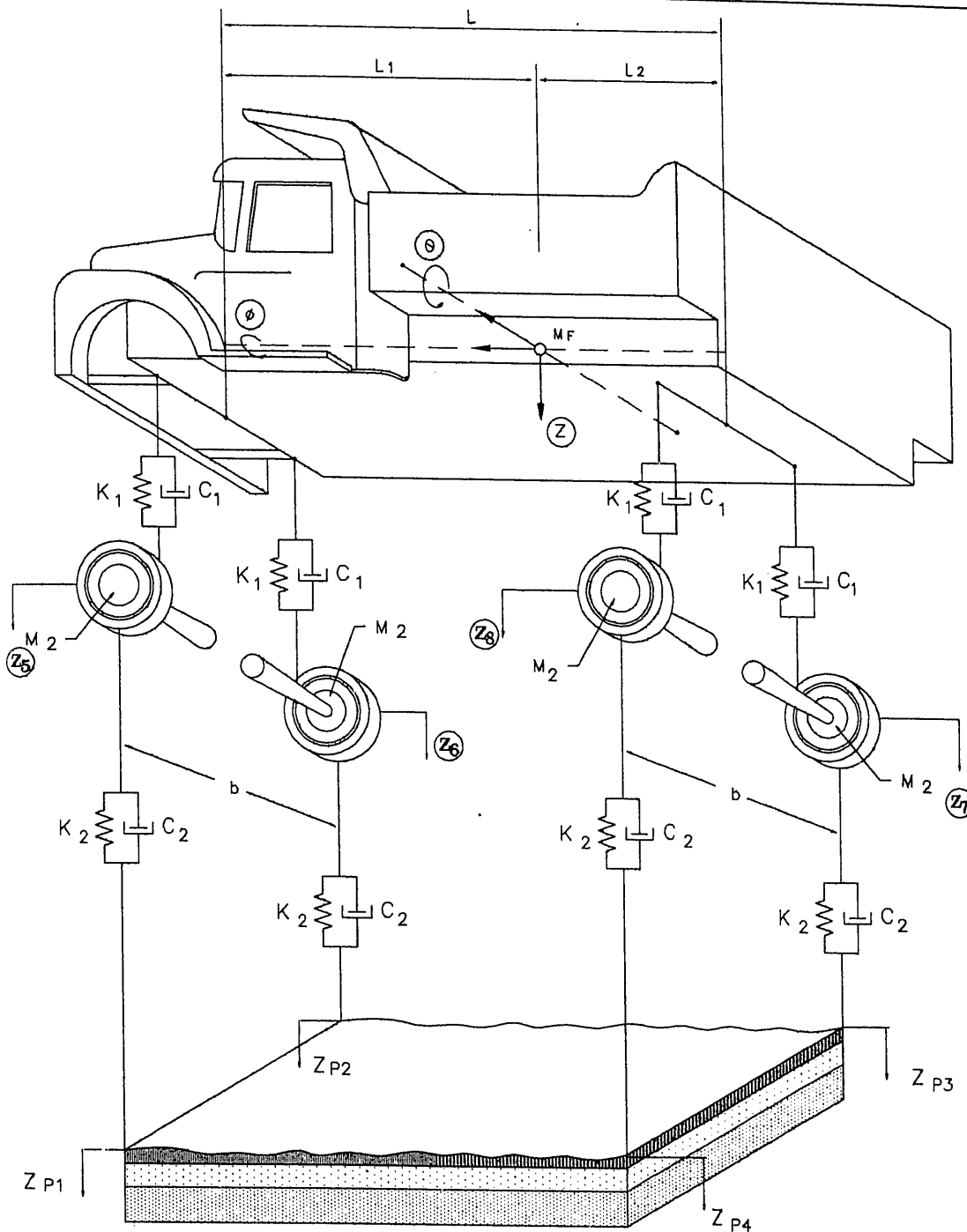
* AEPO, S. A. Ingenieros Consultores.

Figura 1.



$$|RI| = \frac{|d_{i+1} - d_i| + |d_{i+2} - d_{i+1}| + |d_{i+3} - d_{i+2}| + \dots}{L}$$

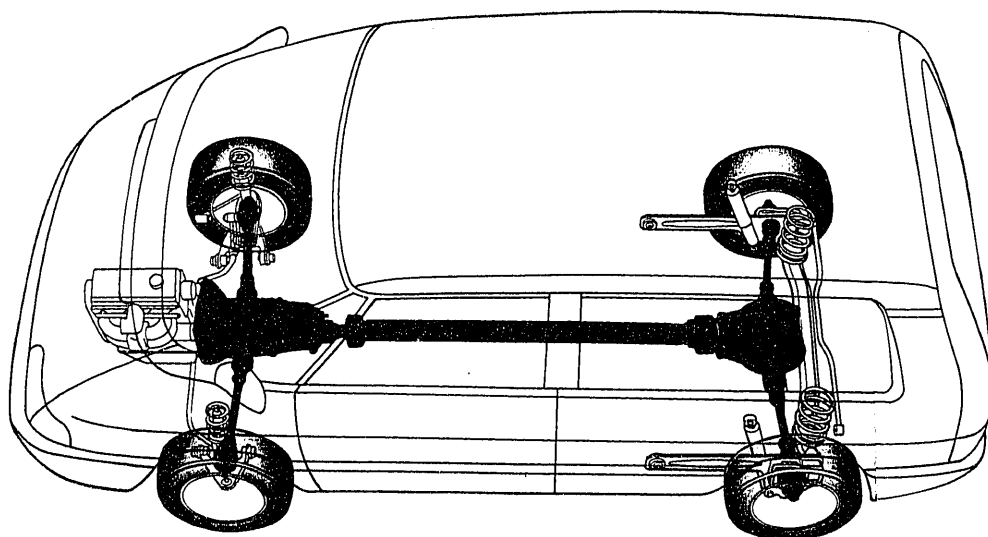
Figura 2.



den Car» vistas en (Ref.3), y la velocidad de avance del modelo por la carretera es de 80 km/h.

La Figura 2 (basada en C.E. Lee, Ref. 10) representa el modelo de coche entero. En las Figuras 3 y 4 se representa el mismo modelo de una forma más esquemática. Estas figuras, de la norma americana ASTM E 1170, pueden simular suspensión independiente o no según tenga eje trasero rígido (Figura 4) o suspensión independiente (Figura 3), lo que se define matemáticamente dando valor nulo a la inercia I_a y la masa M_a del eje trasero y grupo diferencial. Análogamente al cuarto de coche y medio coche ya conocidos, el movimiento relativo del conductor con respecto a los ejes se define por la diferencia entre las cotas z

de la masa superior m_F y la media de las cotas z_5, z_6, z_7 y z_8 de las 4 masas inferiores. Al igual que en el modelo de medio coche, se extiende la definición del IRI a la acumulación del valor absoluto de la diferencia $z - \frac{1}{4}(z_5 + z_6 + z_7 + z_8)$ dividido por la longitud de carretera recorrida. Este «IRI-Coche entero» representará tal vez más exactamente la sensación del conductor que el IRI del cuarto de coche o de medio coche. El modelo de coche entero permite calcular también el balanceo y el cabeceo que sufre el conductor y obtener los correspondientes indicadores de balanceo y cabeceo acumulando los incrementos de giro en valor absoluto y dividiendo por la distancia recorrida. Se sabe que para poder trabajar con el mode-



lo de coche completo es necesario obtener el perfil longitudinal de las dos rodadas de la carretera, lo que los modernos equipos de Auscultación, como el Video-Láser RST proporcionan sin dificultad. El modelo de coche completo tiene 7 grados de libertad, que son las cotas de las 5 masas (z , z_5 , z_6 , z_7 y z_8) y los dos giros (balanceo y cabeceo) de la masa superior. Su movimiento se representa por 7 ecuaciones diferenciales, y como se sabe, los vectores de estado y la matriz de estado tienen doble número de elementos, es decir, 14.

El lector interesado observará que en la expresión de la matriz A dada por la norma ASTM en el apartado X1.3.1 el elemento 13 de la fila 14 tiene un error de imprenta, debiendo aparecer en el numerador L^2 en lugar de L_2 . Salvo eso, y el orden poco adecuado de las variables de estado, la matriz puede tomarse como tal y el sistema se integra y resuelve perfectamente. Para no complicar demasiado las ecuaciones, la norma ASTM prescinde del amortiguamiento c_2 de la rueda, pero puede incluirse en el modelo con suma facilidad como se vió en la Ref.4. En el presente artículo se ha modificado ligeramente el orden del vector de estado con respecto a la ASTM, poniendo la velocidad y aceleración de la masa superior antes que las de las 4 masas inferiores.

