

Aspectos básicos sobre la interferencia al transporte sólido litoral en zonas costeras (segunda parte) (*)

Por RAFAEL CORTELL BATALLER

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

En la segunda parte de este trabajo se analiza el caso de obstáculo rebasado, transformando la ecuación diferencial en derivadas parciales que rige el fenómeno en una ecuación diferencial ordinaria. Se obtienen soluciones numéricas en régimen transitorio para el plano semiinfinito con profundidad constante y variable (fondo plano con pendiente constante). Se considera también el caso de un dominio de integración de longitud L en régimen transitorio y profundidad constante, y en régimen estacionario con profundidad constante y variable.

3. OBSTACULO REBASADO EN REGIMEN TRANSITORIO

3.1. Profundidad constante

En la primera parte [9] se analiza el problema planteado mediante las ecuaciones [(1), (5)] siendo la ecuación (6) solución del mismo, en donde A, en m²/año, era una constante.

Si tomamos $c = y/y_2$ resultará:

$$\frac{\delta^2 c}{\delta t} = A \frac{\delta^2 c}{\delta x^2} \quad (8)$$

Determinemos una nueva variable $\beta = \beta(x, t)$ que transforme la ecuación (8) en otra ecuación diferencial ordinaria. Sea:

$$\beta = K \cdot x \cdot t^n \quad (9)$$

en donde K y n son dos constantes a determinar

Entonces resultará:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \beta}{\delta t} &= n \cdot \beta / t \\ \frac{\delta \beta}{\delta x} &= K \cdot t^n \end{aligned} \quad (10)$$

y además:

$$\frac{\delta c}{\delta t} = \frac{n \beta}{t} \frac{\delta c}{\delta \beta} \quad (11.1)$$

$$\frac{\delta c}{\delta x} = K \cdot t^n \frac{\delta c}{\delta \beta} \quad (11.2)$$

$$\frac{\delta^2 c}{\delta x^2} = K^2 \cdot t^{2n} \frac{\delta^2 c}{\delta \beta^2} \quad (11.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (11.1) y (11.3) en (8):

$$\frac{n \beta}{t} \frac{\delta c}{\delta \beta} = A \cdot K^2 \cdot t^{2n} \frac{\delta^2 c}{\delta \beta^2} \quad (12)$$

$$\frac{n \beta}{A K^2} \frac{\delta c}{\delta \beta} = t^{2n+1} \frac{\delta^2 c}{\delta \beta^2} \quad (13)$$

Si $c = c(\beta)$ deberá ser $2n + 1 = 0$; luego $n = -1/2$. Tomando además $K^2 = 1/4A$, la ecuación (13) será:

$$\frac{d^2 c}{d\beta^2} + 2 \beta \frac{dc}{d\beta} = 0 \quad (14)$$

siendo $\beta(x, t) = 1/2 x / (At)^{1/2}$, resultando β y c adimensionales.

La ecuación (14) junto con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} c &= 1 & \text{en} & \beta = 0 \\ c &= 0 & \text{en} & \beta = \infty \end{aligned} \quad (15)$$

(*) La primera parte se publicó en Revista de Obras Públicas, octubre 1990, p 51-54.

representan el problema [(1), (5)] planteado en un principio. Mediante el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden se ha obtenido una solución de la ecuación (14) con las condiciones iniciales:

$$c(0) = 1 \quad ; \quad c'(0) = -2/\sqrt{\pi} \quad (16)$$

Esta solución viene representada en la figura 5 (curva (1)). Los perfiles de la línea de costa para distintos instantes son "semejantes" entre sí, es decir, se pueden obtener desplazando la escala en dirección x . Se ha visto que $dc/d\beta = -0.01$ para, aproximadamente, $\beta_0 = 2$. Si para valores superiores de β se consideran despreciables los valores de c , podemos decir que el efecto del obstáculo rebasado en régimen transitorio se extiende sobre una longitud de playa dada por:

$$L_\delta = 4\sqrt{At} \quad (17)$$

que es proporcional a la raíz cuadrada de A y a la raíz cuadrada del tiempo t . L_δ debe medirse

sobre la perpendicular al obstáculo trazada por su base.

