

LOS TRIANGULOS RECTANGULOS DE LADOS ENTEROS (2.^a parte)

Antonio García Martínez
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Introducción

En el número del mes de mayo de 1990 se publicó en esta revista la primera parte de este tema, a la que hoy quiero añadir una corrección y algunas nuevas curiosidades.

Recordando conceptos

En aquella primera entrega se hacían algunas definiciones que considero conveniente repetir aquí.

Se definió como terna pitagórica, o abreviadamente terpi, a un conjunto de tres números enteros (a, b, c) que cumplen dos condiciones:

$$a > b > c > 0 \quad \text{y} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

y se apuntó la solución de Pell a esa ecuación diofántica:

$$u^2 + v^2 \cdot b = u^2 - v^2 \cdot c = 2 \cdot u \cdot v.$$

en la que u y v son dos números enteros, par uno e impar el otro y primos entre sí.

Al primer componente a de la terna se le da el nombre de módulo.

También se definieron dos tipos de números primos: los de la forma $4.k + 1$, o primos (+), y los primos (-), o de la forma $4.k - 1$.

Corrección

En aquel artículo se deslizó un error que deseo ahora subsanar.

Decía yo allí que, aunque yo no hubiera sido capaz de encontrar el correspondiente teorema, desafiaba al más valiente a que descompusiera en suma de dos cuadrados un número primo (-).

La demostración, que no teorema, es sencillísi-

ma: cualquier primo (-), como cualquier otro número de la forma $4.k - 1$, ha de ser la suma de los cuadrados de un número par y de otro impar.

El cuadrado de un número par es siempre múltiplo de cuatro.

El cuadrado de un número impar $2.k \in 1$ es igual a $4.k^2 \in 4.k + 1$, es decir múltiplo de 4, más uno.

La suma de ambos cuadrados, por lo tanto, será siempre de la forma $4.k + 1$ y nunca de la forma $4.k - 1$.

Nuevas curiosidades

Existen tres tipos de ternas que encierran en sí alguna curiosidad:

Aquellas en las que la diferencia entre el módulo y el mayor de los otros dos componentes es la unidad.

Otras en que la diferencia entre los dos catetos es la unidad.

Estos dos tipos de ternas representan triángulos rectángulos de lados enteros casi-isósceles, ya que, al ir aumentando el valor del módulo, esa pequeña diferencia de una unidad entre dos de los lados carece de relevancia.

Las primeras tenderán a parecer triángulos casi bi-rectángulos o estiletes, en tanto que las segundas representan triángulos casi-escuadras, en el sentido de la plantilla de dibujo de tal nombre.

Por último existen otras ternas de módulo dúplex (tomando este nombre de esos modernos pisos que constan de dos plantas superpuestas) que gozan de la propiedad de que ese módulo forma dos ternas distintas con cada uno de los dos números enteros inmediatamente inferiores a él.

Salgo al paso de algún posible listillo que pudiera pensar que también puedan existir ternas de módulo tríplex, o sea que formen ternas con los tres números inmediatamente inferiores a él. Al final de esta exposición incluyo la demostración, muy sencilla, de que tal hecho es imposible.

Triángulos casi bi-rectángulos o estiletes

Como la diferencia entre el módulo y el componente mayor es la unidad, esos dos elementos son de distinta paridad. Así pues haciendo:

$$a = u^2 + v^2 \quad y \quad b = 2. u. v.$$

la diferencia es: $a - b = (u - v)^2 = 1$ con lo que $u = v + 1$ y $c = u^2 - v^2 = 2.v. + 1$, es decir que el componente menor es impar.

Este tipo de ternas se presenta con muchísima frecuencia, debido a la simplicidad de su condición de existencia. Con un ordenador personal trabajando con números enteros de hasta dieciséis cifras, puede obtenerse una larga serie, compuesta por 70.710.676 ternas, que empieza por la (5, 4, 3) y termina con otra en la que sus tres componentes son:

$$\begin{aligned} a &= 9.999.999.825.018.013 \\ b &= 9.999.999.825.018.012 \\ c &= 141.421.355 \end{aligned}$$

Esta última terna tiene el mayor ángulo agudo igual a $89.^\circ 59' 59.997082975$, que sólo difiere de un recto en menos de 3 milésimas de segundo.

Por otra parte si suponemos que los valores de los componentes están expresados en nanómetros (10^{-9} metros), la hipotenusa y el cateto mayor tienen una longitud muy próxima a los 10.000

kilómetros, en tanto que el cateto menor apenas supera los 141 milímetros. Razón más que suficiente para el apelativo aplicado de estilete.