3. El modelo de Coche Entero. Ecuaciones del movimiento

Tal como se ha visto al desarrollar el modelo de medio coche, las ecuaciones del movimiento son sumamente sencillas de obtener, y se reducen a aplicar la expresión $F=ma$ a cada uno de los grados de libertad del sistema, desplazamientos y giros. En el caso de giros la expresión se sabe que es la misma sustituyendo la masa por el momento de inercia, la aceleración por la aceleración angular, y la fuerza por el momento. En estos modelos de cuarto de coche, medio coche y coche

entero se suele prescindir de los pesos, porque a efectos de la regularidad superficial no intervienen. Sí intervienen, sin embargo, en el cálculo de las fuerzas dinámicas sobre el pavimento, y por ello a los valores de las fuerzas obtenidas con estos modelos debe sumarse la fuerza estática, es decir, el peso del modelo, como se ha visto en la Ref.4. En cualquier caso, el incluir los pesos en las ecuaciones anteriores es sumamente sencillo, y se reduce a añadir el producto mg correspondiente a cada masa, con el signo adecuado.

En el presente artículo se analiza el coche entero con suspensión independiente. En el caso de eje trasero rígido el proceso de obtención de las ecuaciones del movimiento es análogo pero más largo, y su matriz A puede verse en la norma ASTM, pero también con la amortiguación de rueda nula. La notación que se sigue a continuación es la misma de la Norma USA ASTM E-1170, y es la siguiente:

- z . Ordenada de la masa superior m_F .
 - z_5 . Ordenada de la masa inferior delantera izquierda m_2 .
 - z_6 . Ordenada de la masa inferior delantera derecha m_2 .
 - z_7 . Ordenada de la masa inferior trasera derecha m_2 .
 - z_8 . Ordenada de la masa inferior trasera izquierda m_2 .
 - ϕ . Giro de la masa superior m_F sobre su centro de gravedad con respecto al eje X (balanceo).
 - θ . Giro de la masa superior m_F sobre su centro de gravedad con respecto al eje Y (cabeceo).
- Las cotas de la carretera bajo cada rueda son:
- z_{p1} . Cota bajo la rueda delantera izquierda.
 - z_{p2} . Cota bajo la rueda delantera derecha.
 - z_{p3} . Cota bajo la rueda trasera derecha.
 - z_{p4} . Cota bajo la rueda trasera izquierda.

Al ir avanzando el modelo por la carretera, la cota z_{p1} bajo la rueda delantera izquierda aparecerá al cabo de un tiempo bajo la rueda trasera izquierda. Este intervalo de tiempo depende de la batalla o distancia L entre los ejes delantero y trasero del modelo de coche y de la velocidad del modelo, que suele fijarse por similitud con el IRI en 80 km/h. En el programa de cálculo que se describe a continuación se dispone de los dos perfiles longitudinales de la carretera bajo las ruedas derechas e izquierdas, y en cada perfil se leen en cada intervalo de integración cuatro cotas, las correspondientes a las ruedas delanteras y traseras.

La convención de signos de las ecuaciones diferenciales del sistema es la misma adoptada en el modelo de medio coche en la (Ref.4). Se supone que las fuerzas de los muelles son iguales a las constantes multiplicadas por la diferencia entre la cota del extremo inferior menos la del extremo superior. En el caso de amortiguadores, son proporcionales a sus correspondientes velocidades, lo que indica que son modelos de amortiguación viscosa en lugar de amortiguación Culombiana. Se tiene en cuenta además que en el muelle y el amortiguador situado debajo de cada masa se cambia el signo de las fuerzas. Para no aburrir al lector, ya que el método se ha visto al analizar el modelo de medio coche, sólo se analiza como ejemplo la masa inferior izquierda. La ecuación del movimiento de los otros 6 grados de libertad se obtiene de forma similar.

■ Masa inferior delantera izquierda m_5 .

Si la masa superior ha girado unos ángulos φ y θ de forma que la esquina delantera izquierda ha bajado con ambos giros, el desplazamiento de la masa superior es z y el de la inferior delantera izquierda es z_5 , expresando el equilibrio de la masa m_5 y siendo F_1 y F_2 las fuerzas ejercidas sobre ella desde arriba y desde abajo, se obtiene:

(Ec.1)

$$m_1 \ddot{z}_5 = F_1 + F_2$$

$$F_1 = k_1 (z - z_5 - \frac{b}{2} \varphi - \frac{L}{2} \theta) + c_1 (\dot{z} - \dot{z}_5 - \frac{b}{2} \dot{\varphi} - \frac{L}{2} \dot{\theta})$$

$$F_2 = k_2 (z_{p1} - z_5) + c_2 (\dot{z}_{p1} - \dot{z}_5)$$

y agrupando términos y despejando, se obtiene la ecuación:

(Ec.2)

$$\ddot{z}_5 = \frac{k_1}{m_2} z - \frac{k_1+k_2}{m_2} z_5 - \frac{c_1}{m_2} \dot{z}_5 + \frac{c_1}{m_2} \dot{z} - \frac{k_1 b}{2 m_2}$$

$$+ \frac{c_1 b}{2 m_2} \dot{\varphi} - \frac{k_1 L}{2 m_2} \theta - \frac{c_1 L}{2 m_2} \dot{\theta} + \frac{k_2}{m_2} z_{p1} - \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_{p1}$$

■ Masa inferior delantera derecha m_6 .

De la misma forma, y teniendo en cuenta que cambia el signo del ángulo φ y se conserva el de θ y que el desplazamiento de la masa inferior delantera derecha es z_6 , expresando el equilibrio de la masa m_6 y siendo F_2 y F_4 las fuerzas ejercidas sobre ella desde arriba y desde abajo, se obtiene:

(Ec.3)

$$m_2 \ddot{z}_6 = F_2 + F_4$$

$$F_2 = k_1 (z - z_6 + \frac{b}{2} \varphi - \frac{L}{2} \theta) + c_1 (\dot{z} - \dot{z}_6 + \frac{b}{2} \dot{\varphi} - \frac{L}{2} \dot{\theta})$$

$$F_4 = k_2 (z_{p2} - z_6) + c_2 (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_6)$$

y agrupando términos y despejando, se obtiene la ecuación:

(Ec.4)

$$\ddot{z}_6 = \frac{k_1}{m_2} z - \frac{k_1+k_2}{m_2} z_6 - \frac{c_1}{m_2} \dot{z}_6 + \frac{c_1}{m_2} \dot{z} + \frac{k_1 b}{2 m_2}$$

$$+ \frac{c_1 b}{2 m_2} \dot{\varphi} - \frac{k_1 L}{2 m_2} \theta - \frac{c_1 L}{2 m_2} \dot{\theta} + \frac{k_2}{m_2} z_{p2} - \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_{p2}$$

■ Masa inferior trasera derecha m_7 .

Con la convención de signos anterior, cambia el signo del ángulo θ y se conserva el de φ con respecto a la masa 6. El desplazamiento de la masa inferior trasera derecha es z_7 , y expresando el equilibrio de la masa m_7 , se obtiene la ecuación:

(Ec.5)

$$\ddot{z}_7 = \frac{k_1}{m_2} z - \frac{k_1+k_2}{m_2} z_7 - \frac{c_1}{m_2} \dot{z}_7 + \frac{c_1}{m_2} \dot{z} + \frac{k_1 b}{2 m_2}$$

$$+ \frac{c_1 b}{2 m_2} \dot{\varphi} + \frac{k_1 L}{2 m_2} \theta + \frac{c_1 L}{2 m_2} \dot{\theta} + \frac{k_2}{m_2} z_{p3} - \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_{p3}$$

■ Masa inferior trasera izquierda m_8 .

Cambia el signo del ángulo φ y se conserva el de θ con respecto a la masa 7. El desplazamiento de la masa inferior trasera izquierda es z_8 , y expresando el equilibrio de la masa m_8 se obtiene la ecuación:

(Ec.6)

$$\ddot{z}_8 = \frac{k_1}{m_2} z - \frac{k_1+k_2}{m_2} z_8 - \frac{c_1}{m_2} \dot{z}_8 + \frac{c_1}{m_2} \dot{z} - \frac{k_1 b}{2 m_2} \varphi - \frac{c_1 b}{2 m_2} \dot{\varphi} + \frac{k_1 L}{2 m_2} \theta + \frac{c_1 L}{2 m_2} \dot{\theta} + \frac{k_2}{m_2} z_{p4} - \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_{p4}$$

■ Desplazamiento de la masa superior m_F .

El desplazamiento de la masa superior es z , y se obtiene la ecuación:

(Ec.7)

$$\ddot{z} = \frac{4 k_1}{m_F} z + \frac{k_1}{m_F} z_5 + \frac{k_1}{m_F} z_6 + \frac{k_1}{m_F} z_7 + \frac{k_1}{m_F} z_8 + \frac{c_1}{m_F} \dot{z}_5 + \frac{c_1}{m_F} \dot{z}_6 + \frac{c_1}{m_F} \dot{z}_7 + \frac{c_1}{m_F} \dot{z}_8 - \frac{4 c_1}{m_F} \dot{z}$$

■ Cabeceo φ de la masa superior m_F .