3.2. Profundidad variable

Suponiendo batimetría paralela a la costa rectilínea en el instante inicial (eje Ox), resultará $d = m_s y = h y/y_2$, siendo:

m_s = pendiente significativa de la playa.

h = profundidad en el extremo del obstáculo.

Si para este caso tomamos:

$$A = \frac{Q}{m_s y \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{Q}{m_s y_2 \cdot \text{tg } \alpha \cdot y/y_2} = A_0/c \quad (18)$$

$$\text{con } A_0 = \frac{Q}{m_s \cdot y_2 \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{Q}{h \cdot \text{tg } \alpha} \quad [\text{m}^2/\text{año}],$$

la (8) quedará así:

$$\frac{\delta c}{\delta t} = A_0 \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{1}{c} - \frac{\delta c}{\delta x} \right) \quad (19)$$

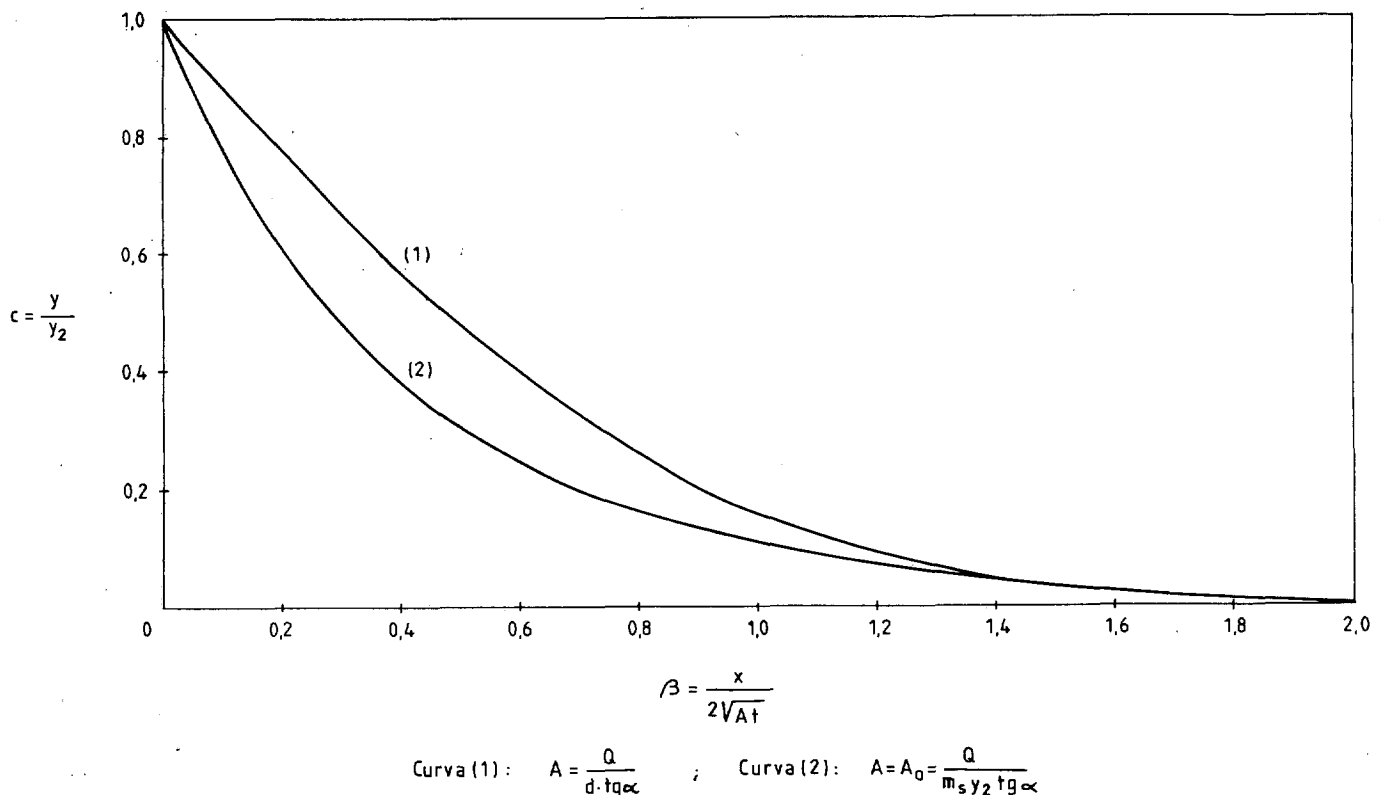


Figura 5. Obstáculo rebasado en régimen transitorio. (1) d constante; (2) $d = m_s y$.

