

EL IRI, EL HRI O «IRI-MEDIO COCHE» Y LOS MODELOS DE CUARTO Y DE MEDIO COCHE

CALCULO POR EL METODO DE LA ECUACION DE ESTADO

Manuel J. Melis

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos*

1. Generalidades y antecedentes

En un anterior artículo (Ref. 3) proponíamos y desarrollábamos un modelo de cálculo del IRI por integración de las 2 ecuaciones diferenciales del modelo de cuarto de coche, utilizando unas sencillas diferencias finitas en lugar del Método de la Ecuación de Estado que propone el Banco Mundial. Llamábamos también la atención del lector sobre lo posiblemente inapropiado del método que da el Banco Mundial para calcular el IRI, ya que en primer lugar la mayor utilidad del método es para el control de sistemas y no para su integración, y en segundo lugar porque con sólo dos ecuaciones diferenciales no hace falta el Método de la Ecuación de Estado, que en general los usuarios del IRI no están acostumbrados a ver y en algunos casos tal vez no conocen. Decíamos además que el Método de Estado es más lento e ineficiente (en referencia sólo a la integración del sistema, naturalmente) que la solución por diferencias finitas, y como se verá a continuación con datos reales, resulta efectivamente del orden de un 60 % más lento.

Tras estas observaciones al Método del Estado, al autor le parece conveniente presentarlo al lector de una forma sencilla y clara. En este artículo

se intenta este objetivo, llegando a la solución iterativa del sistema de ecuaciones diferenciales. Como ya se conoce el cálculo del IRI a través de la (Ref. 1), en lugar de aplicar el método a este cálculo (es decir, al modelo de cuarto de coche), se presenta el Modelo de Medio Coche (Half-Car) tal como lo define la norma americana ASTM E-1170 (Ref. 6), y se integra dicho modelo de medio coche.

Con el modelo de medio coche integrado, se obtiene en este artículo también un indicador de regularidad superficial tal vez más completo que el IRI, llamado en Inglés «HRI» y que podría denominarse en castellano «IRI-Medio Coche». Este indicador tiene en cuenta el estado de las dos rodadas izquierda y derecha sobre las que circula el automóvil, y representa mejor la comodidad de rodadura que el modelo de cuarto de coche, que sólo representa una rueda. Además, como se verá a continuación, puede obtenerse un indicador del balanceo del vehículo, que puede ser interesante para la medida del confort de una rodadura. Es posible que en plazo corto o medio el indicador IRI sea sustituido en algunos países por el indicador HRI para la medida de la regularidad superficial de una carretera, y ya ha habido al respecto varias reuniones internacionales sobre el tema.

Se incluyen también en este artículo los algoritmos de cálculo de las aceleraciones verticales y angulares sufridas por el conductor para el modelo de medio coche, y un resultado real para un tra-

* M. Sc. MBA. AEPO S.A. Ingenieros. Consultores

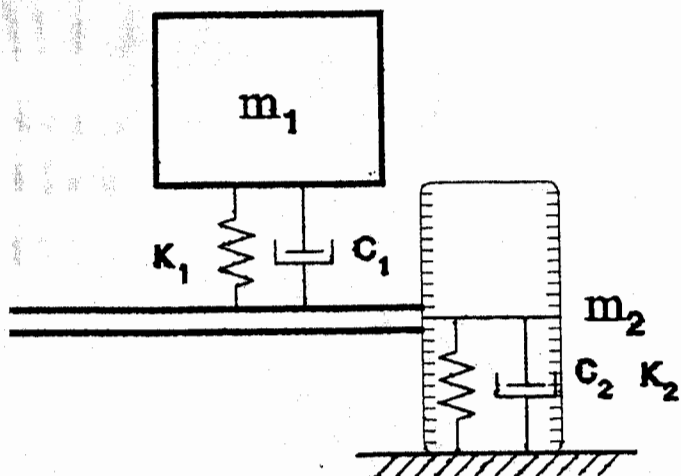
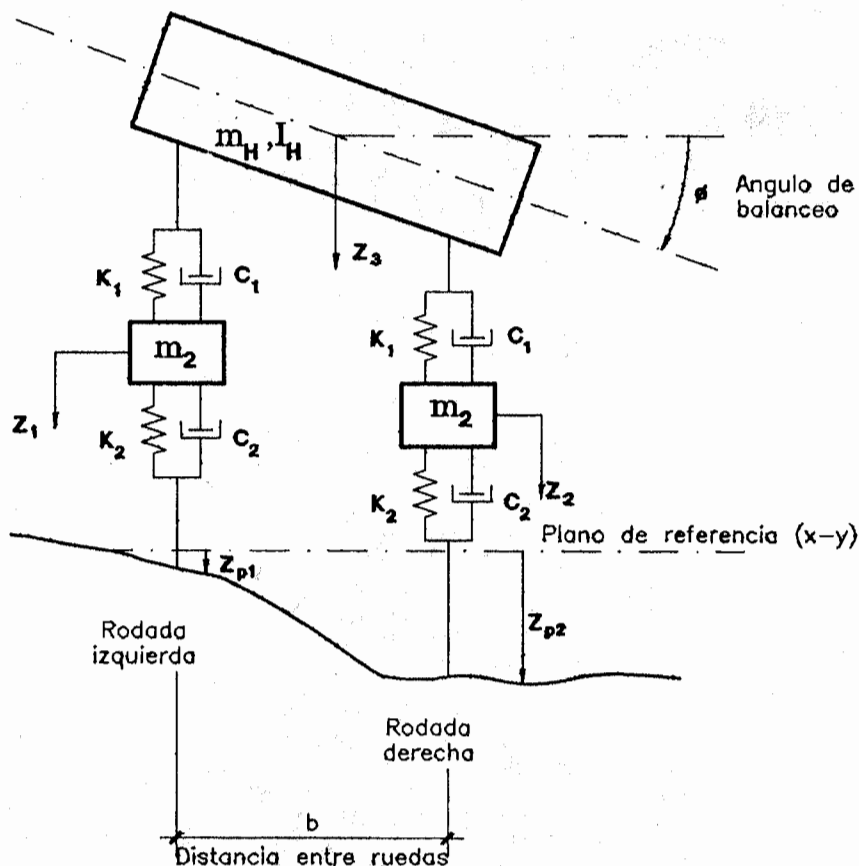


Figura 1. Modelo de cuarto de coche. A la derecha figura 2. Modelo de Medio coche.

Figura 3. Modelo de medio coche (suspensión independiente).



constantes elásticas y de amortiguamiento y las velocidades del vehículo. Se incluyen también los algoritmos de cálculo de los esfuerzos dinámicos que las ruedas (derecha o izquierda) producen sobre el pavimento, lo que puede tener aplicación práctica para algunos lectores interesados en el tema, ayudando a estudiar los modelos de envejecimiento de los firmes o ayudando a identificar las zonas en que los esfuerzos dinámicos negativos disminuyen la adherencia y crean conducción peligrosa o los positivos pueden crear roturas de losas de pavimento o la ruina del firme. Los programas presentados en este artículo permiten simular la conducción a vehículos reales (120 km/h por ejemplo) para coches reales (Renault R-21 por ejemplo) en tramos de Autovías reales en España.

2. La norma ASTM E1170-91. modelos de cuarto de coche y medio coche

La conocida figura 1 indica el modelo de cuarto de coche, con la notación de la citada Norma ASTM. El IRI se define como la variación en distancia entre las masas superior e inferior, acumulada en valor absoluto a lo largo de la longitud de carretera recorrida y dividida por esa longitud, que en España la norma fija en 100 m. Obsérvese que el modelo de cuarto de coche tiene sólo 2 grados de libertad, que son las cotas de las masas superior e inferior. Su movimiento se representa por tanto por dos ecuaciones diferenciales, que se han visto en (Ref. 3).

La Figura 2 representa el modelo de medio coche. La norma representa el eje trasero, y puede simular suspensión independiente o no según tenga el eje trasero o no, dando valor nulo a la inercia I_a y la masa M_a (Figuras 3 y 4). Análogamente al cuarto de coche, el movimiento relativo del conductor con respecto a los ejes se define

por la diferencia entre las cotas z_3 de la masa superior m_H y la media de z_1 y z_2 de las masas inferiores. Podría extenderse la definición del IRI (naturalmente, ya no sería el IRI como tal, pero se llama así para mayor claridad) a la acumulación del valor $z_3 - 1/2(z_1 + z_2)$ dividido por la distancia recorrida. Este «IRI-Medio coche» representará más exactamente la sensación del conductor que el IRI del cuarto de coche. Por otra parte, el modelo de medio coche permite calcular el giro o balanceo que sufre el conductor, y puede por lo tanto obtener también un indicador de balanceo acumulando los incrementos de giro en valor absoluto y dividiendo por la distancia recorrida, por ejemplo. Se obtendría así un «IRI-balanceo» que daría idea de ese efecto sobre el conductor. El lector entenderá que, naturalmente, para poder trabajar con el modelo de medio coche, es necesario obtener el perfil longitudinal de las dos rodadas de la carretera, lo que los modernos equipos de Auscultación como el Video-Láser RST proporcionan sin dificultad. El modelo de medio coche tiene 4 grados de libertad, que son las cotas de las 3 masas (z_1 , z_2 y z_3) y el giro de la masa superior ϕ . Su movimiento se representa por 4 ecuaciones diferenciales.

La Norma USA ASTM E 1170 (versiones publicadas en 1988 y 1992) que resume los modelos parece al autor tener algunos errores de imprenta. En la matriz B del Apartado X1.2.2 parece faltar el cuadrado del exponente en el denominador del elemento 4,2. De la misma forma, la matriz A del mismo apartado, que es la base de la expresión matricial, parece tener cambiados los signos de los elementos de la última fila excepto el (8,5) y el (8,8), lo que se deja a la comprobación del lector interesado, y la Tabla 2 donde se definen los valores de las constantes es sumamente confusa y parecen faltar datos o sobrar líneas. El lector puede comprobar que con las matrices A y B dadas en esta Norma el sistema no es estable ni siquiera converge, mientras que sí lo es con las ecuaciones dadas en el presente artículo. En lo que sigue se toman los datos de la matriz A tal como se obtienen de las expresiones de equilibrio dinámico de las masas e inercias, lo que se detalla, y se toman los datos numéricos correspondientes al modelo «Ride-meter vehicle mounted» de la citada Norma. El autor ha hecho notar a la ASTM estas inconsistencias de la Norma, pero en el momento de escribir estas líneas aún no tiene contestación ni sabe si hay una nueva revisión de la misma.