Expresando que el momento de las fuerzas es igual al producto del momento de inercia por la aceleración angular, se obtiene la ecuación:

(Ec.8)

$$\ddot{\varphi} = - \frac{k_1 b}{2 I_x} z_5 + \frac{k_1 b}{2 I_x} z_6 + \frac{k_1 b}{2 I_x} z_7 - \frac{k_1 b}{2 I_x} z_8 - \frac{c_1 b}{2 I_x} \dot{z}_5 + \frac{c_1 b}{2 I_x} \dot{z}_6 + \frac{c_1 b}{2 I_x} \dot{z}_7 - \frac{c_1 b}{2 I_x} \dot{z}_8 - \frac{k_1 b^2}{I_x} \dot{\varphi}$$

■ Balanceo θ de la masa superior m_F .

De la misma forma se obtiene la ecuación:

(Ec.9)

$$\ddot{\theta} = - \frac{k_1 L}{2 I_y} z_5 - \frac{k_1 L}{2 I_y} z_6 + \frac{k_1 L}{2 I_y} z_7 + \frac{k_1 L}{2 I_y} z_8 - \frac{c_1 L}{2 I_y} \dot{z}_5 - \frac{c_1 L}{2 I_y} \dot{z}_6 + \frac{c_1 L}{2 I_y} \dot{z}_7 - \frac{c_1 L}{2 I_y} \dot{z}_8 - \frac{k_1 L}{I_y} \dot{\theta}$$

4. El modelo de Coche Entero. Solución por diferencias finitas

De la misma forma que en (Ref.4) se integró el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales del medio coche con un esquema elemental de diferencias finitas, se integra el modelo de coche entero. Para ello, en las 7 ecuaciones diferenciales anteriores se sustituyen las derivadas primeras y segundas por sus esquemas en diferencias. El lector interesado en el tema ya sabe que hay infinitud de esquemas en diferencias que pueden aplicarse en estos problemas. Se toma, como es habitual en las referencias citadas, un esquema progresivo tanto para las diferencias primeras como para las segundas, esquemas que son los siguientes:

(Ec.10)

$$\ddot{z}_1 \approx \frac{z_{1,t+2} - 2z_{1,t+1} + z_{1,t}}{\Delta t^2} \quad \dot{z}_1 \approx \frac{z_{1,t+1} - z_{1,t}}{\Delta t}$$

$$\dot{\varphi} \approx \frac{\varphi_{1,t+1} - \varphi_{1,t}}{\Delta t} \quad \dot{\theta} \approx \frac{\theta_{1,t+1} - \theta_{1,t}}{\Delta t}$$

y análogamente para el resto de las variables.

Sustituyendo estos esquemas en la ecuación diferencial (Ec.2) anterior, por ejemplo, y despejando la incógnita correspondiente al instante $(t+2)$ se obtiene la ecuación:

$$z_{t+2} = \frac{2m_F - \Delta t 4 c_1}{m_F} z_{t+1} + \frac{c_1 \Delta t}{m_F} z_{5,t+1} + \frac{c_1 \Delta t}{m_F} z_{6,t+1} + \frac{c_1 \Delta t}{m_F} z_{7,t+1} + \frac{c_1 \Delta t}{m_F} z_{8,t+1} + \frac{-m_F - 4k_1 \Delta t^2 + 4c_1 \Delta t}{m_F} z_t + \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_F} z_{5,t} + \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_F} z_{6,t} + \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_F} z_{7,t} + \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_F} z_{8,t}$$

El lector ya sabe que cualquier esquema en diferencias exige un detallado estudio de sus condiciones de estabilidad, convergencia y consistencia para la ecuación diferencial o el sistema de las mismas que se pretende resolver. No se entra

en el presente artículo en estos temas, que pueden verse en la literatura, y sólo se recuerda al lector que el proceso de solución iterativa consiste en ir calculando los vectores Z_{t+2} en función de los Z_{t+1} y Z_t . Una vez calculado el vector Z_{t+2} , en el siguiente paso de integración éste pasa a ser el Z_{t+1} , y éste último pasa a ser el Z_t . El proceso iterativo termina al llegar al final de los ficheros de perfiles longitudinales del terreno, ambas rodadas. Como se ve en las expresiones anteriores, conociendo los valores de las cotas de las 5 masas y los giros de la superior en los instantes t y $t+1$, se calculan las cotas y los giros de las masas en el instante $t+2$ resolviendo el sistema lineal de 7 ecuaciones con 7 incógnitas. En cada paso de integración sólo hay una incógnita en cada

ecuación, y los valores de las cuatro cotas z_p se leen de los ficheros de terreno. Naturalmente, es necesario conocer los valores en los dos primeros intervalos de tiempo para poder avanzar en la integración, y ello es lo que se define con las condiciones iniciales que se verán a continuación. Conocidas estas condiciones iniciales, la forma más sencilla de solución se obtiene poniendo el sistema en la forma matricial habitual como sigue: (Ec. 11)

$$Z_{t+2} = A Z_{t+1} + B Z_t + C Z_p$$

Donde los vectores y matrices son los siguientes:

$$Z_{t+2} = \{ z_{t+2}, z_{5,t+2}, z_{6,t+2}, z_{7,t+2}, z_{8,t+2}, \varphi_{t+2}, \theta_{t+2} \}$$

$$Z_{t+1} = \{ z_{t+1}, z_{5,t+1}, z_{6,t+1}, z_{7,t+1}, z_{8,t+1}, \varphi_{t+1}, \theta_{t+1} \}$$

$$Z_t = \{ z_t, z_{5,t}, z_{6,t}, z_{7,t}, z_{8,t}, \varphi_t, \theta_t \}$$

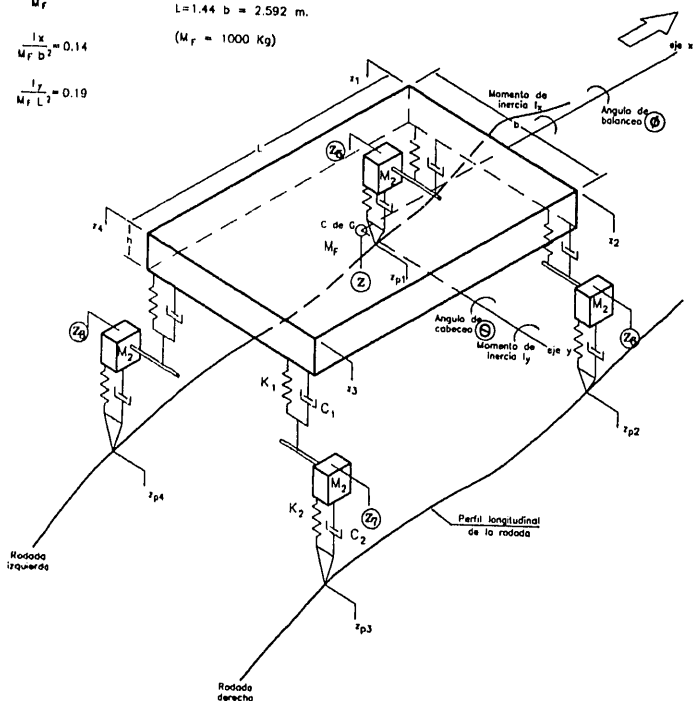
$$Z_p = \{ z_{p1,t}, z_{p2,t}, z_{p3,t}, z_{p4,t} \}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2m_F - 4c_1 \Delta t}{m_F} & \frac{c_1 \Delta t}{m_F} & \frac{c_1 \Delta t}{m_F} & \frac{c_1 \Delta t}{m_F} & \frac{c_1 \Delta t}{m_F} & 0 & 0 \\ \frac{c_1 \Delta t}{m_2} & \frac{2m_2 - c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_1 b \Delta t}{2m_2} & -\frac{c_1 L \Delta t}{2m_2} \\ \frac{c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & \frac{2m_2 - c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & 0 & \frac{c_1 b \Delta t}{2m_2} & -\frac{c_1 L \Delta t}{2m_2} \\ \frac{c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & 0 & \frac{2m_2 - c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & \frac{c_1 b \Delta t}{2m_2} & \frac{c_1 L \Delta t}{2m_2} \\ \frac{c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2m_2 - c_1 \Delta t}{m_2} & -\frac{c_1 b \Delta t}{2m_2} & \frac{c_1 L \Delta t}{2m_2} \\ 0 & -\frac{c_1 b \Delta t}{2I_x} & \frac{c_1 b \Delta t}{2I_x} & \frac{c_1 b \Delta t}{2I_x} & -\frac{c_1 b \Delta t}{2I_x} & \frac{2I_x - c_1 b^2 \Delta t}{I_x} & 0 \\ 0 & -\frac{c_1 L \Delta t}{2I_y} & -\frac{c_1 L \Delta t}{2I_y} & \frac{c_1 L \Delta t}{2I_y} & \frac{c_1 L \Delta t}{2I_y} & 0 & \frac{2I_y - c_1 L^2 \Delta t}{I_y} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-m_F + 4c_1 \Delta t - 4k_1 \Delta t^2}{m_F} & \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_F} & \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_F} & \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_F} & \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_F} & 0 & 0 \\ \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_2} & \frac{-m_2 - (k_1 + k_2) \Delta t^2 + c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-k_1 b \Delta t^2 + c_1 b \Delta t}{2m_2} & \frac{-k_1 L \Delta t^2 + c_1 L \Delta t}{2m_2} \\ \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & \frac{-m_2 - (k_1 + k_2) \Delta t^2 + c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & 0 & \frac{-k_1 b \Delta t^2 + c_1 b \Delta t}{2m_2} & \frac{-k_1 L \Delta t^2 + c_1 L \Delta t}{2m_2} \\ \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & 0 & \frac{-m_2 - (k_1 + k_2) \Delta t^2 + c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & \frac{k_1 b \Delta t^2 - c_1 b \Delta t}{2m_2} & \frac{k_1 L \Delta t^2 - c_1 L \Delta t}{2m_2} \\ \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-m_2 - (k_1 + k_2) \Delta t^2 + c_1 \Delta t}{m_2} & \frac{-k_1 b \Delta t^2 + c_1 b \Delta t}{2m_2} & \frac{k_1 L \Delta t^2 - c_1 L \Delta t}{2m_2} \\ 0 & \frac{-k_1 b \Delta t^2 + c_1 b \Delta t}{2I_x} & \frac{k_1 b \Delta t^2 - c_1 b \Delta t}{2I_x} & \frac{k_1 b \Delta t^2 - c_1 b \Delta t}{2I_x} & \frac{-k_1 b \Delta t^2 + c_1 b \Delta t}{2I_x} & \frac{-I_x - k_1 b^2 \Delta t^2 + c_1 b^2 \Delta t}{I_x} & 0 \\ 0 & \frac{-k_1 L \Delta t^2 + c_1 L \Delta t}{2I_y} & \frac{-k_1 L \Delta t^2 + c_1 L \Delta t}{2I_y} & \frac{k_1 L \Delta t^2 - c_1 L \Delta t}{2I_y} & \frac{k_1 L \Delta t^2 - c_1 L \Delta t}{2I_y} & 0 & \frac{-I_y - k_1 L^2 \Delta t^2 + c_1 L^2 \Delta t}{I_y} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2 \Delta t^2}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2 \Delta t^2}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2 \Delta t^2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_2 \Delta t^2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