Triángulos casi-escuadras

En este caso la diferencia se produce entre:

$$b = u^2 - v^2 \quad y \quad c = 2. u. v.$$

es decir, $u^2 - v^2 - 2. u. v. = \epsilon 1$.

Esta ecuación diofántica de segundo grado admite una serie de soluciones (u, v) que, empezando por (2, 1), (5, 2), (12, 5), (29, 12)... presentan una ley de recurrencia, tanto para u como para v del tipo:

$$z_{i+1} = 2. z_i + z_{i-1}$$

que es la misma que verifican los denominadores de las sucesivas reducidas del desarrollo de $\sqrt{2}$ en fracción continua.

La relación u/v, al crecer ambos, tiene por límite $\sqrt{2} + 1$.

Las relaciones a/b y a/c tienen a $\sqrt{2}$.

Este tipo de ternas se presentan con mucha menos frecuencia que las anteriores, ya que, en los números de hasta dieciséis cifras enteras, sólo aparecen las veinte ternas (cuadro 1).

Considerando, como en el caso anterior, que las cifras representan las longitudes de los lados expresadas en nanómetros, la última terna tiene

CUADRO 1

1	5	4	3
2	29	21	20
3	169	120	119
4	985	697	696
5	5741	4060	4059
6	33461	23661	23660
7	195025	137904	137903
8	1136689	803761	803760
9	6625109	4684660	4684659
10	38613965	27304197	27304196
11	225058681	159140520	159140519
12	1311738121	927538921	927538920
13	7645370045	5406093004	5406093003
14	44560482149	3150901901	31509019100
15	259717522849	183648021600	183648021599
16	1513744654945	1070379110497	1070379110496
17	8822750406821	6238626641380	6238626641379
18	51422757785981	36361380737781	36361380737780
19	299713796309065	211929657785304	211929657785303
20	1746860020068409	1235216565974041	1235216565974040

CUADRO 2

1	5	4	3
1	5	3	4
2	145	144	17
2	145	143	24
3	4901	4900	99
3	4901	4899	140
4	166465	166464	577
4	166465	166463	816
5	5654885	5654884	3363
5	5654885	5654883	4756
6	192099601	192099600	19601
6	192099601	192099599	27720
7	6525731525	6525731524	114243
7	6525731525	6525731523	161564
8	221682772225	221682772224	665857
8	221682772225	221682772223	941664
9	7530688524101	7530688524100	3880899
9	7530688524101	7530688524099	5488420
10	255821727047185	255821727047184	22619537
10	255821727047185	255821727047183	31988856
11	8690408031080165	8690408031080164	131836323
11	8690408031080165	8690408031080163	186444716

los dos catetos de longitud aproximada 1.235 kilómetros y sólo se diferencian entre sí en un nanómetro, es decir en 10^{-9} metros.

Imposibilidad de existencia de ternas Tríplex

En este caso las ecuaciones son tres:

$$\begin{aligned} a^2 &= (a-1)^2 + x^2 \\ a^2 &= (a-2)^2 + y^2 \\ a^2 &= (a-3)^2 + z^2 \end{aligned}$$

Eliminando el valor de a entre la segunda y la tercera ecuaciones se llega a la ecuación diofántica de segundo grado:

$$2 \cdot (z^2 + z + 1) = 3 \cdot y^2$$

Para que esta ecuación tenga solución en números enteros debería ser múltiplo de 6 el paréntesis del primer miembro. Pero, si bien puede serlo de 3 (basta con que z sea de la forma $3 \cdot w + 1$), nunca puede serlo de 2, ya que, tanto si z es par como impar, el valor de dicho paréntesis es siempre impar. Luego no pueden existir módulos tríplex.

Conclusión

Y hasta aquí una nueva entrega del culebrón de las ternas pitagóricas. Esperemos que en un futuro próximo puedan encontrarse más curiosidades sobre ellas. ■

Módulos Dúplex

En este caso existen dos relaciones:

$$a^2 = (a-1)^2 + x^2 \quad y \quad a^2 = (a-2)^2 + y^2$$

Eliminando entre ellas el valor de a se llega a una nueva ecuación diofántica de segundo grado:

$$y^2 = 2 \cdot x^2 - 2$$

que admite las siguientes parejas (x, y) de soluciones: (3,4), (17, 24), (99, 140), (577, 816)... en las que también existe una ley de recurrencia, igual para ambas variables:

$$z_{i+1} = 6 \cdot z_i - z_{i-1}$$

Al crecer x e y la relación y/x tiende a $\sqrt{2}$.

En el mismo supuesto de trabajar con enteros de hasta dieciséis cifras, sólo aparecen once módulos dúplex, lo que pone de manifiesto su mayor rareza (cuadro 2).

Como puede apreciarse este tipo de módulos es aún menos frecuente que los tipos anteriores.