Sustituyendo las ecuaciones (9) y [(11.1), (11.3)] en (19) y tomando:

$$K^2 = 1/4A_0 \quad ; \quad \beta = 1/2 x/(A_0.t)^{1/2}, \text{ resulta:}$$

$$\frac{d^2 c}{d\beta^2} - \frac{1}{c} \left(\frac{dc}{d\beta} \right)^2 + 2\beta c \frac{dc}{d\beta} = 0 \quad (20)$$

La ecuación (20) junto con las condiciones de contorno dadas por (15) representa la solución del problema con profundidad variable.

Es evidente que mediante el método numérico citado en la sección anterior podemos obtener una familia de soluciones de (20) con $c(0) = 1$, para valores arbitrariamente elegidos de $(dc/d\beta)_{\beta=0} = c'(0)$.

Sin embargo, para que la segunda de las condiciones (15) se satisfaga, $c'(0)$ deberá ser negativa. Se ha elegido una solución en la que $c \rightarrow 0$ para un cierto valor $\beta = \beta_0$ y además satisfaga la condición adicional:

$$\frac{dc}{d\beta} = 0, \quad c = 0, \quad \beta = \beta_0 \quad (21)$$

La curva (2) de la figura 5 representa la solución numérica obtenida para la ecuación (20) con las condiciones [(15), (21)]. Para dicha solución se ha tomado $c'(0) = -2.5$ y se ha visto que $dc/d\beta = -0.01$ para, aproximadamente, $\beta_0 = 2.2$.

4. DOMINIO DE INTEGRACION DE LONGITUD L.

4.1. Régimen transitorio y profundidad constante.

La ecuación diferencial en derivadas parciales (1) de tipo parabólico la integramos en $0 \leq x \leq L$ con la condición inicial:

$$t < 0 \quad ; \quad y = 0 \text{ para todo } x \quad (22)$$

y las siguientes condiciones de contorno:

$$\text{— Borde izquierdo: } \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right)_{x=0} = -\operatorname{tg} \alpha \quad (23)$$

$$\text{— Borde derecho: } \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right)_{x=L} = 0$$

En la integración numérica se ha usado el método de Crank-Nicholson discretizando el dominio de longitud L en $N - 1$ subintervalos iguales de longitud $\Delta x = L/(N - 1)$, siendo N el número de nudos.

Si los subíndices (i, j) representan tiempo y espacio respectivamente, la ecuación (1) discretizada será:

$$\frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\Delta t} = A \left[p \frac{y_{i+1,j-1} - 2y_{i+1,j} + y_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} + (1-p) \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{(\Delta x)^2} \right] \quad (24)$$

y tomando $p = 1/2$ en la ecuación (24):

$$\begin{aligned} & -F(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j-1}) + 2(1+F)y_{i+1,j} = \\ & = F(y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) + 2(1-F)y_{i,j} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{en donde } F = \frac{A \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

En la ecuación (25) el primer miembro está dado para el instante $i + 1$, mientras que el segundo miembro lo es para el instante i.

Para aplicar las condiciones de contorno, las primeras derivadas de la función y respecto de x en $x = 0$, $x = L$, las aproximamos por diferencias finitas adelantadas y retrasadas, respectivamente. De ese modo, en el instante i tendremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right)_{(i,1)} &= \frac{-y_{i,3} + 4y_{i,2} - 3y_{i,1}}{2\Delta x} = \\ &= -\operatorname{tg} \alpha, \text{ en } x = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right)_{(i,N)} &= \frac{y_{i,N-2} - 4y_{i,N-1} + 3y_{i,N}}{2\Delta x} = \\ &= 0, \text{ en } x = L \end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las expresiones (26) resultará para todo i:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{4}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{2}{3}\Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ y_N &= \frac{4}{3}y_{N-1} - \frac{1}{3}y_{N-2} \end{aligned} \quad (27)$$

En la figura 6 se representa la solución al problema [(1), (23)] en donde se han tomado para Q , d y α valores idénticos a los de la figura 4 y además $N = 18$, $\Delta x = 20$ m. con lo cual $L = 340$ m.