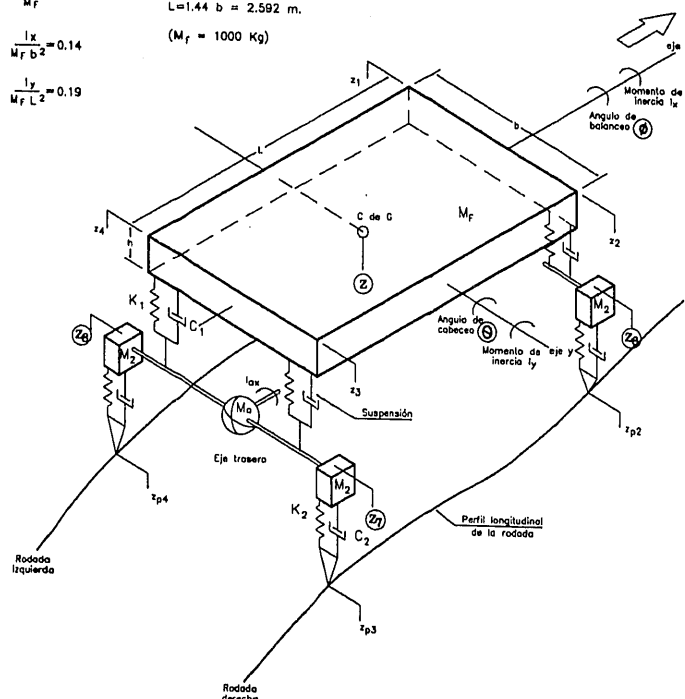
$$\begin{aligned} \frac{K_1}{M_F} &= 16 \frac{1}{S^2} & \frac{C_1}{M_F} &= 1.5 \frac{1}{S} \\ \frac{K_2}{M_F} &= 163 \frac{1}{S^2} & \frac{C_2}{M_F} &= 0 \\ \frac{M_2}{M_F} &= 0.038 & b &= 1.80 \text{ m.} \\ \frac{I_x}{M_F L^2} &= 0.14 & L &= 1.44 \text{ b} = 2.592 \text{ m.} \\ \frac{I_y}{M_F L^2} &= 0.19 & (M_F &= 1000 \text{ Kg}) \end{aligned}$$



MODELO DE COCHE COMPLETO
(SUSPENSIÓN INDEPENDIENTE)

○ = GRADOS DE LIBERTAD

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{M_F} &= 16 \frac{1}{S^2} & \frac{C_1}{M_F} &= 1.5 \frac{1}{S} \\ \frac{K_2}{M_F} &= 163 \frac{1}{S^2} & \frac{C_2}{M_F} &= 0 \\ \frac{M_2}{M_F} &= 0.038 & b &= 1.80 \text{ m.} \\ \frac{I_x}{M_F L^2} &= 0.14 & L &= 1.44 \text{ b} = 2.592 \text{ m.} \\ \frac{I_y}{M_F L^2} &= 0.19 & (M_F &= 1000 \text{ Kg}) \end{aligned}$$



MODELO DE COCHE COMPLETO
(CON EJE TRASERO)

○ = GRADOS DE LIBERTAD

Figuras 3 y 4.

En el vector Z_p las variables Z_p son las cotas de los perfiles longitudinales de las rodadas izquierda y derecha, que van leyéndose de los perfiles longitudinales de la carretera conforme va avanzando el cálculo. Con la notación de la Norma ASTM que puede verse en las figuras 3 y 4, el dato z_{p1} es la cota de la rodada izquierda leída por la rueda delantera, y z_{p4} es la leída por la rueda trasera. Al ir avanzando el coche por la carretera la rueda posterior irá leyendo cotas previamente leídas por la delantera, y que están separadas precisamente la distancia L entre ejes delantero y trasero. De la misma forma, en el lado derecho las cotas correspondientes a las ruedas delantera y trasera son z_{p2} y z_{p3} .

Al igual que en el caso del cuarto de coche de (Ref.3) y del medio coche de (Ref.4), se va calculando el vector Z_{t+2} iterativamente, a partir de los vectores Z_{t+1} y Z_t y de las cotas que se van leyendo del perfil de la carretera. Para obtener el «IRI-Coche Entero», en cada instante se calcula la diferencia de cotas d_{t+2} entre el centro de gravedad de la masa m_F y la media de las cotas de las cuatro masas inferiores m_5 a m_8 . (Ec.12)

$$d_{t+2} = z_{t+2} - \frac{z_{5,t+2} + z_{6,t+2} + z_{7,t+2} + z_{8,t+2}}{4}$$

$$FRI = IRI - \text{Coche Entero} = \frac{\sum |d_{t+2} - d_{t+1}|}{L}$$

Ya se ha dicho más arriba que el FRI o «IRI-Coche Entero» puede definirse como el acumulado del valor absoluto de la variación de esta distancia d_{t+2} menos la anterior d_{t+1} , y dividido por la longitud de carretera recorrida, que en España es de 100 m. El método de cálculo no puede ser más sencillo, y el desarrollo es idéntico al visto en el medio coche de la referencia citada.