3. El modelo de medio coche. Ecuación del movimiento

Para simplificar, se analiza el medio coche con suspensión independiente de la Figura 3, ya que para el caso de eje trasero rígido de la Figura 4 el proceso de obtención de las ecuaciones del movimiento es análogo pero más largo. Para obtener las ecuaciones del movimiento del conjunto se analiza uno a uno el movimiento de cada uno de los grados de libertad, que son los siguientes, donde se utiliza la notación de la Norma USA ASTM E-1170:

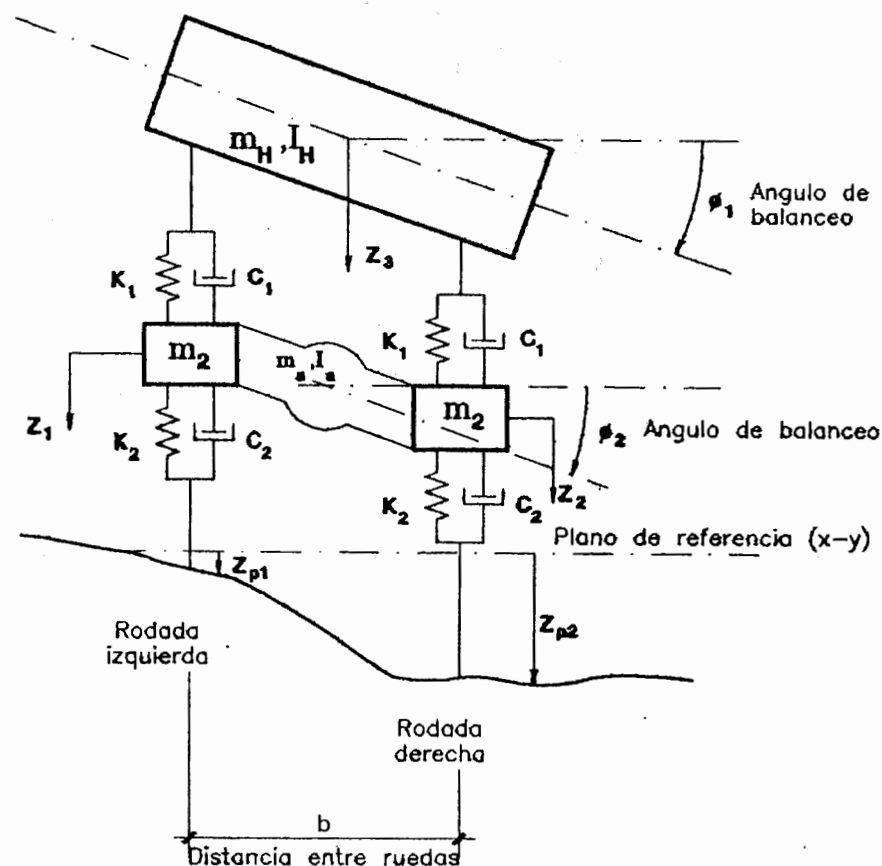


Figura 4. Modelo de medio coche (eje trasero rígido).

- z_1 . Ordenada de la masa inferior izquierda m_1 .
- z_2 . Ordenada de la masa inferior derecha m_2 .
- z_3 . Ordenada de la masa superior m_H .
- ϕ . Giro de la masa superior m_H sobre su centro de gravedad.
- z_{p1} y z_{p2} . Cotas izquierda y derecha de los perfiles de la carretera.

Es importante la convención de signos para expresar las ecuaciones diferenciales del sistema. En lo que sigue se supone que las fuerzas de los muelles son iguales a las constantes multiplicadas por la diferencia entre la cota del extremo inferior menos la del extremo superior. En caso de amortiguadores, a sus correspondientes velocidades. Y debe tenerse en cuenta además que en el muelle y el amortiguador situado debajo de cada masa se cambia el signo de las fuerzas.

- Masa inferior izquierda m_1 .

En la figura 5 puede verse el esquema. Expresando el equilibrio de la masa m_1 y siendo F_1 y F_2 las fuerzas ejercidas sobre ella desde arriba y desde abajo, se obtiene:

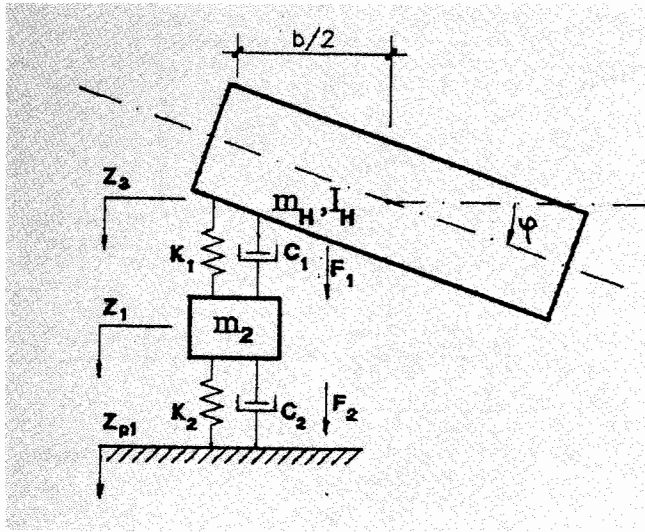


Figura 5 y figura 6.

$$m_1 \ddot{z}_1 = F_1 + F_2$$

$$F_1 = k_1 (z_3 - z_1) - \frac{b}{2} \varphi + c_1 (\dot{z}_3 - \dot{z}_1) - \frac{b}{2} \dot{\varphi}$$

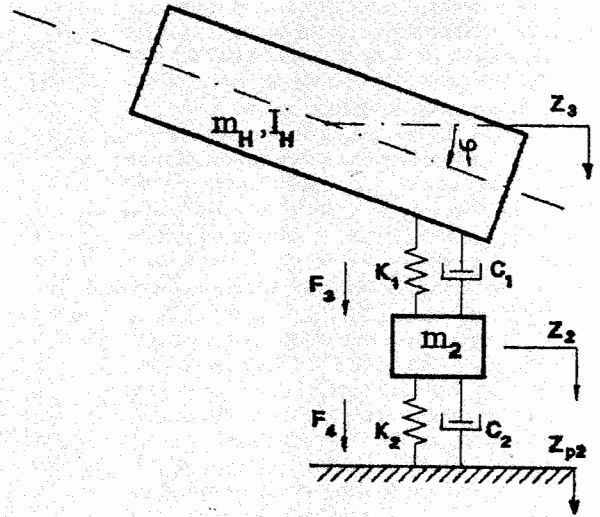
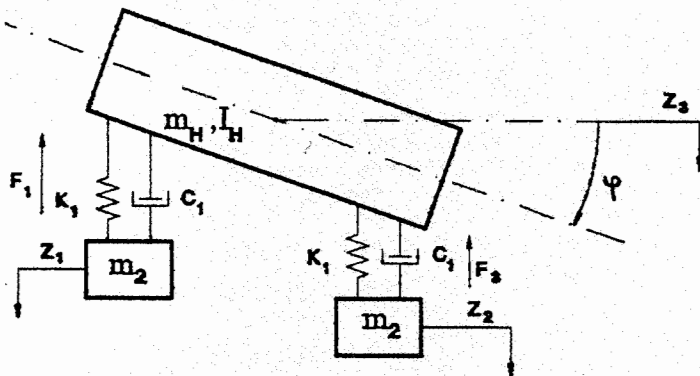
$$F_2 = k_2 (z_{p1} - z_1) + c_2 (\dot{z}_{p1} - \dot{z}_1)$$

y agrupando términos y despejando, se obtiene la ecuación:

(Ec. 1)

$$\ddot{z}_1 = -\frac{k_1+k_2}{m_1} z_1 + \frac{k_1}{m_1} z_3 - \frac{c_1+c_2}{m_1} \dot{z}_1 + \frac{c_1}{m_1} \dot{z}_3 - \frac{k_1 b}{2 m_1} \varphi - \frac{c_1 b}{2 m_1} \dot{\varphi} + \frac{k_2}{m_1} z_{p1} + \frac{c_2}{m_1} \dot{z}_{p1}$$

Figura 7 y figura 8.



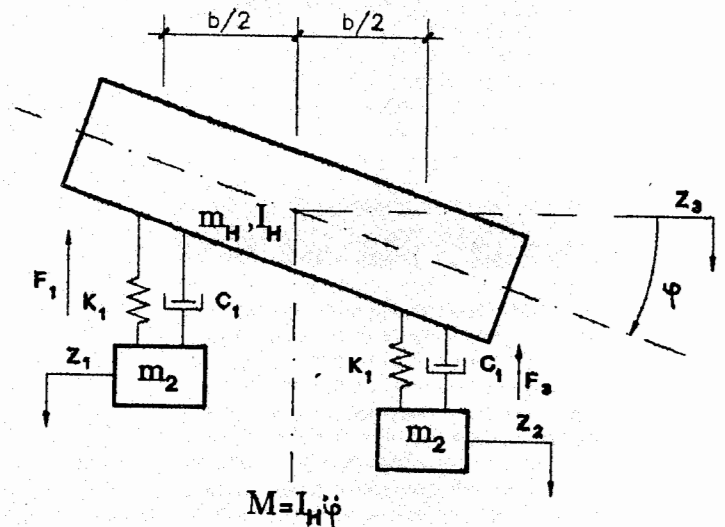
— Masa inferior derecha m_2 .

De la figura 6, expresando el equilibrio de la masa m_2 y siendo F_3 y F_4 las fuerzas ejercidas sobre ella desde arriba y desde abajo, y teniendo en cuenta el signo del giro, se obtiene la ecuación:

(Ec. 2)

$$\ddot{z}_2 = -\frac{k_1+k_2}{m_2} z_2 + \frac{k_1}{m_2} z_3 - \frac{c_1+c_2}{m_2} \dot{z}_2 + \frac{c_1}{m_2} \dot{z}_3 + \frac{k_1 b}{2 m_2} \varphi + \frac{c_1 b}{2 m_2} \dot{\varphi} + \frac{k_2}{m_2} z_{p2} + \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_{p2}$$

— Masa superior m_H . Desplazamiento vertical.



De la figura 7, se obtiene igualmente la ecuación:

(Ec. 3)

$$\ddot{z}_3 = \frac{k_1}{m_H} z_1 + \frac{k_1}{m_H} z_2 - \frac{2k_1}{m_H} z_3 + \frac{c_1}{m_H} \dot{z}_1 + \frac{c_1}{m_H} \dot{z}_2 - \frac{2c_1}{m_H} \dot{z}_3$$

— Masa superior m_H . Giro con respecto al centro de gravedad.

De la figura 8 se obtiene la ecuación:

(Ec. 4)

$$\ddot{\varphi} = -\frac{k_1 b}{2 I_H} z_1 + \frac{k_1 b}{2 I_H} z_2 - \frac{c_1 b}{2 I_H} \dot{z}_1 + \frac{c_1 b}{2 I_H} \dot{z}_2$$

$$\ddot{z}_2 - \frac{k_1 b^2}{2 I_H} \varphi - \frac{c_1 b^2}{2 I_H} \dot{\varphi}$$

esta distancia entre masas en la distancia recorrida, de forma que su cálculo es inmediato.

Para integrar por diferencias finitas el caso de medio coche, en las 4 ecuaciones diferenciales anteriores (Ec. 1) a (Ec. 4) se sustituyen las derivadas primeras y segundas por sus esquemas en diferencias.

Los esquemas en diferencias finitas de las derivadas primeras y segundas son los siguientes:

(Ec. 5)

$$\ddot{z}_1 \approx \frac{z_{1,t+2} - 2z_{1,t+1} + z_{1,t}}{\Delta t^2};$$

$$\dot{z}_1 \approx \frac{z_{1,t+1} - z_{1,t}}{\Delta t}; \quad \dot{\varphi} \approx \frac{\varphi_{1,t+1} - \varphi_{1,t}}{\Delta t}$$

y análogamente para las variables z_2 y z_3 y las cotas de los perfiles z_{p1} y z_{p2} .

Sustituyendo estos esquemas en la ecuación diferencial (Ec. 1) anterior, por ejemplo, se obtiene la ecuación:

$$Z_{1,t+2} = \frac{2m_1 - \Delta t(c_1+c_2)}{m_1} Z_{1,t+1} + \frac{c_1 \Delta t}{m_1}$$

$$Z_{3,t+1} - \frac{c_1 b \Delta t}{2m_1} \varphi_{t+1} + \frac{(c_1+c_2)\Delta t - (k_1+k_2)\Delta t^2 - m_1}{m_1} Z_{1,t} +$$

$$+ \frac{k_1 \Delta t^2 - c_1 \Delta t}{m_1} Z_{3,t} +$$

$$+ \frac{-k_1 b \Delta t^2 + c_1 b \Delta t}{2m_1} \varphi_t +$$

$$+ \frac{k_2 \Delta t^2 - c_2 \Delta t}{m_1} Z_{p1,t} + \frac{c_2 \Delta t}{m_1} Z_{p1,t+1}$$

Como se ve en esta expresión, conociendo los valores de las cotas de las 3 masas y el giro de la superior en los instantes t y $t+1$, se calcula la cota de la masa en el instante $t+2$. Ecuaciones similares se escriben para el movimiento vertical de las masas inferior derecha y superior, y para el giro o balanceo de la masa superior. Se obtiene así un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, pero un sistema muy sencillo, ya que en cada ecuación sólo hay una incógnita. El sistema puede ponerse en forma matricial sencilla como sigue:

(Ec. 6)

$$Z_{t+2} = A Z_{t+1} + B Z_t + C Z_p$$

4. El modelo de medio coche. Solución por diferencias finitas

De la misma forma que en (Ref. 3) se integró el sistema de dos ecuaciones diferenciales del cuarto de coche con un esquema implícito sencillo de diferencias finitas, puede integrarse el modelo de medio coche. En el caso del cuarto de coche, al expresar en diferencias finitas el sistema de las 2 ecuaciones diferenciales, se obtenía un sistema de ecuaciones lineales (Ref. 3, ec. 7 y 8) del que era necesario despejar las incógnitas (cotas de las masas en el instante $t+1$) en función de las cotas de las masas en los instantes anteriores, t y $t-1$. Las condiciones iniciales para el modelo de cuarto de coche son las siguientes:

■ Las cotas de las masas superior e inferior son iguales a la cota inicial de la carretera.