4.2. Régimen estacionario

Si en la ecuación (1) resulta ser $\frac{\delta y}{\delta t} = 0$ entonces tendremos:

$$0 = \frac{d}{dx} \left(A \frac{dy}{dx} \right) \quad (28)$$

si, además, A es constante:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (29)$$

luego:

$$y(x) = M \cdot x + N \quad (30)$$

con M , N constantes.

Considerando dos obstáculos ya rebasados, perpendiculares a la costa en $t = 0$ de longitudes y_1 e $y_2 < y_1$ en $x = 0$ y en $x = L$, respectivamente, la ecuación (30) será:

$$y = - \frac{y_1 - y_2}{L} x + y_1 \quad (31)$$

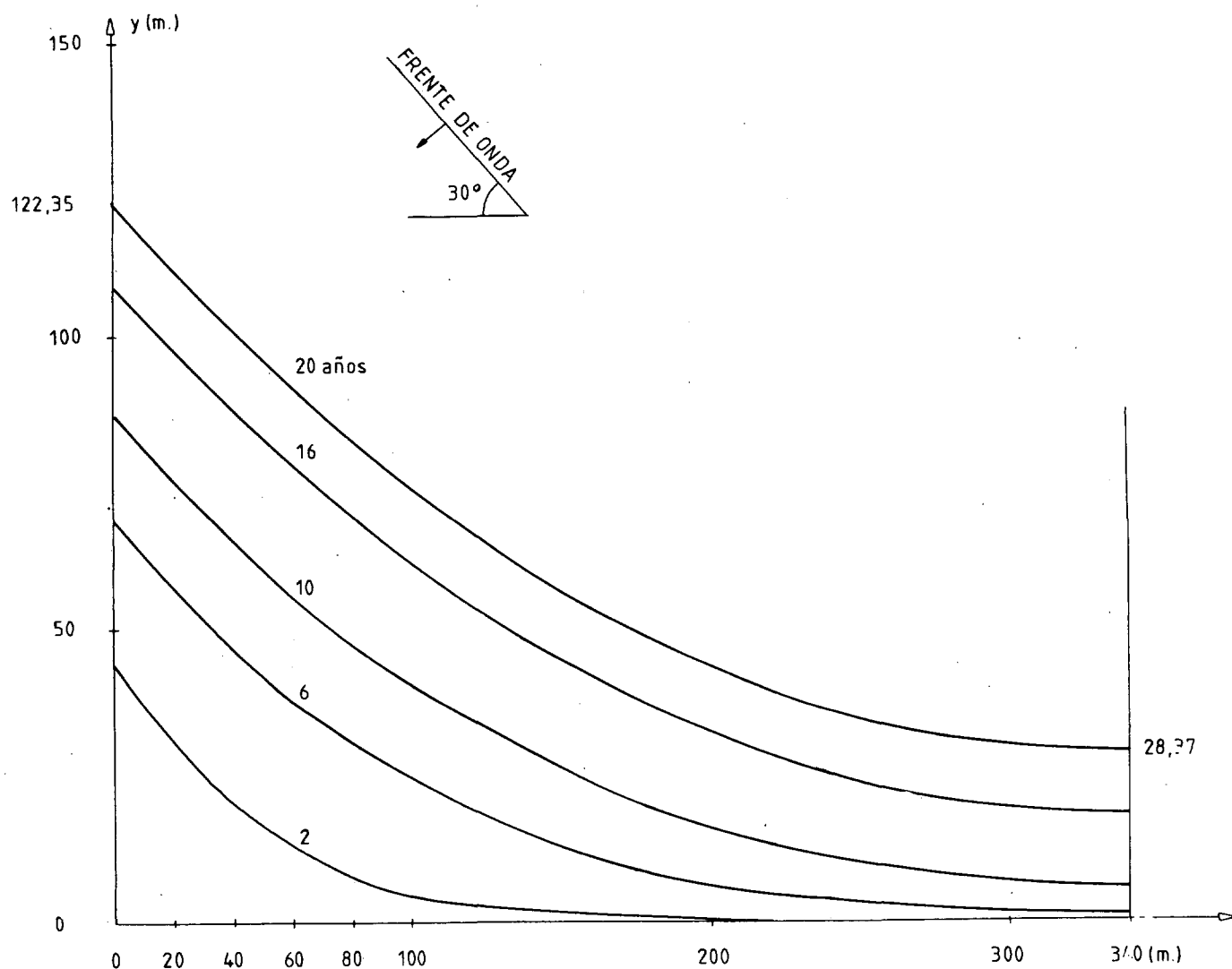


Figura 6. Solución numérica del problema [(1), (23)].