5. Solución por el Método de la Ecuación de Estado

El lector puede ver con algún detalle el método de la ecuación de estado y la obtención de la ecuación de recurrencia en la Ref. 4. El sistema de 14 ecuaciones diferenciales formado por las 7 ecuaciones diferenciales anteriores y las 7 identidades del tipo

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt}; \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}; \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

debe ponerse en la forma matricial ya conocida para resolverlo por el método de la ecuación de estado. Para ello se definen los vectores de estado habituales (que en este caso son de orden 14), el Vector de Estado Z y su derivada dZ/dt :

$$\{Z\}^T = \{z \ z_3 \ z_6 \ z_7 \ z_8 \ \dot{z} \ \dot{z}_3 \ \dot{z}_6 \ \dot{z}_7 \ \dot{z}_8 \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta}\}$$

$$\left\{\frac{dZ}{dt}\right\}^T = \{z \ \dot{z} \ z_3 \ \dot{z}_3 \ z_6 \ \dot{z}_6 \ z_7 \ \dot{z}_7 \ z_8 \ \dot{z}_8 \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta}\}$$

de forma que la ecuación puede ponerse en la clásica forma matricial siguiente:
(Ec. 13)

$$\frac{dZ}{dt} = A Z + F$$

donde la matriz A del sistema de coche entero es la siguiente:
(Ec. 14)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{m_F} \frac{k_1}{m_F} & \frac{k_1}{m_F} & \frac{k_1}{m_F} & \frac{k_1}{m_F} & \frac{k_1}{m_F} & \frac{c_1}{m_F} & \frac{c_1}{m_F} & \frac{c_1}{m_F} & \frac{c_1}{m_F} & \frac{c_1}{m_F} & -\frac{4c_1}{m_F} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{k_1 b}{m_2} & -\frac{c_1 b}{2m_2} & -\frac{k_1 L}{2m_2} & -\frac{c_1 L}{2m_2} & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_1}{m_2} & 0 & 0 & \frac{c_1}{m_2} & \frac{k_1 b}{2m_2} & \frac{c_1 b}{2m_2} & -\frac{k_1 L}{2m_2} & -\frac{c_1 L}{2m_2} & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & 0 & 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_1}{m_2} & 0 & \frac{c_1}{m_2} & \frac{k_1 b}{2m_2} & \frac{c_1 b}{2m_2} & \frac{k_1 L}{2m_2} & \frac{c_1 L}{2m_2} & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_1}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & \frac{k_1 b}{2m_2} & \frac{c_1 b}{2m_2} & \frac{k_1 L}{2m_2} & \frac{c_1 L}{2m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1 b}{2I_x} & \frac{k_1 b}{2I_x} & \frac{k_1 b}{2I_x} & -\frac{k_1 b}{2I_x} & -\frac{c_1 b}{2I_x} & \frac{c_1 b}{2I_x} & \frac{c_1 b}{2I_x} & -\frac{c_1 b}{2I_x} & 0 & -\frac{k_1 b^2}{I_x} & -\frac{c_1 b^2}{I_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1 L}{2I_y} & -\frac{k_1 L}{2I_y} & \frac{k_1 L}{2I_y} & \frac{k_1 L}{2I_y} & -\frac{c_1 L}{2I_y} & -\frac{c_1 L}{2I_y} & \frac{c_1 L}{2I_y} & \frac{c_1 L}{2I_y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_1 L^2}{I_y} & -\frac{c_1 L^2}{I_y} & 0 \end{bmatrix}$$

y el vector de fuerzas exteriores es el siguiente:
(Ec. 15)

$$\{F\}^T = \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{k_2}{m_2} z_{p1}, \frac{k_2}{m_2} z_{p2}, \frac{k_2}{m_2} z_{p3}, \frac{k_2}{m_2} z_{p4}, 0, 0, 0, 0 \right\}$$

Ya se ha dicho más arriba que las variables z_p son las cotas de los perfiles longitudinales de las

rodadas izquierda y derecha que van leyéndose conforme va avanzando el cálculo. Se recuerda también que z_{p1} es la cota de la rodada izquierda leída por la rueda delantera, y z_{p4} es la leída por la rueda trasera. Al ir avanzando el coche por la carretera la rueda posterior irá leyendo cotas previamente leídas por la delantera, separadas como se ha dicho la distancia L entre ejes delantero y trasero. En el lado derecho las cotas correspondientes a las ruedas delantera y trasera son z_{p2} y z_{p3} .

Se sabe por la (Ref. 4) que la solución del sistema se obtiene por medio de un esquema de cálculo iterativo, que es el conocido:
(Ec. 16)

$$Z_{n+1} = e^{A \Delta t} Z_n + A^{-1} [e^{A \Delta t} - I] F$$

Para el modelo de coche entero de la norma ASTM los valores que se toman en el presente artículo son

$$\begin{aligned} m_F &= 1000 \text{ kg} \\ \frac{k_1}{m} &= 16 \frac{1}{\text{sg}^2} & \frac{k_2}{m_F} &= 163 \frac{1}{\text{sg}^2}; & \frac{m_2}{m_F} &= 0.038; & (m_2 = m_1); \\ \frac{c_1}{m_F} &= 1.5 \frac{1}{\text{sg}} & \frac{c_2}{m_F} &= 0; \\ \frac{I_x}{m_F b^2} &= 0.14; & \frac{I_y}{m_F L^2} &= 0.19; & b &= 1.80 \text{ m}; & L &= 1.44 \text{ b}_1 \end{aligned}$$

y debe tenerse que cuenta que, aunque los datos se presentan en forma adimensional, la masa superior para el coche entero es de 1000 kg en magnitud absoluta.

Obsérvese que la ASTM define las constantes elásticas y de amortiguamiento para este modelo de coche entero como la mitad de las de medio coche y la cuarta parte de las correspondientes al cuarto de coche.

6. Condiciones iniciales del Coche entero

Para el cálculo del IRI-Coche entero, al igual que para el HRI o «IRI - Medio coche», tampoco se ha definido aún un método estándar. En este artículo se toman las condiciones iniciales de posición y velocidad de las 5 masas similares a las recomendadas para el cálculo del IRI con el modelo de cuarto de coche dadas por el Banco Mundial y vistas en (Ref. 2). Por ello en el programa que se describe en el presente artículo se toman como sigue:

- Cotas iniciales de las 2 masas inferiores traseras iguales a las primeras cotas leídas de los respectivos perfiles longitudinales izquierdo y derecho.

- Cotas iniciales de las 2 masas inferiores delanteras iguales a las cotas de los respectivos perfiles longitudinales izquierdo y derecho situadas a L metros de distancia en el sentido de avance de los perfiles.
- Cota inicial de la masa superior igual a la media aritmética de las cotas iniciales de las 4 masas inferiores.
- Giros φ y θ iniciales de la masa superior iguales a cero.
- Velocidades verticales de las 4 masas inferiores iguales a la velocidad vertical obtenida al recorrer la rodada correspondiente a cada masa durante 0,5 segundos a la velocidad del modelo.
- Velocidades de giro de la masa superior nulas.
- Aceleraciones iniciales: todas nulas.

7. Cálculo del «IRI-Coche Entero»

Conocidas en cada instante las cotas, velocidades y aceleraciones de las masas superior e inferior, el cálculo del IRI es inmediato. En la expresión del FRI o «IRI Coche entero» dada más arriba (Ec. 17)

$$d_t = z - \frac{z_5 + z_6 + z_7 + z_8}{4}$$

$$IRI-CocheEntero = \frac{\sum |d_t - d_{t-1}|}{L}$$

no hay más que calcular en cada paso de integración el valor absoluto de la diferencia de cotas entre la masa superior y la media de las inferiores, ir acumulando éste valor, y dividir al final de cada tramo de cálculo por la distancia recorrida. Las cotas de la masa superior y de las masas 5, 6, 7 y 8 son los cinco primeros elementos del vector de estado que se calcula en cada iteración tras leer las nuevas cotas. Al igual que se dijo en el caso del medio coche (Ref.4), las cotas del perfil longitudinal de cada rodada suelen venir dadas en mm. Como la distancia recorrida suele medirse en metros, el IRI se obtiene directamente en sus unidades dm/Hm, iguales a mm/m. En caso de que las cotas del perfil longitudinal estén en otras unidades, deben convertirse a las apropiadas.

8. Cálculo del balanceo y cabeceo acumulados

Al igual que se dijo en la Ref.4, el «IRI-Balanceo» es el incremento de ángulo que ha girado la masa superior con respecto al eje X en un incremento de tiempo Δt , acumulado en valor absoluto, y dividido por la distancia recorrida L. Se mide en grados o radianes cada 100 metros. El balanceo es el elemento 11 del vector de estado que se calcula en cada paso. Como las cotas del perfil longitudinal de las rodadas están en mm y la distancia entre ruedas b está dada en metros, el

balanceo se obtiene en miliradianes al resolver el sistema. Deben tenerse en cuenta las unidades al utilizar el programa del presente artículo. (Ec. 18)

$$IRI-Balanceo = \frac{\sum |\Delta \varphi|}{L}$$

El «IRI-Cabeceo» es el incremento de ángulo θ que ha girado la masa superior con respecto al eje Y en un incremento de tiempo t, acumulado en valor absoluto, y dividido por la distancia recorrida L. Se mide igual que el balanceo y es el elemento 13 del vector de estado. (Ec. 19)

$$IRI-Cabeceo = \frac{\sum |\Delta \theta|}{L}$$

9. Aceleraciones verticales y angulares sufridas por el conductor

El cálculo de las aceleraciones verticales o angulares sufridas por el conductor se ha visto al detallar el modelo de medio coche en la Ref. 4. La aceleración vertical de la masa superior se obtiene en cada paso de integración directamente, ya que puede verse en el apartado 5 anterior que es el elemento 6 del vector de estado.

Las aceleraciones angulares de cabeceo y balanceo son los elementos 12 y 14 del vector de estado, que se obtienen también directamente en cada paso de integración.