■ Las velocidades iniciales de las masas son iguales a la velocidad vertical obtenida al recorrer la carretera durante 0,5 segundos.

Con estas condiciones iniciales se obtienen los valores de las cotas (llamados u y v en la Ref. 3) correspondientes a los instantes 0 y 1. A partir de estos valores ya se aplica el algoritmo de recurrencia dado en (Ref. 3) por las ecuaciones 7 y 8, y simplificado en la Ec. 18. Se comienza en el instante $t=2$, que se calcula a partir de los valores iniciales $t=0$ y $t=1$, y a continuación se va avanzando en el tiempo, leyendo nuevas cotas del perfil longitudinal de la carretera y calculando las cotas para $t=3$ en función de las obtenidas antes para $t=2$ y $t=1$, a continuación las del instante $t=4$ a partir de las correspondientes a $t=3$ y $t=2$, y así sucesivamente hasta llegar al final del fichero.

En cada instante, una vez obtenidas las cotas de las dos masas superior e inferior, la distancia entre masas es la diferencia de cotas, y el IRI es el acumulado de la variación del valor absoluto de

Donde los vectores y matrices son los siguientes:

$$Z_{t+2} = \begin{Bmatrix} z_{1,t+2} \\ z_{2,t+2} \\ z_{3,t+2} \\ \varphi_{t+2} \end{Bmatrix}; \quad Z_{t+1} = \begin{Bmatrix} z_{1,t+1} \\ z_{2,t+1} \\ z_{3,t+1} \\ \varphi_{t+1} \end{Bmatrix}; \quad Z_t = \begin{Bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \\ \varphi_t \end{Bmatrix}; \quad Z_p = \begin{Bmatrix} z_{p1,t+1} \\ z_{p2,t+1} \\ z_{p1,t} \\ z_{p2,t} \end{Bmatrix};$$

$$A = \begin{Bmatrix} \frac{2m_1-(c_1+c_2)\Delta t}{m_1} & 0 & \frac{c_1\Delta t}{m_1} & -\frac{c_1b\Delta t}{2m_1} \\ 0 & \frac{2m_2-(c_1+c_2)\Delta t}{m_2} & \frac{c_1\Delta t}{m_2} & \frac{c_1b\Delta t}{2m_2} \\ \frac{c_1\Delta t}{m_H} & \frac{c_1\Delta t}{m_H} & \frac{2m_H-2c_1\Delta t}{m_H} & 0 \\ -\frac{c_1b\Delta t}{2I_H} & \frac{c_1b\Delta t}{2I_H} & 0 & \frac{4I_H-c_1b^2\Delta t}{2I_H} \end{Bmatrix}$$

$$B = \begin{Bmatrix} \frac{(c_1+c_2)\Delta t-(k_1+k_2)\Delta t^2-m_1}{m_1} & 0 & \frac{k_1\Delta t^2-c_1\Delta t}{m_1} & -\frac{k_1b\Delta t^2+c_1b\Delta t}{2m_1} \\ 0 & \frac{(c_1+c_2)\Delta t-(k_1+k_2)\Delta t^2-m_2}{m_2} & \frac{k_1\Delta t^2-c_1\Delta t}{m_2} & \frac{k_1b\Delta t^2+c_1b\Delta t}{2m_2} \\ \frac{-c_1\Delta t+k_1\Delta t^2}{m_H} & \frac{-c_1\Delta t+k_1\Delta t^2}{m_H} & \frac{2c_1\Delta t-2k_1\Delta t^2-m_H}{m_H} & 0 \\ \frac{c_1b\Delta t-k_1b\Delta t^2}{2I_H} & \frac{k_1b\Delta t^2-c_1b\Delta t}{2I_H} & 0 & \frac{-k_1b^2\Delta t^2+c_1b^2\Delta t}{2I_H} \end{Bmatrix}$$

$$C = \begin{Bmatrix} \frac{c_2\Delta t}{m_2} & 0 & \frac{k_2\Delta t^2-c_2\Delta t}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{c_2\Delta t}{m_2} & 0 & \frac{k_2\Delta t^2-c_2\Delta t}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Al igual que en el caso del cuarto de coche de (Ref. 3), se va calculando el vector Z_{t+2} iterativamente, a partir de los vectores Z_{t+1} y Z_t y de las cotas que se van leyendo del perfil de la carretera. En cada instante puede calcularse la diferencia de cotas d_{t+2} entre el centro de gravedad de la masa m_3 y la semisuma de las cotas de las masas m_1 y m_2 .

(Ec. 7)

$$d_{t+2} = z_{3,t+2} - \frac{z_{1,t+2} + z_{2,t+2}}{2}$$

$$HRI = IRI - \text{Medio Coche} = \frac{\sum |d_{t+2} - d_{t+1}|}{L}$$

El HRI o «IRI-Medio Coche» puede definirse como el acumulado del valor absoluto de la variación de esta distancia d_{t+2} menos la anterior d_{t+1} , y dividido por la longitud de carretera recorrida, que en España es de 100 m. El método de cálculo no puede ser más sencillo, y el desarrollo es muy similar al visto en el cuarto de coche de la referencia citada.

5. El modelo de medio coche. Solución por el método de la ecuación de Estado

En la teoría de sistemas de control aparecen sistemas con decenas o centenares de grados de libertad. Piense el lector en el control de un satélite, de un misil aire-aire o de un complicado proceso de una planta química o una refinación. Friedland (Ref. 14) expone muy claramente cómo han ido evolucionando a lo largo de este siglo los métodos de control, desde los métodos «clásicos» frecuenciales basados en la Transformada de Laplace y las Funciones de Transferencia, que comenzaron en los años 30 con las figuras de Nyquist y Bode se desarrollaron durante la Segunda Guerra Mundial en el MIT, hasta los métodos «modernos», basados en la teoría del «Espacio de Estado» o la «Ecuación de Estado» de un sistema, y que se extendieron con rapidez desde el lanzamiento del primer Sputnik en 1957 y el Primer Congreso en Moscú en 1960 de la Federación Internacional de Control Automático. Finalmente, el proyecto Apolo en Usa fue un ejemplo visible de la utilidad de los métodos de estado en la teoría de control de sistemas. Hoy día son la base de la moderna teoría de control, junto con los métodos «neoclásicos» frecuenciales que han vuelto a utilizarse recientemente complementando a los métodos de estado.

En lo que respecta al estudio del movimiento de un sistema por el método de la ecuación de esta-

do (sin entrar en el problema de su control), el principio de solución es en todos casos el mismo: representar el sistema por medio de las ecuaciones diferenciales del movimiento (o del proceso de que se trate), que son tantas como grados de libertad, e integrarlo. En general se suele ir a buscar una solución iterativa, de forma que, conociendo el estado del sistema en el instante t , pueda calcularse su estado en el instante $t+\Delta t$ en función del input externo, que en el caso del problema de medio coche son las dos nuevas cotas de la carretera, rodadas izquierda y derecha.

El ir resolviendo paso a paso el sistema de ecuaciones que se obtiene al representar en diferencias finitas el sistema de ecuaciones diferenciales es igual de sencillo a efectos de cálculo para cualquier caso con más de 2 grados de libertad. Pero sin embargo el lector puede entender que se necesita un método que pueda resolver de forma general el problema independientemente de los grados de libertad del sistema, y aquí es donde entra la Teoría de Sistemas de Control y el Método de la «Ecuación de Estado» o del «Espacio de Estado». La Teoría de Sistemas de Control puede verse en cualquiera de los textos que se citan en la bibliografía (Ref. 10 a 19), al igual que el Método de la Ecuación de Estado, pero ya se ha dicho que el autor pretende en este artículo presentar una aplicación sencilla del método a la Ingeniería de Firmes. Para ello, en las páginas que siguen se resuelve el sistema del medio coche por este método, obteniendo el HRI o «IRI-medio coche».

Definir el Estado de un sistema, del sistema de cuarto de coche por ejemplo, quiere decir definir una serie de datos sobre él tales que, conocidos en un instante t , pueda conocerse su estado en el instante $t + \Delta t$ si se conocen las fuerzas externas en este instante. Parece intuitivo que conocer las cotas de las dos masas no es suficiente para definir el estado del sistema, ya que una de las cotas puede estar subiendo y otra bajando, o ambas bajando, etc. Sin embargo, si se conocen las dos cotas y las dos velocidades de las dos masas en cada instante, puede saberse el estado del sistema en el instante siguiente si se conocen las fuerzas exteriores. De la misma forma, en el caso de medio coche, el sistema se definirá conociendo las 3 cotas y el giro, más las tres velocidades lineales de cada masa y la velocidad angular de la masa superior, es decir, con 8 variables.

En general, de una forma muy simple puede decirse que para definir el estado de un sistema de n grados de libertad son necesarias al menos $2n$ variables. El vector de estas $2n$ variables se denomina Vector de Estado, y las variables se denominan Variables de Estado. Como se verá a continuación, el Método de la Ecuación de Estado obtiene el vector de estado en el instante $t+\Delta t$ a partir del correspondiente al instante t por medio de la llamada Matriz de Transición de Estado, que se obtiene de los coeficientes de las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema. Para todo ello se deben expresar de nuevo las ecuaciones diferenciales en forma matricial.

6. Expresión matricial de las ecuaciones diferenciales del movimiento del modelo de medio coche

En el caso del Medio Coche, las ecuaciones diferenciales son las anteriores (Ec. 1 a Ec. 4), y que, teniendo en cuenta las cuatro identidades siguientes:

(Ec. 8)

$$\frac{dz_1}{dt} = \dot{z}_1 \quad \frac{dz_2}{dt} = \dot{z}_2 \quad \frac{dz_3}{dt} = \dot{z}_3 \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

permiten que el sistema de ecuaciones puede ponerse en la forma matricial deseada. Para ello se definen los vectores siguientes (habituales en el Método de Estado), Vector de Estado Z y su derivada dZ/dt :

$$Z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ \dot{z}_1 \ \dot{z}_2 \ \dot{z}_3 \ \varphi \ \dot{\varphi}] ; \quad \frac{dZ}{dt} = [\dot{z}_1 \ \dot{z}_2 \ \dot{z}_3 \ \ddot{z}_1 \ \ddot{z}_2 \ \ddot{z}_3 \ \dot{\varphi} \ \ddot{\varphi}]$$

de forma que la ecuación puede ponerse en la forma matricial siguiente:

(Ec. 9)

$$\frac{dZ}{dt} = A Z + F$$

donde la matriz A del sistema de medio coche es la siguiente:

(Ec. 10)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_1}{m_1} - \frac{c_1+c_2}{m_1} & 0 & \frac{c_1}{m_1} - \frac{k_1 b}{2m_1} - \frac{c_1 b}{2m_1} \\ 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{k_1}{m_2} & 0 & -\frac{c_1+c_2}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & \frac{k_1 b}{2m_2} & \frac{c_1 b}{2m_2} \\ \frac{k_1}{m_H} & \frac{k_1}{m_H} & -\frac{2k_1}{m_H} & \frac{c_1}{m_H} & \frac{c_1}{m_H} & -\frac{2c_1}{m_H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 b}{2I_H} & \frac{k_1 b}{2I_H} & 0 & -\frac{c_1 b}{2I_H} & \frac{c_1 b}{2I_H} & 0 & -\frac{k_1 b^2}{2I_H} - \frac{c_1 b^2}{2I_H} \end{bmatrix}$$

y el vector de fuerzas exteriores es el siguiente:

(Ec. 11)

$$F = \left\{ 0, 0, 0, \frac{k_2}{m_1} z_{p1} + \frac{c_2}{m_1} \dot{z}_{p1}, \frac{k_2}{m_2} z_{p2} + \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_{p2}, 0, 0, 0 \right\}$$

donde las variables z_p son las cotas de los perfiles longitudinales de las rodadas izquierda y derecha que van leyéndose conforme va avanzando el cálculo (z_{p1} es la cota de la rodada izquierda y z_{p2} la de la derecha).