Si A viene dado por la ecuación (18), entonces sustituyendo en (28):

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} \right) \quad (32)$$

luego:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (33)$$

En la figura 7 se representan las soluciones de (29) y de (33) con $y(0) = y_1 = 100$ m.; $y(L) = y_2 = 20$ m.; $L = 340$ m.

5. DETERMINACION DE Q

Si tenemos en cuenta el "Shore Protection Manual" (S.P.M) (1975), se pueden relacionar empíricamente Q y el flujo de energía en dirección longitudinal P_1 , mediante la expresión:

$$Q = k.P_1 \quad (34)$$

siendo Q el transporte longitudinal en yardas (yd.) cúbicas por año y P_1 , en libras (lb.) por segundo, depende de la altura de ola, período, y orientación del oleaje en profundidades indefinidas así como del ángulo que forma el frente de onda en rotura con la costa.

Sin embargo, atendiendo a su significado físico, P_1 se suele expresar como una potencia por unidad de longitud de playa en ft.lb/(s.ft).

Con las unidades citadas, el S.P.M. da para la constante de proporcionalidad k el valor:

$$k = 7.500 \quad (35)$$

en yd.³ seg./lb.año).

Tomando 1 yd. = 0.9144 m., y 1 lb. = 4.44805 N., resulta:

$$Q = 7.500 \frac{0.76455}{4.44805} P_1 = 1289,14.P_1 \quad (36)$$

$$\text{siendo } P_1 = \frac{\rho g^2}{64 \pi} T. (H_o . K_r)^2 . \text{sen } 2 \alpha_b \quad (37)$$

y $k = 1289,14 \text{ m}^3 \text{ seg.}/(\text{N. año})$.

En las expresiones (36) y (37), tendremos:

Q = Transporte longitudinal (m³/año).

P_1 = Flujo de energía en dirección longitudinal (N/seg.) o (Wat./metro de playa).

g = Aceleración de la gravedad (m/s²).

T = Período (s).

H_o 3+ Altura de ola en profundidades indefinidas (m).

K_r = Coeficiente de refracción.

α_b = Angulo del frente de onda en rotura con la costa.

Le Mehaute y Koh [10] proporcionan una relación aproximada entre α_b y α :

$$\alpha_b = \alpha. (0.25 + 5.5 \frac{H_o}{L_o}) \quad (38)$$

en donde $L_o = gT^2/(2\pi)$ es la longitud de onda en profundidades indefinidas.