10. Esfuerzos dinámicos sobre el pavimento. Disminución de adherencia de las ruedas

Las fuerzas dinámicas sobre el pavimento bajo una cualquiera de las 4 ruedas se obtiene también muy sencillamente por medio de las expresiones dadas al analizar las ecuaciones de movimiento del coche. Por ejemplo, la fuerza bajo la rueda delantera izquierda viene dada por la expresión:

$$F_2 = k_2 (z_{p1} - z_5) + c_2 (\dot{z}_{p1} - \dot{z}_5)$$

Bajo la rueda delantera derecha, la expresión de la fuerza dinámica es igualmente:

$$F_4 = k_2 (z_{p2} - z_6) + c_2 (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_6)$$

y análogamente para las dos ruedas traseras.

Las fuerzas totales sobre el pavimento se obtienen sumando al esfuerzo dinámico así obtenido el esfuerzo estático, es decir, el peso correspondiente a la rueda correspondiente. Este peso en general puede suponerse como la cuarta parte del peso total del modelo. El lector observará que en estos modelos la fuerza sobre el pavimento depende exclusivamente de las constantes elásticas y de amortiguación del neumático y de la diferencia de cotas entre el pavimento y el eje de la rueda. La influencia del resto del sistema dinámico se recoge precisamente en la cota del eje de la rueda (masa inferior del modelo).

11. Aplicación a una carretera real. Comparación de los 3 modelos

En la Ref.4 se presentaban dos perfiles longitudinales de autovías españolas, ambos de 3 km de longitud. A continuación se utilizan esos mismos perfiles para comparar los resultados de los modelos de cuarto de coche, medio coche y coche entero.

IRI, «IRI-Medio coche» e «IRI-Coche entero»

En la Figura 5 se presentan los resultados obtenidos para el IRI con el modelo de coche entero, y su comparación con los de cuarto y medio coche. Puede verse que el «IRI-Coche Entero» es inferior al «IRI-Medio coche», que ya se vió a su vez que era aproximadamente igual al 70 % de la media de los IRI cuarto de coche de cada una de las dos rodadas. En dicha figura puede verse en la figura que el IRI del coche entero es aproximadamente igual a la mitad de la media de los IRI cuarto de coche de cada rodada.

En la Figura 6 puede verse la influencia de la velocidad sobre el «IRI-Coche entero», y cómo disminuye en este caso particular al aumentar la velocidad del modelo.

12. Otros modelos de coche y camión

Los modelos vistos hasta ahora para el cuarto de coche, el medio coche y el coche entero son los más sencillos que pueden diseñarse. Como se ha visto, todos ellos se basan en los siguientes elementos:

- Ausencia del peso propio.
- Están formados por un conjunto de masas e inercias.
- Los muelles son de constante elástica fija e invariable, igual en compresión que en extensión.
- Los amortiguadores son de tipo viscoso, de constante fija e invariable, proporcional a la velocidad de compresión o extensión de los extremos del amortiguador.

Es evidente que estos modelos, aún con la relativa complicación que supone su integración, no representan totalmente la realidad del movimiento de un automóvil o un camión sobre una carretera. Se resumen a continuación algunos modelos que suponen complicaciones sucesivas sobre los modelos elementales ya vistos.

IRI, IRI MEDIO COCHE e IRI COCHE ENTERO

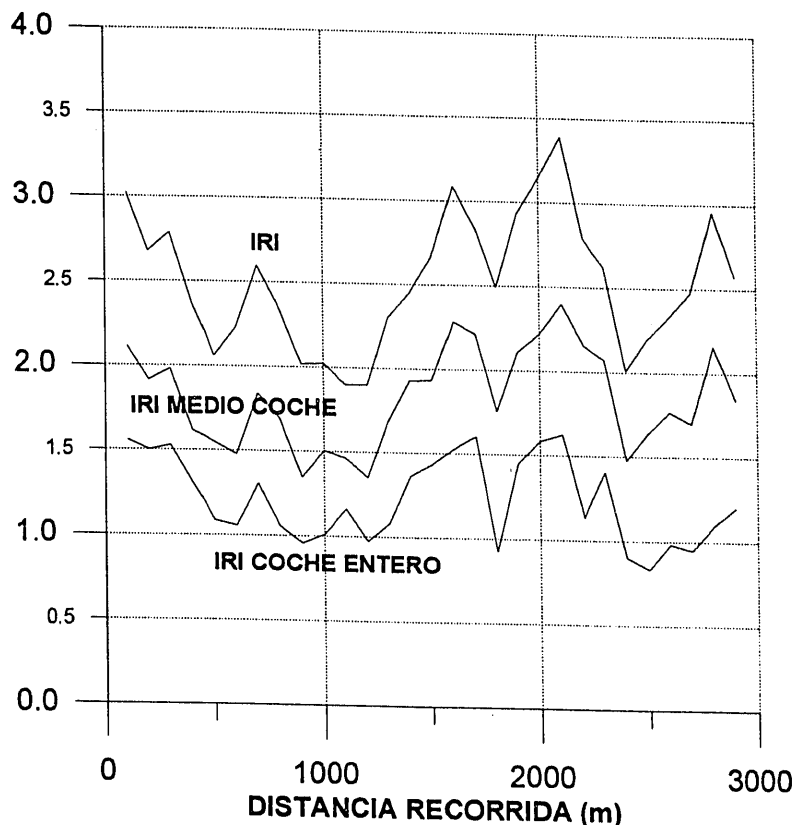


Figura 5. Comparación de los IRI de cuarto de coche, medio coche y coche entero para la misma carretera. En los modelos de medio coche y coche entero se ha tomado la misma rodada bajo las ruedas izquierda y derecha.

Modelo de Camión-Trailer de Kulakowsky

En la Ref.8 se presenta el modelo de camión y trailer que se esquematiza en la Figura 7. Como puede verse, hay una masa delantera M_{S1} que representa la cabeza tractora, y una masa trasera M_{S2} que representa el trailer. Están conectadas ambas masas por el muelle y el amortiguador de constantes k_5 y c_5 . El modelo tiene 3 ejes en la cabeza tractora y dos en el trailer, representados los 5 por las masas M_{u1} , M_{u2} y M_{u3} , con constantes elásticas y de amortiguación k y c . Las constantes de los neumáticos son las k_T , diferentes para el eje director, los ejes motrices de la cabeza y para los ejes del trailer.

Los grados de libertad del sistema son 9: el giro y el desplazamiento vertical de la cabeza tractora, el giro y el desplazamiento vertical del trailer, y los 5 desplazamientos verticales de los 5 ejes. Para integrar el sistema se define el vector de estado, que tendrá 18 elementos (los 9 grados de libertad y sus 9 derivadas), y con el mismo orden del vector de estado se establece la matriz A , que es de orden 18. La ecuación diferencial matricial es de la forma:

$$\frac{dZ}{dt} = A Z + F$$

y el esquema iterativo se obtiene calculando la matriz de transición de estado a partir de la matriz A , llegando a la conocida expresión:

VARIACION DEL "IRI COCHE ENTERO" CON LA VELOCIDAD

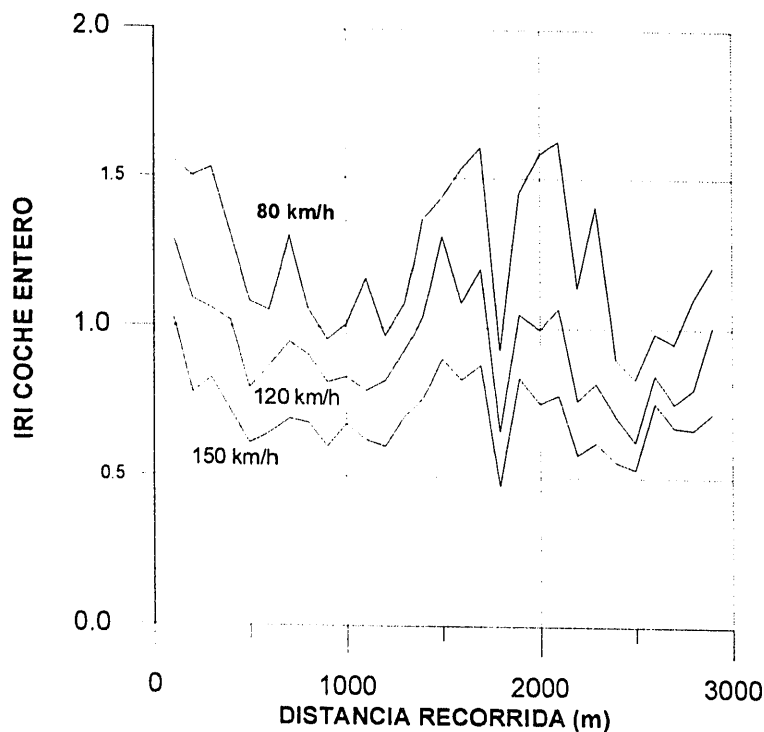


Figura 6. Variación de los IRI con la velocidad del modelo.