7. Integración de la ecuación diferencial matricial

Olvidando que se trata de una ecuación matricial, la integración de esta ecuación puede hacerse por el método utilizado en las ecuaciones diferenciales ordinarias. En la bibliografía puede encontrar el lector la demostración de que la misma técnica es aplicable al caso de matrices.

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por e^{-At} se obtiene

$$e^{-At} DZ - e^{-At} A Z = e^{-At} F$$

y recordando que el operador D es la derivada con respecto al tiempo se obtiene

$$D(e^{-At} Z) = e^{-At} F$$

Integrando entre el instante inicial $t=0$ y el instante t , se obtiene

$$e^{-At} Z(t) - e^0 Z(0) = \int_0^t e^{-A\tau} F(\tau) d\tau$$

y multiplicando ambos miembros por e^{At} se obtiene la solución analítica buscada de la ecuación diferencial matricial

(Ec. 12)

$$Z(t) = e^{At} Z(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} F(\tau) d\tau$$

Naturalmente, esta solución analítica es inútil al Ingeniero de Firmes en los casos prácticos, ya que los perfiles longitudinales de la carrera se ob-

tienen en forma digital, discreta. Por lo tanto es necesario llegar a una solución numérica. La solución es iterativa, y es la que sigue.

8. Cálculo iterativo

El Banco Mundial utiliza una solución iterativa. Si el incremento de tiempo es Δt , desde el instante inicial $t=0$ hasta el instante t habrán pasado n incrementos de tiempo. El vector Z_n es igual a $Z_{(n\Delta t)}$. La solución iterativa parece de feliz idea, y la presentación más lúcida que el autor ha encontrado es la dada por Reid y Passin (Ref. 12). Se encuentra calculando la diferencia

$$Z_{n+1} - e^{A\Delta t} Z_n$$

que puede obtenerse como sigue:

$$Z_{n+1} - e^{A\Delta t} Z_n = e^{A(n+1)\Delta t} Z(0) + e^{A(n+1)\Delta t} \int_0^{(n+1)\Delta t} e^{-A\tau} F(\tau) d\tau -$$

$$- e^{A\Delta t} [e^{An\Delta t} Z(0) + e^{An\Delta t} \int_0^{n\Delta t} e^{-A\tau} F(\tau) d\tau]$$

y que operando queda en

$$e^{A(n+1)\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{-A\tau} F(\tau) d\tau$$

La relación de recursión o iterativa queda por tanto en la forma:

$$Z_{n+1} = e^{A\Delta t} Z_n + e^{A(n+1)\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{-A\tau} F(\tau) d\tau$$

y el problema consiste ya solamente en calcular la integral del segundo término.

Si se admite que el vector de fuerzas F es constante en el intervalo Δt , puede salir de la integral, y ésta queda en la forma

(Ec. 14)

$$e^{A(n+1)\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{-A\tau} F(\tau) d\tau = e^{A(n+1)\Delta t} F(t) \int_t^{t+\Delta t} e^{-A\tau} d\tau$$

Esta última integral puede ya integrarse de la misma forma que si se tratara de números en lugar de matrices, lo que puede comprobar el lector en la bibliografía. Puede verse que resulta:

$$\int e^{-At} dt = K - A^{-1} e^{-At}$$

donde k es una matriz constante cualquiera. Integrando con esta expresión la integral anterior entre t y $t+\Delta t$ se obtiene:

$$e^{A(n+1)\Delta t} F(t) \int_t^{t+\Delta t} e^{-A\tau} d\tau = e^{A(n+1)\Delta t} F(t) [-A^{-1} e^{-A\tau} + A^{-1} e^{-A(t-\Delta t)}]$$

y simplificando la expresión se obtiene finalmente

$$A^{-1} F(t) [e^{A\Delta t} - 1]$$

de forma que la solución iterativa buscada resulta ser:

$$Z_{n+1} = e^{A\Delta t} Z_n + A^{-1} [e^{A\Delta t} - 1] F(t)$$

donde el 1 indica la matriz unidad (de orden 4 en el caso del cuarto de coche y de orden 8 en el caso de medio coche).

Se suele llamar Matriz de Transición de Estado ST a la que multiplica el vector del instante anterior. La solución del sistema resulta:

(Ec. 13)

$$\text{siendo } \overline{ST} = e^{A\Delta t}$$

$$Z_{n+1} = \overline{ST} Z_n + A^{-1} [\overline{ST} - 1] F_{n+1}$$

y al segundo sumando suele llamarse Matriz de Respuesta Parcial o de Respuesta Particular, PR. De esta forma la solución queda en la forma simplificada:

$$Z_{n+1} = \overline{ST} Z_n + \overline{PR}$$

El vector PR, Matriz de Respuesta Parcial, recoge la influencia de los factores externos, que en este caso son las dos nuevas cotas leídas cada incremento de tiempo de los dos perfiles longitudinales izquierdo y derecho del terreno sobre el que circula el modelo.

9. Cálculo de la matriz de transición de estado y de la matriz de respuesta parcial

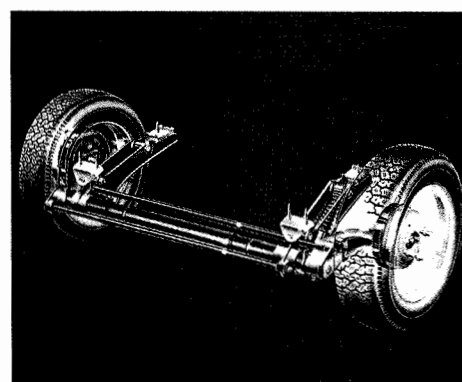
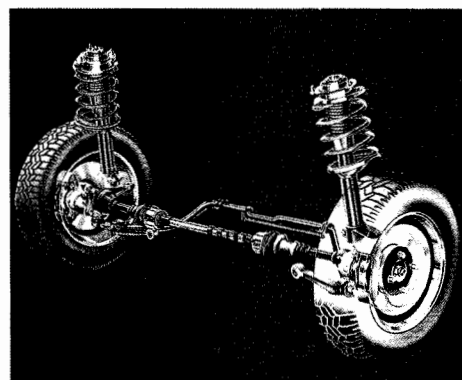
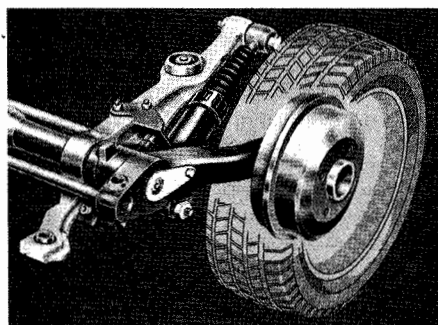
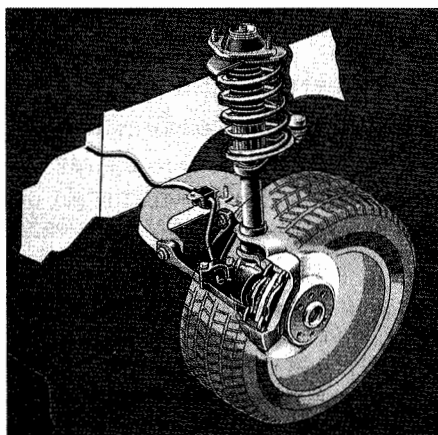
La Matriz de Transición de Estado ST se obtiene elevando e al producto $A \Delta t$. Este cálculo puede hacerse por varios métodos. El desarrollo en serie de Mac Laurin, similar al caso de números reales, es el más utilizado, y es en concreto el utilizado por el Banco Mundial:

$$\begin{aligned} \overline{ST} = e^{A\Delta t} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i (\Delta t)^i = \\ &= 1 + A\Delta t + \frac{A^2 \Delta t^2}{2!} + \frac{A^3 \Delta t^3}{3!} + \frac{A^4 \Delta t^4}{4!} + \frac{A^5 \Delta t^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Hay que tener mucho cuidado con el método de Mac Laurin. DeCarlo (Ref. 19) pone como ejemplo la sencilla matriz de orden 2 $\begin{bmatrix} -49 & 24 \\ -64 & 31 \end{bmatrix}$ en la que el desarrollo en serie da un error enorme, con sumandos cada vez mayores en valor absoluto y llegando a un resultado que no tiene que ver en absoluto con la solución real. Afortunadamente, las matrices obtenidas con los modelos de medio coche y de cuarto de coche convergen bien, y el autor puede decir que en el programa que se incluye en el presente artículo la matriz converge por Mac Laurin en menos de 23 sumandos, para el compilador de C utilizado en precisión doble (Borland C++, double float).

Otros métodos para calcular la exponenciación de la matriz A pueden verse en la literatura, y entre ellos los más conocidos son el método de Cayley-Hamilton y el de los autovalores. Este método se utiliza en los casos en que la matriz A es Hermitiana (real e igual a su transpuesta). En la (Ref. 4) puede verse que en este último caso la matriz A puede ponerse en la forma de un producto de tres matrices, una matriz diagonal (cuya exponenciación es inmediata) premultiplicada por una matriz cuyas columnas son los autovalores ortonormalizados de A y postmultiplicada por la misma, pero transpuesta. Estas dos últimas matrices, cuyas filas y columnas son los autovalores

Esquema de cuarto de coche real Peugeot 106. A la derecha esquema de medio coche real Peugeot 205.



ortonormalizados, no varían al elevarse a cualquier potencia. De esta forma el cálculo de la exponenciación de la matriz A es muy sencillo.

En cualquier caso, en el programa que se incluye en este artículo se ha calculado la Matriz de Transición por el método de Mac Laurin dada la convergencia en el caso estudiado. Para el cálculo del modelo de cuarto de coche los valores dados por la ASTM son los siguientes:

$$k_2/m_1=653\text{ s}^{-2}; k_1/m_1=63\text{ s}^{-2}; c_1/m_1=6\text{ s}^{-1}; m_2/m_1=0,15; c_2=0$$

Con estos valores se obtiene la Matriz A para el Cuarto de coche. El valor de Δt se calcula en cada caso, porque depende del intervalo de muestreo del perfil longitudinal de la carretera y de la velocidad del modelo Quarter-Car. Por ejemplo, para la velocidad estándar de 80 km/h (22.22 m/s) y un intervalo de muestreo de 25 cm, el incremento de tiempo es de $0.25/22.22 = 0.01125$ segundos. La masa superior es de 250 kg en magnitud absoluta.

De la misma forma, para el modelo de medio coche de la norma ASTM los valores que se toman en el presente artículo son (la masa superior es de 500 kg en magnitud absoluta):

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{m_H} &= 31 \frac{1}{\text{sg}^2}; & \frac{k_2}{m_H} &= 326 \frac{1}{\text{sg}^2}; & \frac{m_1}{m_H} &= 0.075; (m_2=m_1); \\ \frac{c_1}{m_H} &= 3 \frac{1}{\text{sg}}; & \frac{c_2}{m_H} &= 0; & \frac{m_a}{m_H} &= 0.30; \\ \frac{l_H}{m_H b^2} &= 0.42; & b &= 1.80 \text{ m}; \end{aligned}$$

Obsérvese que la ASTM define las constantes elásticas y de amortiguamiento para este modelo de medio coche como la mitad de las correspondientes al cuarto de coche.