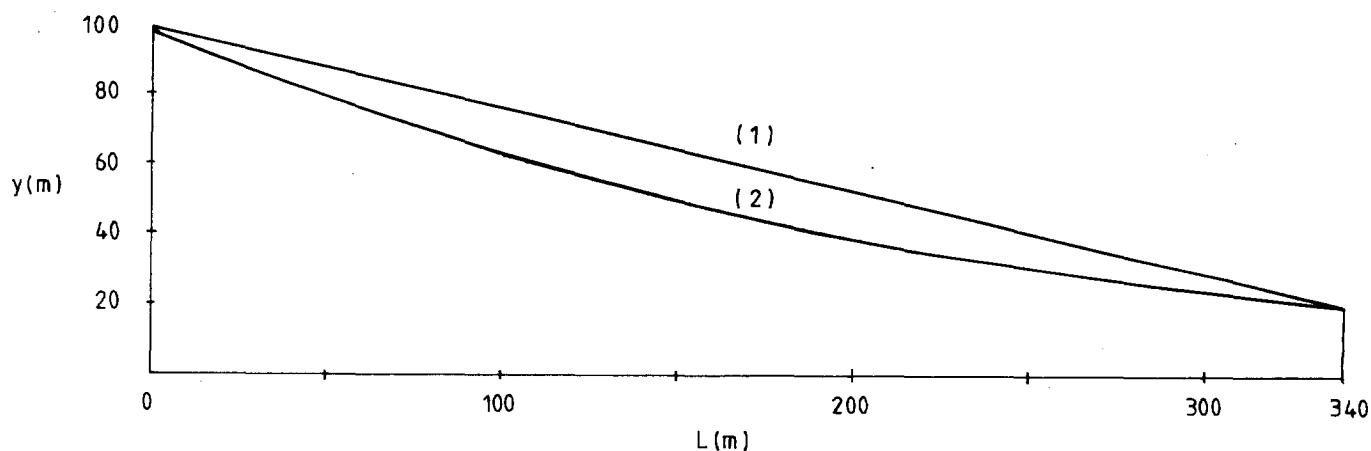


Figura 7. Régimen estacionario. (1) d constante; (2) $d = m_s y$.

Tomando para el coeficiente de refracción K_r la expresión:

$$K_r = (\cos \alpha / \cos \alpha_b)^{1/2} \quad (39)$$

tendremos:

$$Q = B \cdot \cos \alpha \cdot \sin \left[\alpha \left(0.25 + 5.5 \frac{H_0}{L_0} \right) \right] \quad (40)$$

en donde:

$$B = 2578.28 \frac{\rho g^2}{64 \pi} T \cdot H_0^2 \quad (41)$$

En aquellas zonas en las que los efectos de la difracción predominen sobre los de la refracción del oleaje, al ángulo α_b no puede expresarse mediante la ecuación (38), sustituyéndose además el coeficiente K_r por un coeficiente K_d siendo K_d el coeficiente de difracción.

6. CONCLUSIONES

A modo de resumen diremos que una playa varía su configuración longitudinal debido al transporte de arena de unos lugares a otros como consecuencia de unos agentes (corrientes, oleaje, mareas, etc.) cuya acción es variable en el tiempo y en el espacio. Ello implica, incluso en la ausencia de obstáculos, que las playas estén constantemente modificando su forma, tanto longitudinal como transversalmente.

En este trabajo, en el que sólo se considera acreción, se presentan soluciones tanto analíticas en la primera parte como numéricas en la segunda al problema planteado por la ecuación diferencial en derivadas parciales de tipo parabólico (1) con diversas condiciones de contorno.

Se hace especial hincapié en el caso de obstáculo rebasado para el que la solución numérica adimensional obtenida —curva (1) de la figura

5— a través de una ecuación diferencial ordinaria permite determinar la longitud de playa L_δ , medida sobre el eje Ox, cuyo perfil se ve modificado por la presencia del obstáculo (eje Oy), siendo dicha longitud proporcional a la raíz cuadrada del tiempo t. Teniendo en cuenta las definiciones de β y de c podemos obtener los distintos perfiles en instantes sucesivos, así como los valores de $L_\delta(t)$.

La introducción de profundidad variable a través de la ecuación (18) permite obtener soluciones teóricas para este supuesto.

Por otra parte, el análisis global (acreción/erosión a lo largo de la playa) del efecto que produce un obstáculo, requiere un tratamiento numérico similar al planteado en la sección 4.1 para la obtención de soluciones aproximadas con obstáculo no rebasado. Si el obstáculo se rebasa el análisis se complica al tener que evaluar la cantidad de arena que lo sobrepasa por su extremo a lo largo del tiempo. Este punto concreto lleva a Borah y Balloffet [8] a solicitar más investigación en las conclusiones de su trabajo.

Por todo ello, la representación completa de la realidad existente en el problema que nos ocupa se obtendrá mediante soluciones de tipo numérico que tengan en cuenta, además de las condiciones iniciales y de contorno, todos aquellos efectos que influyan en la determinación de Q.

REFERENCIAS

- [8] BORAH, D.K. y BALLOFFET, A.: "Beach evolution caused by littoral drift barrier", J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 111, Nº 4 (1985), pp. 645-660.
- [9] CORTELL, R.: "Aspectos básicos sobre la interferencia al transporte sólido litoral en zonas costeras (primera parte)", R.O.P., octubre 1990, pp. 51-54.
- [10] LE MEHAUTE, B. y KOH, R.: "On the breaking of waves arriving at an angle with the shoreline", J. of Hydraulic Research, Vol. 5, Nº 1 (1967), pp. 67-88.