$$Z_{n+1} = e^{A\Delta t} Z_n + A^{-1}[e^{A\Delta t} - I] F$$

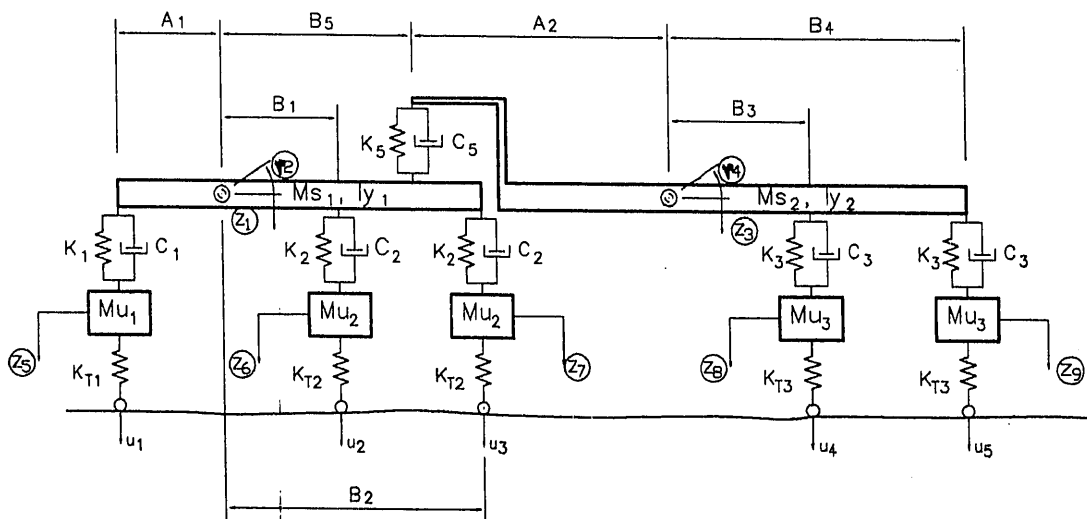
La misma rutina de creación de la matriz de transición de estado a partir de la matriz A, la rutina de inversión y todo el proceso de cálculo iterativo es aplicable. Sólo es necesario modificar en el programa las dimensiones de la matriz y del vector.

Este modelo de medio camión-trailer puede ampliarse a modelo completo de la misma forma que se pasa del modelo de cuarto de coche al modelo de medio coche. En este caso se pasaba de los dos grados de libertad del cuarto de coche (los dos movimientos verticales de las masas) a los 4 grados de libertad del medio coche (los 3 verticales de las 3 masas y el giro de la masa superior). En el caso del trailer, los 9 grados de libertad pasan a 10 movimientos verticales de los ejes, 2 verticales de las masas superiores que se conservan, y aparecen dos nuevos giros además de los 2 ya existentes. Los grados de libertad pasan a 16. La matriz A pasa a ser de orden 32, y el proceso de cálculo es el mismo anterior.

Otro tipo de modelo de camión-trailer, de los muchos existentes en la literatura, es el representado en la figura 8.

Modelos de amortiguamiento culombiano

En la figura 9 se presentan modelos de suspensiones compuestas de elementos viscosos y elementos culombianos. Estos modelos están toma-



MODELO DE MEDIO CAMION-TRAILER

○ = GRADOS DE LIBERTAD

Figura 7. Modelo de Kulakowsky.

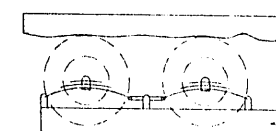
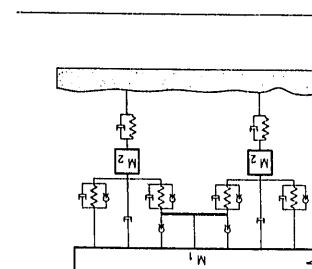
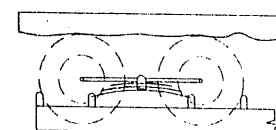
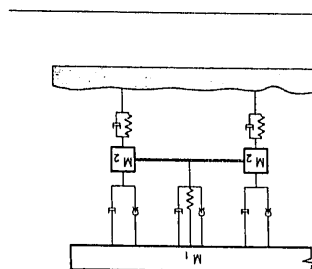
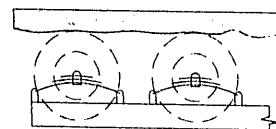
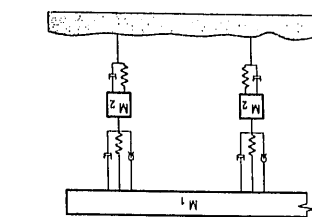
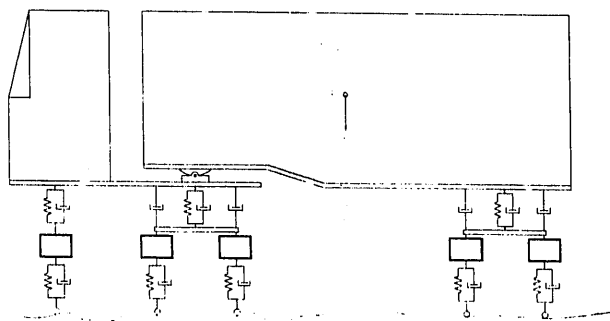
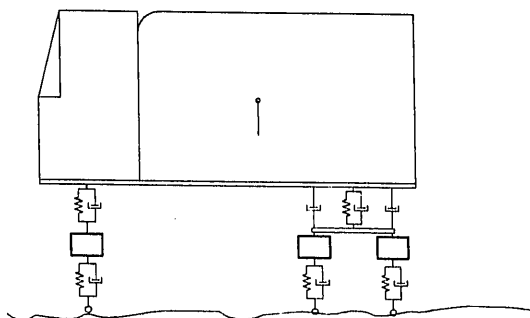
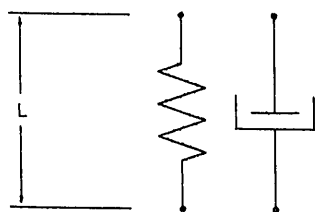


Figura 8. Otro modelo de camión-trailer.

Figura 9. Modelos de suspensión con amortiguamientos curvilineos.

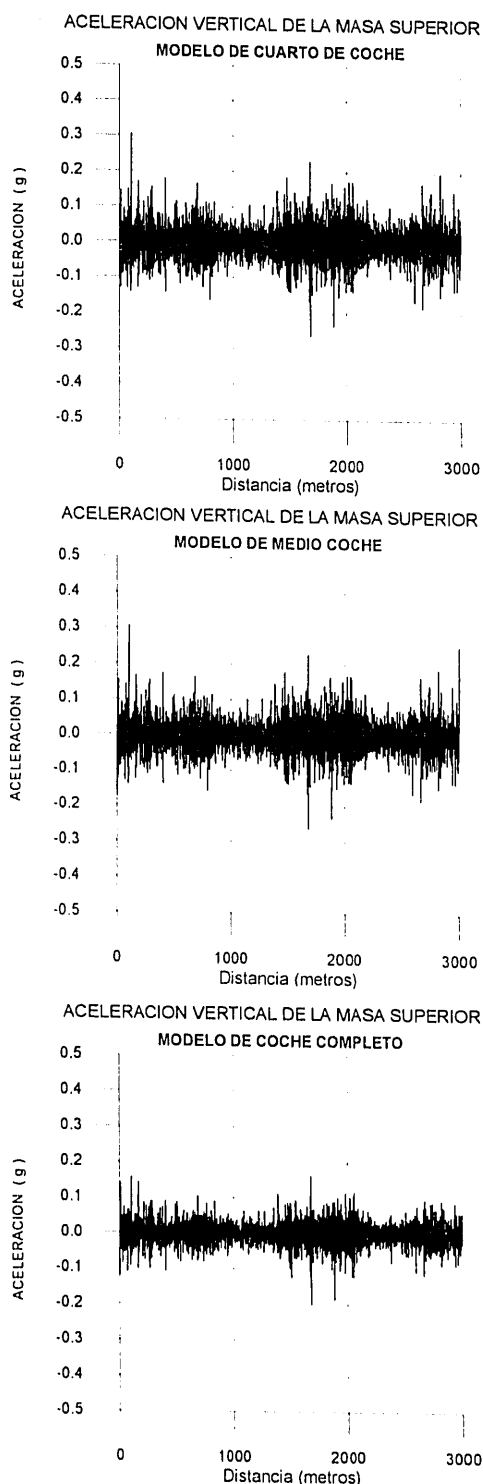


K, C

ΔL

Figura 10. Esquema general de muelle y amortiguador que puede introducirse en los modelos de cuarto de coche, medio coche y coche entero.