Como la matriz A no es simétrica, en el programa que se describe en este artículo el cálculo de la inversa se realiza por el método de Gauss-Jordan con estrategia de pivote máximo, cuyo algoritmo es sumamente conocido y puede verse en (Ref. 22, pág. 301). Los algoritmos de triangulación como Cholesky y similares, mucho más rápidos, no pueden aplicarse. Sin embargo la rapidez no es muy importante en este caso, ya que la matriz es de orden muy bajo (8), y sólo hay que calcular una vez la inversa. En problemas de elementos finitos o estructurales sin embargo, el cálculo de la inversa o la reducción de la matriz son básicos para la eficacia del programa y este elemental algoritmo de Gauss-Jordan tal vez no podría usarse.

El segundo sumando, Matriz de Respuesta Parcial, PR se calcula a partir de la matriz ST restandole la matriz unidad y premultiplicando por la inversa de la matriz A

$$\overline{PR} = A^{-1} [\overline{ST} - I]$$

10. Condiciones iniciales del medio coche

Para el cálculo del HRI aún no se ha definido un método estándar. Sin embargo parece lógico que las condiciones iniciales de posición y velocidad

de las 3 masas sean similares a las recomendadas para el cálculo del IRI con el modelo de medio coche dadas en (Ref. 2). Por ello en el programa que se describe en el presente artículo se toman como sigue:

- Cotas iniciales de las masas inferiores izquierda y derecha iguales a las primeras cotas leídas de los respectivos perfiles longitudinales izquierdo y derecho.

- Cota inicial de la masa superior igual a la media aritmética de las cotas iniciales de las masas inferiores.

- Giro inicial de la masa superior igual a cero.

- Velocidades verticales de las dos masas inferiores iguales a la velocidad vertical obtenida al recorrer la rodada correspondiente a cada masa durante 0,5 segundos a la velocidad del modelo.

- Velocidad de giro de la masa superior nula.

- Aceleraciones iniciales: todas nulas.

El autor opina que estas condiciones iniciales falsean las velocidades y aceleraciones en el primer hectómetro, y que deberían tomarse las realmente obtenidas en los primeros intervalos. Se ha mandado comunicación a la ASTM en este sentido.

11. Cálculo del HRI o (IRI-medio coche)

Conocidas en cada instante las cotas, velocidades y aceleraciones de las masas superior e inferior, el cálculo del IRI es inmediato. En la expresión del HRI dada más arriba

(Ec. 15)

$$d_t = z_3 - \frac{z_1 + z_2}{2}; \quad HRI = \frac{\sum |d_t - d_{t-1}|}{L}$$

no hay más que calcular en cada paso de integración el valor absoluto de la diferencia de cotas entre la masa superior y la media de las inferiores, ir acumulando éste valor, y dividir al final de cada tramo de cálculo por la distinta recorrida. Las cotas de las masas 1, 2 y 3 son los tres primeros elementos del vector de estado que se calcula en cada iteración tras leer las nuevas cotas.

En general, las cotas del perfil longitudinal de cada rodada vienen dadas en mm. Como la distancia recorrida suele medirse en metros, el IRI se obtiene directamente en sus unidades dm/Hm, iguales a mm/m. En caso de que las cotas del perfil longitudinal estén en otras unidades, deben convertirse a las apropiadas.

12. Cálculo del balanceo acumulado

De la misma forma puede definirse un «IRI-Balanceo», que es el incremento de ángulo ϕ que ha

girado la masa superior en un incremento de tiempo Δt , acumulado en valor absoluto, y dividido por la distancia recorrida L . Se medirá en grados o radianes cada 100 metros. El balanceo es el elemento 7 del vector de estado que se calcula en cada paso.

(Ec. 16)

$$IRI-Balanceo = \frac{\sum |\Delta\phi|}{L}$$

Como las cotas del perfil longitudinal de las rodadas están en mm y la distancia entre ruedas b está dada en metros, el balanceo se obtiene en miliradianes al resolver el sistema. Deben tenerse en cuenta las unidades al utilizar el programa del presente artículo.

En todos los perfiles reales de carreteras recientes que el autor ha podido comprobar, este valor es prácticamente nulo para los valores de las constantes que da la norma ASTM.

13. Aceleraciones verticales y angulares sufridas por el conductor

El cálculo de las aceleraciones verticales o angulares sufridas por el conductor es muy sencillo. Recordando la Ec. 5, la expresión de la aceleración vertical de la masa superior viene dada por:

(Ec. 17)

$$\ddot{z}_3 \approx \frac{z_{3,t+2} - 2z_{3,t+1} + z_{3,t}}{\Delta t^2}$$

para calcular la aceleración no hay más que en cada instante de integración guardar las cotas de los dos instantes anteriores e ir aplicando la citada expresión en diferencias. Para medirla en unidades de aceleración de la gravedad o «g», que es lo habitual, no hay más que tener en cuenta las unidades en que vienen dados los datos del problema (el perfil longitudinal, los datos del medio coche y la velocidad del modelo).

Al estar en mm las cotas de los perfiles longitudinales la aceleración se obtiene en mm/s². Para obtenerlas en g=9,8 m/s² es necesario dividir las por 9800.

Para el cálculo de la aceleración angular, el proceso es el mismo pero con el ángulo de balanceo (elemento 7 del vector de estado) o con la velocidad de balanceo (elemento 8 del vector de estado). En este último caso, la aceleración angular viene dada por:

$$\hat{\phi}_{t+1} \approx \frac{\phi_{t+1} - \phi_t}{\Delta t}$$

y se expresa en miliradianes por segundo al cuadrado.

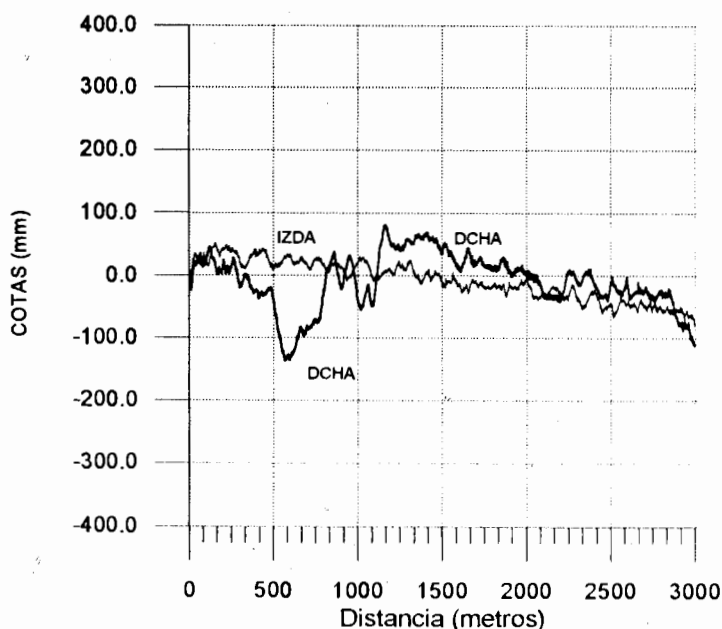
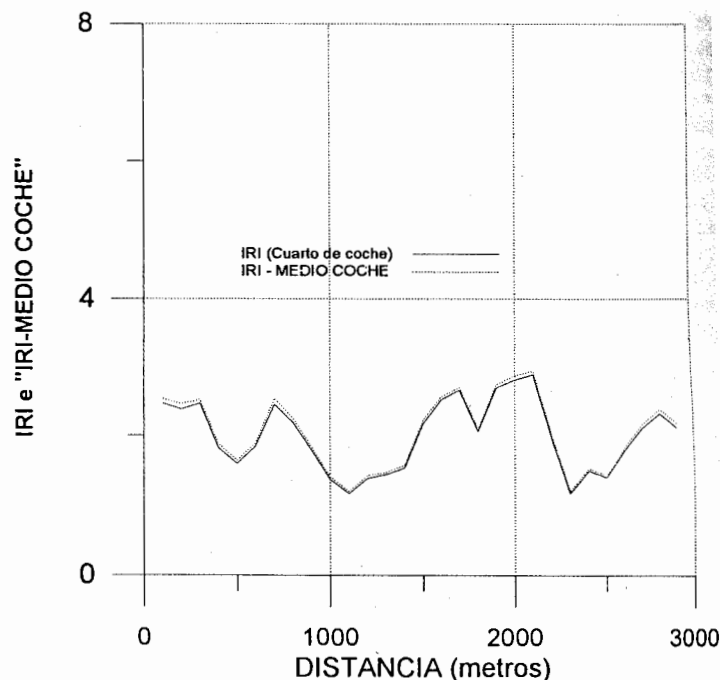


Figura 9. Perfiles longitudinales de las rodadas. A la derecha figura 10. IRI de una rodada y comparación con el «IRI-Medio coche» que se obtiene al poner bajo las dos ruedas el mismo perfil longitudinal. Obsérvese que las dos curvas coinciden casi exactamente.



14. Esfuerzos dinámicos sobre el pavimento

El cálculo de los esfuerzos dinámicos es también muy sencillo. Recordando las Ec. 1 y 2, la expresión de las fuerzas verticales F_2 y F_4 de las ruedas izquierda y derecha vienen dadas por

$$F_2 = k_2(z_{p1} - z_1) + c_2(\dot{z}_{p1} - \dot{z}_1)$$

$$F_4 = k_2(z_{p2} - z_2) + c_2(\dot{z}_{p2} - \dot{z}_2)$$

y recordando también la expresión del vector de estado Z y la expresión en diferencias finitas similar a (Ec. 5) de la velocidad vertical de las cotas de los perfiles longitudinales izquierdo y derecho, se obtiene

(Ec. 18)

$$F_{2izqda} = k_2[z_{p1} - Z(1)] + c_2\left[\frac{z_{p1n1} - z_{p1}}{\Delta t} - Z(4)\right]$$

$$F_{4dcha} = k_2[z_{p2} - Z(2)] + c_2\left[\frac{z_{p2n1} - z_{p2}}{\Delta t} - Z(5)\right]$$

y se ve cómo los esfuerzos bajo cada rueda se obtienen a partir de los elementos 1, 2, 4 y 5 del vector de estado calculado en cada paso de integración junto con las cotas actual y anterior de cada rodada.

El programa de cálculo, a disposición del lector interesado, imprime en un fichero ASCII estos datos junto con los de las aceleraciones vertical y angular de la masa superior.