Figura 11a. Comparación entre las aceleraciones verticales sufridas por el conductor en la misma carretera con los 3 niveles. Obsérvese que el modelo de coche entero (Fig. 10c) avanza mucho el módulo de la aceleración en comparación con el cuarto de coche o el medio coche.



dos de la TRRL (Ref. 9). El amortiguador coulombiano no actúa de forma proporcional a su velocidad de deformación, sino que al extenderse produce una amortiguación constante e independiente de la velocidad de deformación, e igualmente al comprimirse. La expresión analítica de este tipo de amortiguadores es la siguiente:

Amortiguamiento Viscoso

$$F = c (\dot{z}_1 - \dot{z}_5)$$

Amortiguamiento Coulombiano

$$F = b [\text{signo}(\dot{z}_1 - \dot{z}_5)]$$

donde

$$\begin{aligned} \text{signo}(x) &= +1 \quad \text{si } x > 0 \\ \text{signo}(x) &= 0 \quad \text{si } x = 0 \\ \text{signo}(x) &= -1 \quad \text{si } x < 0 \end{aligned}$$

y la expresión de las ecuaciones diferenciales correspondientes es similar a las ya vistas, si bien algo más complicada por la aparición de la función signo.

Modelos de suspensión y amortiguación variable

Sin tener que llegar a modelos mucho más complejos que los anteriores, los métodos de integración vistos en el presente artículo permiten simular aún mejor las suspensiones y amortiguaciones de los camiones y automóviles reales.

Se ha visto que los muelles que simulan las balistas de la suspensión son de constante k igual para compresión que para extensión, y que no varía con la deformación del muelle. Sin embargo, con la misma facilidad puede modelizarse cualquier otro tipo de suspensión. En la Figura 10 se esquematiza un muelle cuya constante es distinta para compresión y para extensión, y en el que además la constante no es lineal con la deformación. Sea cual sea la función que represente la relación entre la constante del muelle y la deformación del mismo, puede representarse por medio de una tabla numérica en la que para cada valor de la distancia entre los extremos del muelle se obtenga la constante. De esta forma, en el esquema de integración por diferencias finitas visto en la Ecuación 11 anterior, es posible ver en cada paso de integración las distancias entre los extremos de cada uno de los 8 muelles del sistema y calcular sus respectivas constantes en ese instante. Con estos valores se recalculan en cada paso las matrices A , B y C y se obtienen los nuevos valores de las incógnitas correspondientes al instante siguiente. Igualmente se resuelve el caso de amortiguamiento variable en función de la extensión o compresión de los extremos del amortiguador.

La solución por el método del espacio de estado de estos problemas de coeficientes variables es sensiblemente más complicada, y no se trata en el presente artículo.

13. Comparación de resultados de los modelos de cuarto de coche, medio coche y coche entero

Aceleraciones verticales que sufre el conductor

En las figs. 11 a, b y c pueden verse las aceleraciones que sufre el conductor con cada uno de los tres modelos (cuarto de coche, medio coche y coche entero) para la misma carretera y a la misma velocidad. Se ha tomado la misma rodada bajo las ruedas derecha e izquierda en los mode-

los de medio coche y coche entero. Se observa que el coche entero suaviza mucho las aceleraciones, de forma que la aceleración de este modelo es del orden del 75 % de la medida por el modelo de cuarto de coche.

Esfuerzos verticales sobre el pavimento

En las figs. 12 a, b y c pueden verse los esfuerzos dinámicos sobre el pavimento con cada uno de los tres modelos (cuarto de coche, medio coche y coche entero) para la misma carretera y a la misma velocidad. Se observa que los tres modelos dan valores muy similares, de forma que puede utilizarse el modelo de cuarto de coche para estos cálculos, sin tener que ir a modelos más complicados.

Bibliografía

- (1) Banco Mundial. Technical Paper 45. «The international road roughness experiment». Establishing correlation and a calibration standard for measurements. Michael W. Sayers, Thomas D. Gillespie y Cesar A.V. Queiroz, 1986.
- (2) Banco Mundial. Technical Paper 46. «Guidelines for conducting and calibrating road roughness measurements». Michael W. Sayers, Thomas D. Gillespie y William D. O. Paterson, 1986.
- (3) «Cálculo del IRI de una carretera a partir de su perfil longitudinal». Manuel J. Melis, *Rutas*, mayo-junio 1992.
- (4) «El IRI, el HRI y los modelos de cuarto de coche y medio coche. Solución por el método de la ecuación de estado». Manuel J. Melis, *R. Obras Públicas*, abril 1993.
- (5) «Applied numerical methods» Carnahan, Luther y Wilkes, Wiley 1969. Versión Española Manuel J. Melis y E. de Miguel, ed. Rueda, 1979.
- (6) ASTM. Norma E 1170-91 «Standard practices for simulating vehicular response to longitudinal profiles of a vehicular traveled surface».
- (7) TRB (Transportation Research Board) 68th Annual Meeting, 1989. «Two quarter-car models for defining road roughness: IRI and HRI». Michael W. Sayers, University of Michigan, Transportation Research Institute.
- (8) TRB (Transportation Research Board) 68th Annual Meeting, 1989. «Simple computer models for predicting ride quality and pavement loading for heavy trucks». Kevin Todd y Bodhan Kulakowski.
- (9) «Dynamic behaviour of two linked-axle lorry suspension systems: A theoretical study». J. Page. TRRL Report LR 581. Transport and Road Laboratory. 1973.
- (10) «Concepts of Weigh-in-motion systems» Clyde E. Lee, National weigh-in-motion conference, Denver, Co. USA, 1983.
- (11) «Dynamic loading of pavement», OCDE, París 1992.
- (12) «Vehicle, tire, pavement interface». Henry/Wambold, Editors, ASTM STP 1164, 1992.
- (13) State space and linear systems, McGraw-Hill, 1971, D. M. Wiberg.
- (14) Signal processing IN C. C. Reid y T. Passin. Wiley 1992.
- (15) Modern control engineering. K. Ogata. Prentice Hall 1990.
- (16) System dynamics, K. Ogata, Prentice Hall 1992.
- (17) Linear systems R. Decarlo. Prentice Hall 1989.

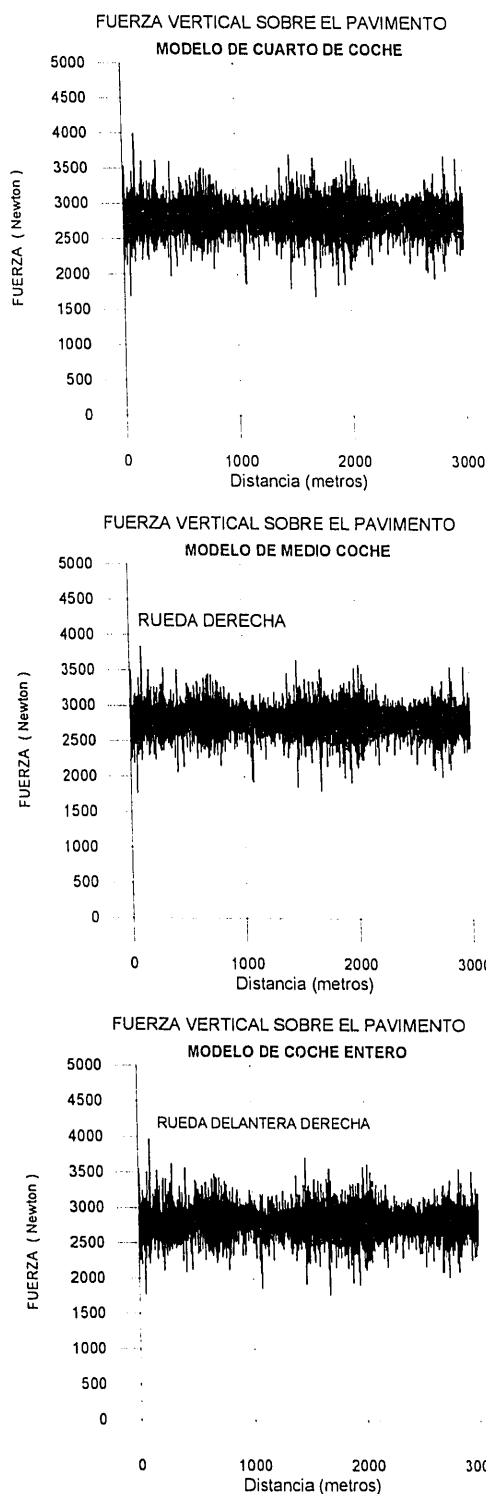


Figura 12a. Obsérvese que las fuerzas sobre el pavimento son prácticamente iguales en los 3 modelos. Por tanto parece que puede usarse el modelo sencillo de cuarto de coche para el cálculo de fuerzas dinámicas sobre el pavimento.