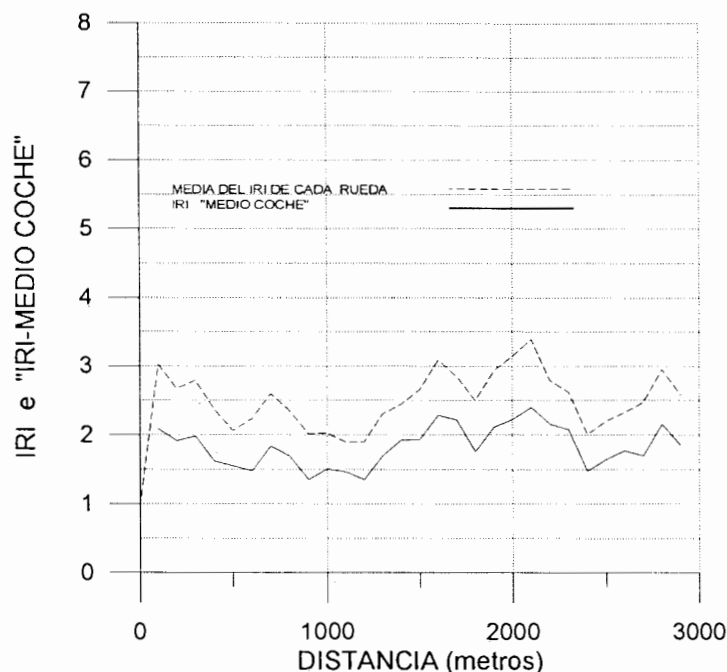
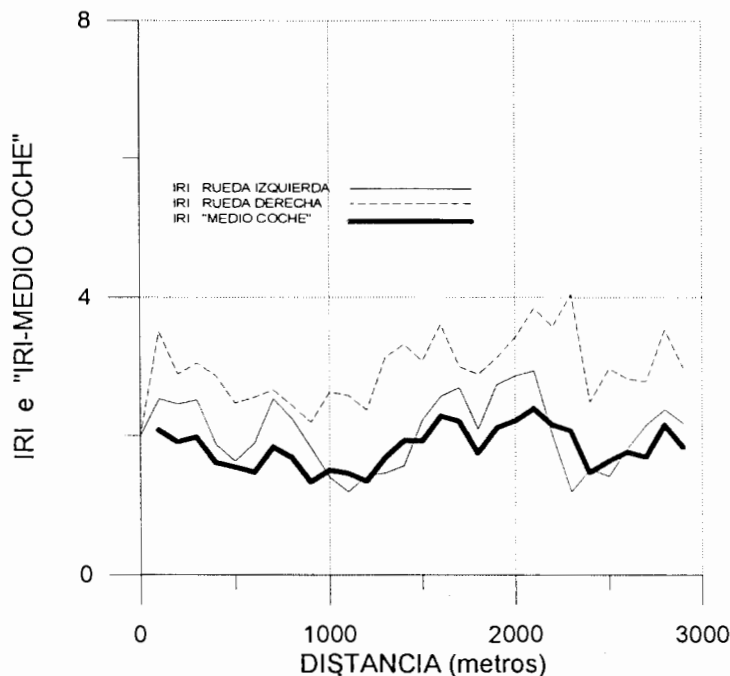
15. Ventajas y desventajas del método de la ecuación de estado

Como ha podido verse en lo que antecede, el Método de la Ecuación de estado es una poderosa herramienta de cálculo para la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales. En la literatura puede verse que es aplicable a sistemas no lineales y de coeficientes variables. Sin embargo, su mayor aplicación estriba precisamente en el control de sistemas, es decir, en la lectura de las variables de estado reales en un instante determinado, su comparación con las obtenidas en ese instante por el algoritmo y la eventual corrección del sistema (velocidades, orientación, ángulo o distancia al blanco, etc.). Aplicar el método sólo a la integración del sistema parece al autor aprovechar sólo una pequeña parte del método, y probablemente eficaz.

Aplicar este método de integración al caso del cuarto de coche, IRI, por ejemplo, supone:

1. Obtener la matriz del sistema A , de orden 4.
2. Obtener a continuación la matriz de transición de estado $e^{A\Delta t}$.
3. Obtener la matriz inversa A^{-1} .
4. Resolver en cada paso de integración el sistema de estado, de 4 ecuaciones con 4 incógnitas.

La solución por el método de diferencias finitas dado en la Ref. 3 no exige los pasos 2 y 3 ante-



riores, y resuelve en cada iteración un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas frente a las 4 del sistema de Estado. Ello es, como se ha visto, porque el vector de estado tiene doble número de elementos que grados de libertad del sistema; por ejemplo cotas y velocidades de las masas en nuestro caso frente a sólo las cotas. El tiempo de cálculo es inferior a la mitad para el mismo procesador y la misma velocidad de acceso a disco. En el caso de medio coche, la expresión iterativa en diferencias dada en la Ec. 6 supone resolver en cada paso el sistema, multiplicando tres matrices 4×4 por tres vectores 4×1 y sumar los resultados para obtener el vector 4×1 . Las ecuaciones de estado Ec. 13 y 14 suponen multiplicar una matriz 8×8 por un vector 8×1 y sumarle el vector 8×1 de la Ec. 11. Integrando por diferencias finitas se ahorra el cálculo de la matriz de transición de estado por Mac-Laurin y el cálculo de la inversa de A, y en cada paso hay que efectuar 48 multiplicaciones en lugar de 64. En los primeros 800 puntos de los perfiles, la Ecuación de Estado es un 64,28 % más lenta, y para 24.000 puntos se estabiliza en un 58,81 % más lenta de ejecución (para el Cuarto de coche los valores son análogos). Al autor le parece el método de diferencias finitas mucho más eficiente. No se entra aquí en los problemas de estabilidad, convergencia y consistencia de las respectivas soluciones numéricas, que para ambos métodos pueden verse en la bibliografía.

La mayor ventaja del Método de Estado para la integración del sistema es su generalidad. Con sólo cambiar la matriz A y la definición del vector de Estado Z, todas las rutinas del programa de cálculo sirven para cualquier otro sistema con cualquier número de grados de libertad. El Método de Estado permite, además, trabajar con incrementos de tiempo pequeñísimos, que podrían producir inestabilidades en los esquemas de diferencias finitas.

16. Aplicación a una carretera real

La figura 9 representa dos perfiles longitudinales de autovías españolas recientes, ambos de 3 km. de longitud. Para comprobar el modelo descrito, se toman como input de las ruedas derecha e izquierda.

IRI e «IRI-Medio coche»

En primer lugar, y para comprobar el modelo de medio coche, se introduce como input en las dos ruedas el mismo perfil de la figura 9, rueda derecha, y se compara el «IRI-Medio coche» así obtenido con el IRI de dicho perfil. En la figura 10 puede verse que los valores obtenidos son sumamente parecidos, y si no son exactamente iguales hasta la última cifra decimal se debe a dos motivos:

- El proceso de cálculo del IRI de cuarto de coche se ha hecho por diferencias finitas según el método de la Ref. 3, mientras que el del medio coche se ha hecho por el método de la Ecuación de Estado aquí descrito.

- Los valores de las constantes para el «Golden Car» del IRI difieren muy ligeramente de los del medio coche. La constante del muelle inferior del medio coche es 326, mientras que para ser la mitad del Golden Car debería ser $653/2 = 326.5$, y la del muelle superior, que es 31, debería ser $63/2 = 31.5$.

Comprobada así la bondad del modelo numérico (se han realizado también las comprobaciones consistentes en tomar como inputs perfiles sinusoidales, obteniendo como IRI-Medio coche el valor correspondiente a la solución analítica, lo que

Figura 11. IRI bajo cada rueda e «IRI-Medio coche» resultante. A la derecha figura 12. Media de los IRI de cada rueda y comparación con el IRI-Medio coche.

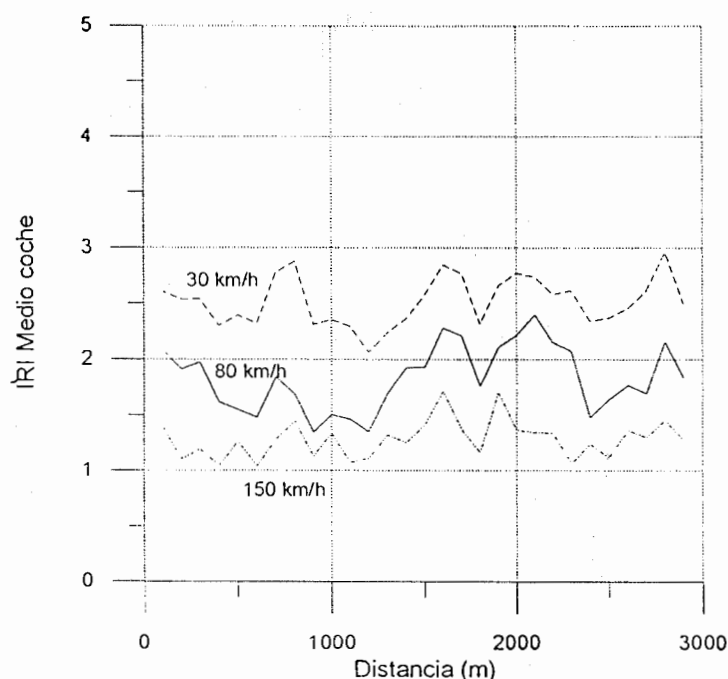
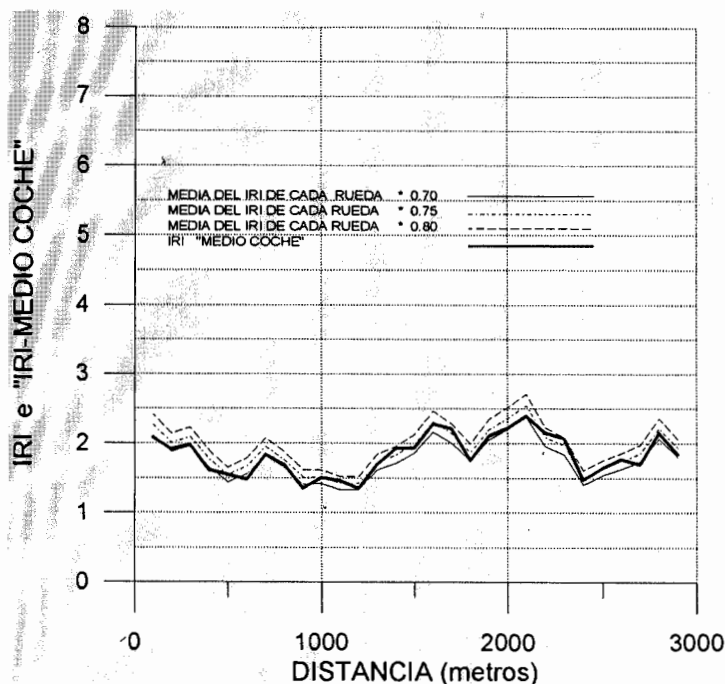


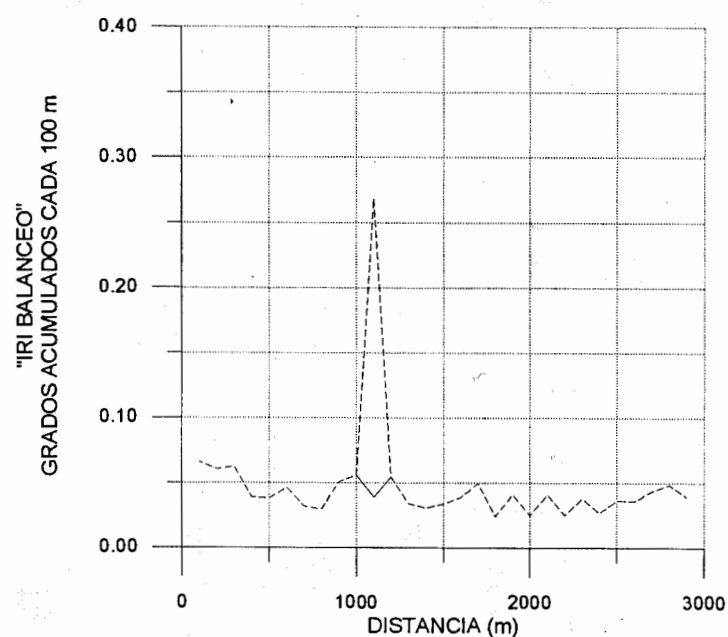
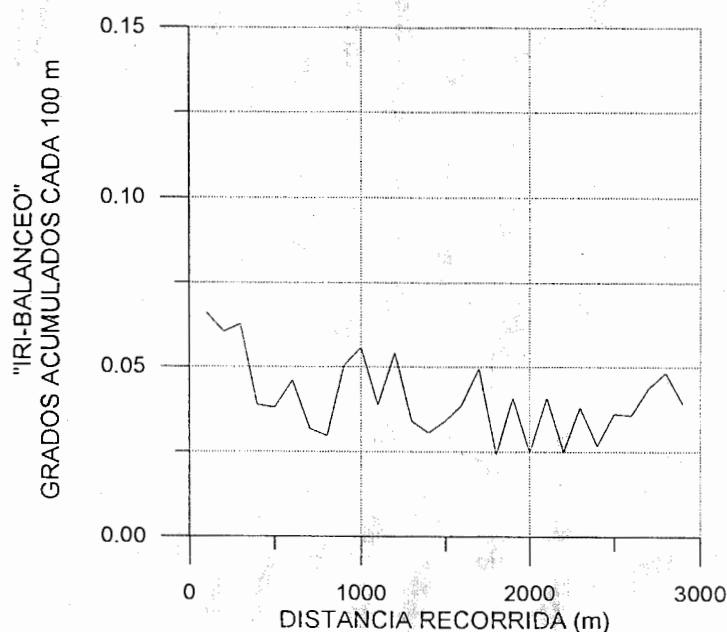
Figura 13. Medias de los IRI de cada rueda multiplicadas por 0,7, 0,75 y 0,8, y su comparación con el «IRI-Medio coche».
A la derecha figura 14. Influencia de la velocidad del vehículo en el IRI-Medio coche. Abajo figura 15. Balanceo acumulado en cada hectómetro. Y figura 16. Balanceo causado por un bache bajo la rueda, derecha.

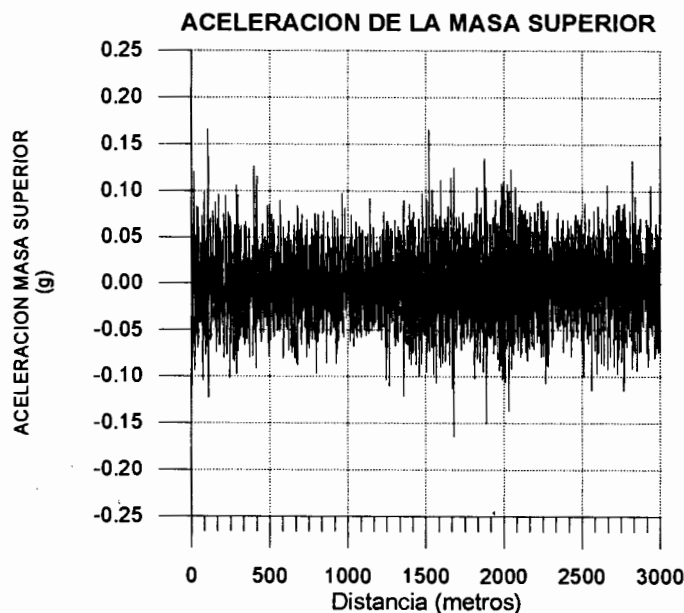
está a disposición del lector interesado), se pasa a continuación el modelo de medio coche con los perfiles longitudinales de la figura 9 bajo las ruedas derecha e izquierda. En la figura 11 puede verse el gráfico del IRI de cada rueda y su comparación con el «IRI-Medio coche» resultante. En la figura 12 se dibuja la media de los IRI de cada rueda, y puede verse que la correspondencia con el «IRI-Medio coche» es total. En la figura 13 puede verse la media de los IRI multiplicada por 0,7, 0,75 y 0,8. Parece haber una correspondencia muy alta entre el IRI-Medio coche y la media de los IRI de cada rueda multiplicada por 0,75. En la Figura 14 puede verse la influencia de la veloci-

dad sobre el «IRI-Medio coche». A mayor velocidad menor IRI, aunque ello depende en general de la longitud de onda de los defectos de la carretera (Ref. 21).

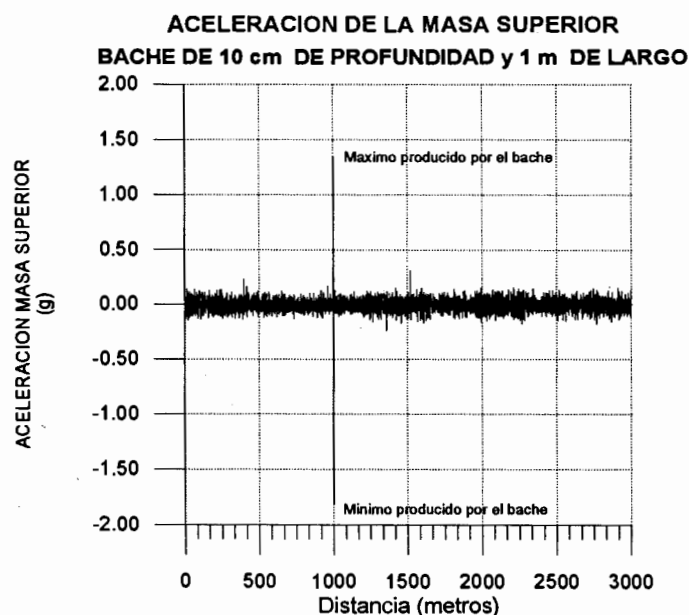
Balanceo acumulado o «IRI-Balanceo»

En la figura 15 puede verse el gráfico del balanceo acumulado calculado según la Ec. 16. Los IRI en este ejemplo son bastante malos, y el balanceo acumulado es del orden de 0.03 a 0.05 grados (sexagesimales) por Hm. Para unos IRI buenos el balanceo es mucho menor.





MEDIO COCHE



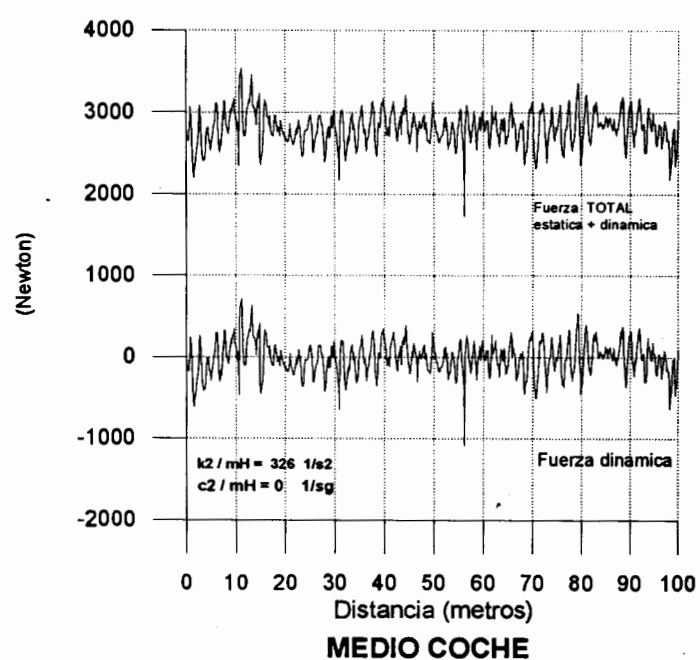
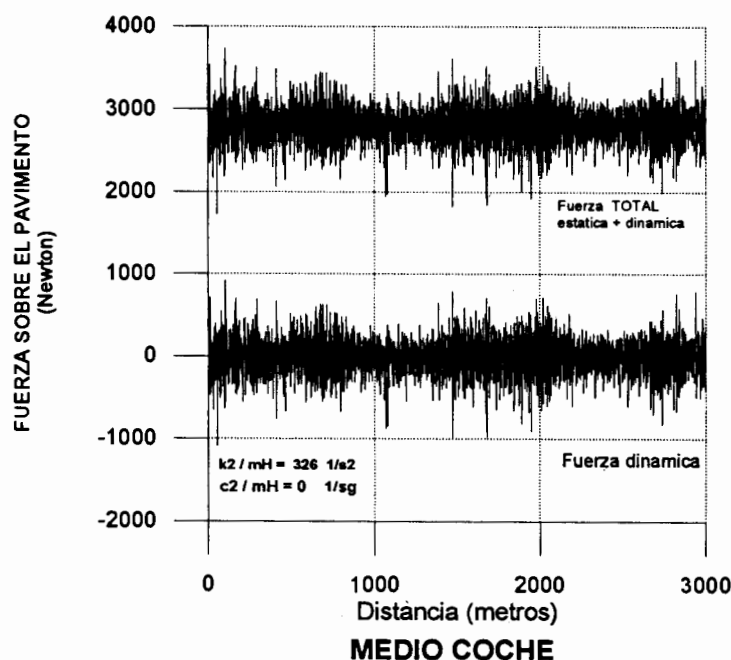
MEDIO COCHE

Es conveniente comprobar la estabilidad del sistema una vez que la masa superior comienza a oscilar fuertemente sobre su centro de gravedad. Para ello se ha simulado un bache en el perfil longitudinal de la rueda derecha. El bache se simula reduciendo en 10 cm. las cotas del perfil longitudinal entre los pk 1.000 y 1.001, sin cambiar el perfil de la rueda izquierda. El balanceo acumulado se indica en la figura 16. Puede verse que el resultado es exactamente igual al de la figura 14 (la escala vertical es distinta) excepto en el hectómetro del bache, donde el IRI-balanceo llega a valer 0.27 grados/Hm y vuelve enseguida al valor obtenido en la carretera sin bache.

Aceleración vertical sufrida por el conductor

En la figura 17 puede verse el gráfico, calculado según la ecuación 17. En el primer decímetro la aceleración sale muy alta (no se ha representado) porque en condiciones iniciales se toma como velocidad inicial de las 3 masas la correspondiente a 0,5 segundos de viaje, que para este ejemplo con 12,5 cm. de distancia de muestreo y la velocidad estándar de 22.2 m/sg corresponden a 11.11 metros, es decir, a $11.11/0.125 = 89$ intervalos de perfil longitudinal. Tal vez esta velocidad inicial, que en la siguiente iteración del vector

Figura 17. Aceleraciones verticales. A la derecha figura 18. Aceleración vertical causada por el bache acumulado. Abajo figura 19. Fuerzas estática y dinámica de la rueda derecha sobre el pavimento. Y figura 20. Fuerzas estática y dinámica de la rueda derecha sobre el pavimento.



de estado es sin duda muy distinta, debiera cambiarse a un sólo intervalo.

En la figura 18 puede verse la aceleración vertical causada por el bache simulado anteriormente. La aceleración llega a valer casi 2g frente a los 0.1 g - 0.15g medidos normalmente. Sin embargo, debe recordarse que los efectos sobre el conductor (según las normas ISO) se miden no sólo por la magnitud de la aceleración, sino también por otros factores entre los que está el tiempo en que una magnitud de aceleración determinada actúa sobre él. Con el presente programa es muy sencillo ir guardando en el fichero de resultados los intervalos de magnitudes de aceleración y los intervalos de tiempo respectivos en los que actúan.

Esfuerzos dinámicos sobre el pavimento

Figura 21. Defecto de 6 mm que produce la disminución de adherencia en el pk 56.1 que puede verse en la figura 20.

Finalmente, y para no aburrir demasiado al amable lector, se presenta en la figura 19 el gráfico de los esfuerzos dinámicos transmitidos al pavimento por la rueda derecha. La fuerza se ha calculado según la Ecuación 18. En la citada fórmula

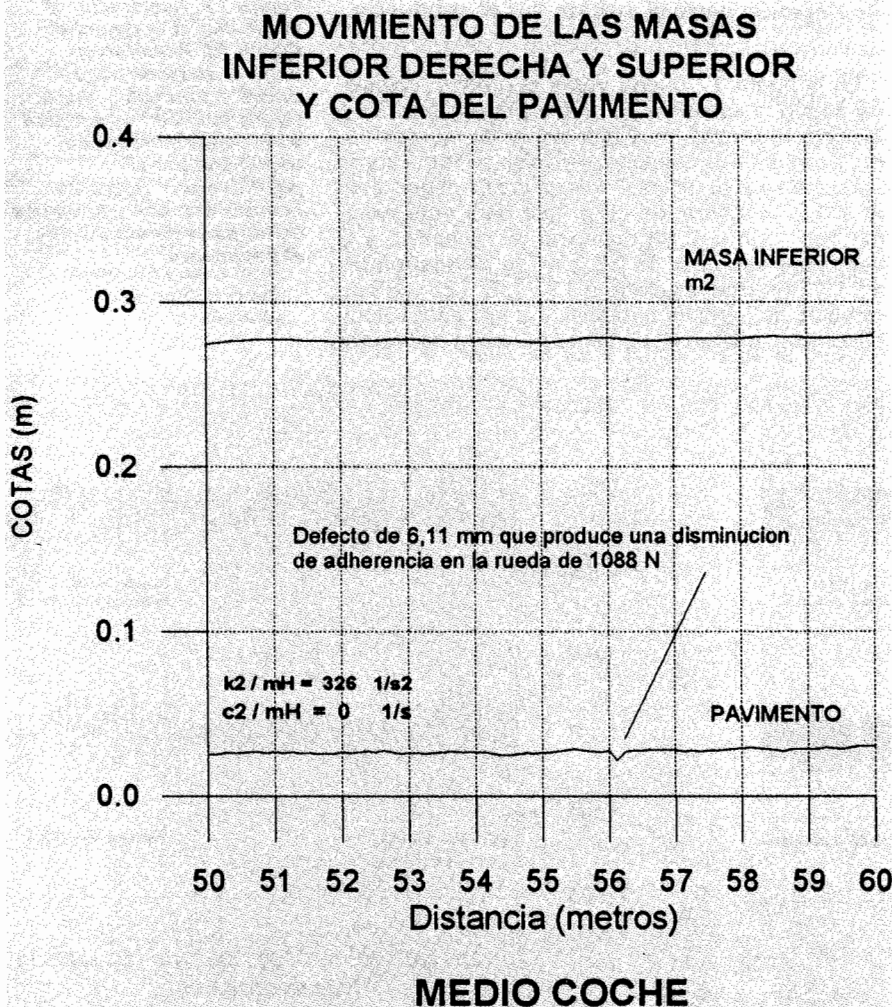
puede verse que la fuerza se calcula como el producto de cota por constante del muelle más el producto de velocidad por constante de amortiguamiento, es decir, tiene unidades de m/s^2 , y viene dada por unidad de masa superior m_H . En la citada Figura 19 se dibujan los valores reales en Newton obtenidos al multiplicar por la masa superior. Para calcular la fuerza estática de una rueda sobre el pavimento se tiene en cuenta que la masa de la mitad de este modelo es (250 kg de la mitad de la masa superior más $0.075 \cdot 500 = 37.5$ kg de la inferior derecha) de 287.5 kg. La correspondiente fuerza estática es de $287.5 \cdot 9.8 = 2817.5$ N. Para medio coche esto equivale a 5635 N, y para el coche entero a 11270 N, es decir, a un automóvil que pese en total 1148 kg fuerza, lo que corresponde a un turismo medio. En el gráfico se han dibujado la fuerza dinámica obtenida y la fuerza total suma de ésta y de la estática.

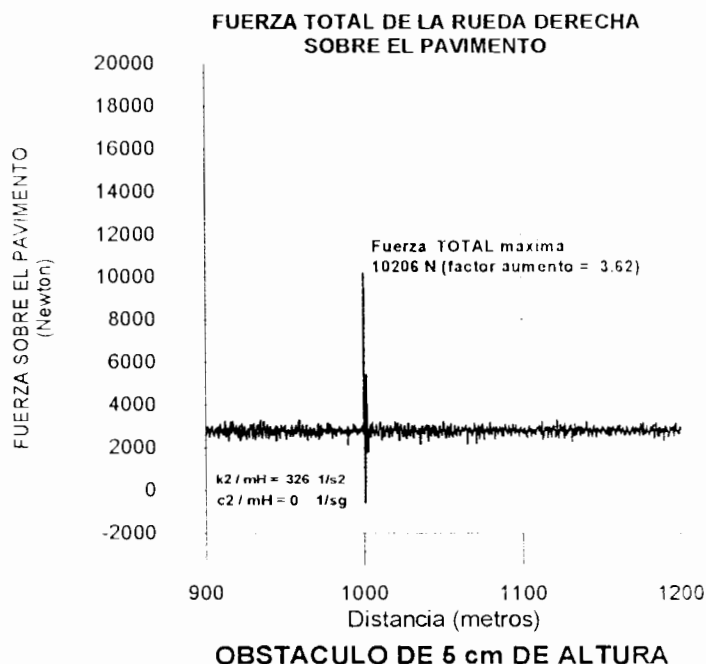
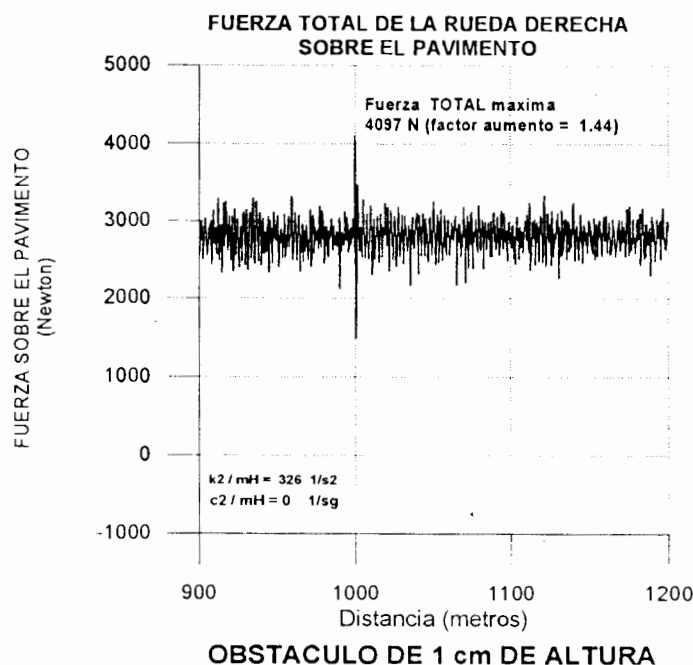
La fuerza total sobre el pavimento llega a valer 3736 N en el pk 104,125. Frente a la fuerza estática de 2817 N esto supone un factor de aumento dinámico de 1,326 y es el mayor en este tramo de 3 km. Se observa que el mínimo de las fuerzas dinámicas creadas por la rueda sobre el pavimento llegan a valer 1088 N negativos en el metro 56, 125 frente a los 2817 N estáticos. La fuerza sobre el pavimento se reduce a 1729 N, y el factor de disminución es del orden del 38,6 % en esa punta.

En la figura 20 se detallan las fuerzas en el primer hectómetro. La fuerza dinámica negativa del pk 56, 125 se debe al pequeño defecto de 6,11 mm en el pavimento que puede verse en detalle en la figura 21. La fuerza sobre el pavimento (ver Ec. 18, sin amortiguamiento) es igual al producto de la constante elástica del neumático k_2 por la diferencia de cotas entre el pavimento y la masa inferior, que representa el eje. Se han dibujado el perfil longitudinal de la rodada y el movimiento de la masa inferior, para entender mejor la variación de la fuerza. El programa que se describe en el presente artículo permite hacer estas simulaciones en pocas horas de trabajo. Obsérvese que para no hacer coincidente el movimiento de la masa con el perfil longitudinal se ha sumado una constante de 0.25 m a la cota de la masa inferior. A efectos de cálculo esto es irrelevante, y el programa toma realmente todas las cotas partiendo de cero.

Al analizar en detalle el esfuerzo dinámico sobre el pavimento, se observa que cuando la masa inferior se acerca al pavimento la fuerza es positiva, y mayor cuanto más se acercan, es decir, cuanto más se comprime el muelle que simula al neumático. Naturalmente, esto es evidente, pero permite al autor comprobar que los signos son correctos, lo que es esencial en este tipo de problemas. Al separarse del suelo la masa inferior, la fuerza disminuye, y pasa a ser muy pequeña en las zonas en que hay bruscos descensos relativos del perfil longitudinal.

Para terminar, en la Figura 22 se dibuja el aumento de fuerza sobre el pavimento cuando la rueda encuentra un obstáculo de 1 cm de altura. En este ejemplo se ha situado en el pk 1000.00, y se observa que la fuerza sobre el pavimento llega a 4097 N, aumentando un 44 %. Para un obs-





táculo de 5 cm de altura (Figura 23) la fuerza sobre el pavimento llega a valer 10206 N, con un factor de aumento del 262%. Para un obstáculo de 2 cm los valores son 5626 N y un 100% de aumento. El lector puede intuir que para camiones con 13 T de carga por eje, un obstáculo del orden de 5 cm puede llegar a crear fuerzas dinámicas repentinas de hasta 34 T, que podrían llegar a romper losas de un pavimento de hormigón.

El lector interesado puede ver la utilidad de este modelo para identificar en una carretera las zonas peligrosas para la conducción por disminución de adherencia, o las zonas en que elevados esfuerzos dinámicos pueden causar una ruina prematura del firme. Y todo ello en Autovías reales, a velocidades reales y para automóviles y camiones reales, utilizando los valores adecuados en el programa aquí descrito.

Bibliografía

- (1) BANCO MUNDIAL. Technical Paper 45. «The International Road Roughness Experiment». Establishing Correlation and a Calibration Standard for Measurements. Michael W. Sayers, Thomas D. Gillespie y Cesar A.V. Queiroz, 1986.
- (2) BANCO MUNDIAL. Technical Paper 46. «Guidelines for Conducting and Calibrating Road Roughness Measurements». Michael W. Sayers, Thomas D. Gillespie y William D.O. Paterson, 1986.
- (3) «CALCULO DEL IRI DE UNA CARRETERA A PARTIR DE SU PERFIL LONGITUDINAL». Manuel J. Melis, RUTAS Mayo-Junio 1992.
- (4) «APPLIED NUMERICAL METHODS» CARNAHAN, LUTHER y WILKES, WILEY 1969. Versión Española Manuel J. Melis y E. de Miguel, Ed. Rueda 1979.
- (5) ASTM. Special Technical Publication 884. «Measuring Road Roughness and its effects on users cost and comfort». «Development, Implementation and application of the Reference Quarter-Car Simulation». Michael W. Sayers, Thomas D. Gillespie, 1983.
- (6) ASTM. Norma E 1170-91 «Standard practices for simulating vehicular response to longitudinal profiles of a vehicular traveled surface».
- (7) TRB (Transportation Research Board) 68th Annual Meeting, 1989. «Two Quarter-Car models for defining road roughness: IRI and HRI». Michael W. Sayers, University of Michigan, Transportation Research Institute.
- (8) ASTM. Special Technical Publication 884. «Root-Mean-Square Vertical Acceleration as a Summary Roughness Statistic». W. Ronald Hudson, D. Halbach, J.P. Zaniewski, 1983.
- (9) TRB (Transportation Research Board) 69th Annual Meeting, 1990. «Profiles of Roughness». Michael W. Sayers, University of Michigan, Transportation Research Institute.
- (10) STATE SPACE AND LINEAR SYSTEMS, McGRAW-HILL, 1971, D.M. WIBERG.
- (11) STOCHASTIC MODELS, ESTIMATION & CONTROL, Vol. 1 Academic Press, 1979, P. MAYBECK.
- (12) SIGNAL PROCESSING IN C. C. Reid y T. Passin. Wiley 1992.
- (13) LINEAR CONTROL SYSTEMS ANALYSIS AND DESIGN. J. D. Azzo, C. Houpis. McGrawHill 1988.
- (14) CONTROL SYSTEM DESIGN. D. Friedland. McGrawHill 1987.
- (15) LINEAR SYSTEMS ANALYSIS. A. Tripathi, J. Wiley 1987.
- (16) FEEDBACK AND CONTROL SYSTEMS. J. DiStefano. McGrawHill 1976.
- (17) MODERN CONTROL ENGINEERING. K. Ogata. Prentice Hall 1990.
- (18) SYSTEM DYNAMICS, K. Ogata, Prentice Hall 1992.
- (19) LINEAR SYSTEMS R. Decarlo. Prentice Hall 1989.
- (20) «RUTINAS EN C PARA CALCULO Y DIBUJO DE AREAS Y VOLUMENES DE OBRAS DE TIERRAS, Tomo IV», Manuel J. Melis, Software Técnico, 1992.
- (21) «CALCULO DE LAS LONGITUDES DE ONDA MAS IMPORTANTES EN LA REGULARIDAD SUPERFICIAL DE UNA CARRETERA», Manuel J. Melis, RUTAS, Enero 1993.

Figura 22. Esfuerzos dinámicos positivo y negativo creados por un obstáculo de 1 cm. de altura. A la derecha figura 23. Esfuerzos dinámicos creados por un obstáculo de 5 cm. de altura.