

Algunas ideas sobre diseño y representación de curvas en el espacio

Jaime Puig-Pey y José Rodríguez

Doctores Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
Profesores de la ETS de Ingenieros de Caminos de Santander.

En este trabajo se introducen algunos conceptos y métodos básicos para representación gráfica y diseño geométrico por computador. En lo relativo a la representación gráfica, se realiza el estudio analítico del proceso para hacer proyecciones axonométricas ortogonales dando bien la dirección normal al plano de proyección o bien los ángulos entre los ejes coordenados proyectados, de modo que la proyección quede unívocamente definida. Asimismo se analiza el proceso de representación de algunos modelos de curvas de gran interés en diseño, mediante el aprovechamiento de sus propiedades proyectivas, lo que se traduce en mejorar la calidad del software para su representación. Se presenta en detalle la construcción de curvas en tres dimensiones empleando cúbicas de Bézier y splines cúbicos. Este trabajo puede ser de interés para quienes utilicen curvas en el espacio o en el plano como elementos de diseño empleando como datos de referencia polígonos de control o puntos de paso, y deseen considerar en el diseño un cierto grado de continuidad-suavidad en los elementos diseñados.

1. INTRODUCCION

El diseño de curvas en el espacio es una actividad presente en múltiples aspectos de la labor del ingeniero: carreteras, ferrocarriles, caminos para móviles guiados, directrices y bordes de superficies de cubrimiento, etc.

El desarrollo de los gráficos por computador, al permitir la visualización con realismo de un diseño nada más concebirlo, sin necesidad de construirlo físicamente, hace que el diseñador pueda incrementar la calidad y el ritmo de su producción, así como su propia satisfacción en el trabajo al liberarle de engorros intermedios.

Por otro lado, la propia capacidad del computador para ejecutar procesos algorítmicos a gran velocidad, ha permitido para representar las curvas el empleo de modelos matemáticos que, aunque más sofisticados, son sencillos en sus fundamentos, flexibles y admiten interpretaciones geométricas claras.

En este trabajo se pretende ofrecer una aproximación a estas temáticas, por un lado a un aspecto concreto de medios de representación y por otro al de elementos a utilizar en el diseño.

En primer lugar se estudia analíticamente el proceso para realizar la proyección axonométrica ortogonal de puntos en el espacio, bien dando la dirección normal al plano de proyección, lo cual es más directo desde el punto de vista del cálculo analítico, o bien dando los ángulos entre los ejes coordenados proyectados. Este último es el modo típico de dibujo en Geometría Descriptiva clásica, pero exige un estudio serio de casos posibles cuando se plantea analíticamente.

A continuación se comenta el proceso de representación de curvas en el espacio en forma paramétrica, y se analizan ciertas simplificaciones en los algoritmos de

representación gráfica cuando los puntos de las curvas se pueden escribir como combinación lineal de ciertos vectores, debido a la estructura matricial del operador de proyección utilizado.

Luego se presentan dos modelos de curvas polinómicas a trozos muy populares: las cúbicas de Bézier y los splines cúbicos. Ambos responden al modelo analítico antes citado. No obstante presentan diferencias notables, como son el carácter no interpolatorio del modelo de Bézier, que se ajusta al llamado polígono de control; mientras que en el segundo sí se interpolan todos los puntos dato. Por otro lado las curvas compuestas de Bézier son de naturaleza local, es decir, cambios locales no cambian toda la curva; a diferencia de lo que les pasa a los splines cúbicos, en los que se produce un cambio global en todo el desarrollo de la curva. Se hace una revisión detallada de su proceso constructivo, a fin de hacer el trabajo autocontenido y facilitar al lector inquieto la construcción de su propio programa en el computador.

2. PROYECCION AXONOMETRICA ORTOGONAL

Sea el punto r de coordenadas (x,y,z) en el espacio XYZ tridimensional. Se desea obtener las coordenadas (x^*,y^*) de la proyección r^* del punto r sobre un plano sobre el que se quiere hacer un dibujo 2D de la escena a que pertenece r . Este proceso se puede realizar muy fácilmente (véase Faux&Pratt⁷, Foley&VanDam⁸, Rogers&Adams²) para diversos tipos de proyecciones paralelas y puntuales.

En el caso de proyección axonométrica ortogonal, que es una proyección paralela sobre un plano arbitrario dado como plano de dibujo, se puede hacer mediante una

transformación matricial

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

en que el plano de dibujo está dado por su vector normal unitario u ; u_1 y u_2 son los vectores unitarios que representan los ejes coordenados OX^* y OY^* en el plano de dibujo. Tanto u como u_1 y u_2 son vectores columna de tres coordenadas dadas en el sistema del espacio XYZ y deben verificar $u = u_1 \wedge u_2$ ($\wedge$ significa producto vectorial). Obsérvese que al ser la proyección paralela, la forma de la proyección sobre dos planos de dibujo paralelos es la misma, y por ello sólo importa la dirección normal.

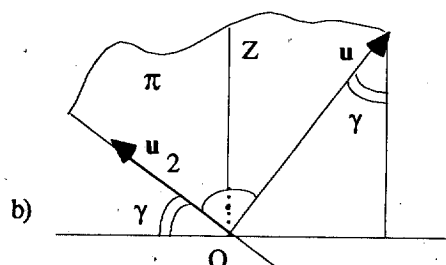
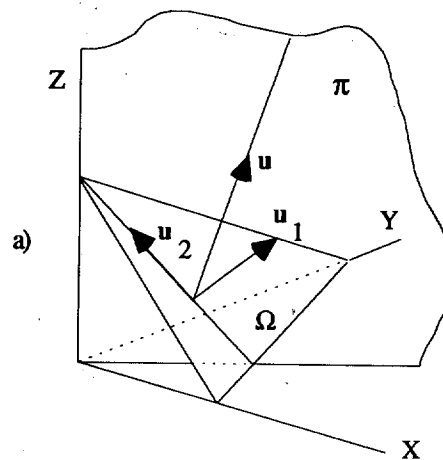
El punto proyectado r^* viene definido por sus coordenadas x^* e y^* , ya referidas al plano del dibujo, esto es, a los ejes u_1 y u_2 . El escalar z^* anterior tiene el especial significado de representar la distancia (con signo) desde el punto r en el espacio a su proyección r^* en el plano del dibujo, de modo que es positivo o negativo según $r - r^*$ tenga el mismo sentido o lo tenga opuesto al de u .

A efectos de dibujo, sólo se necesitan las coordenadas x^* e y^* , por lo que bastan las dos primeras filas de la igualdad matricial anterior, y la relación entre el punto r en el espacio y el punto r^* en el plano del dibujo se sintetiza con la ecuación vectorial: $r^* = P^* \cdot r$, siendo P^* una matriz (2x3) cuya primera fila es el vector fila u_1^T y la segunda el u_2^T antes definidos.

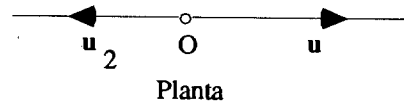
Desde un punto de vista práctico cara a programar la transformación anterior, lo más frecuente es dar como dato el vector u , normal al plano de proyección. Pero también puede tener interés definir el plano de proyección para dibujo dando los ángulos entre los ejes en la proyección axonométrica, para aquellos usuarios que tengan menos hábito de manejar vectores en el espacio. Ahora comentaremos las dos situaciones.

2.1. Definición mediante vector de proyección

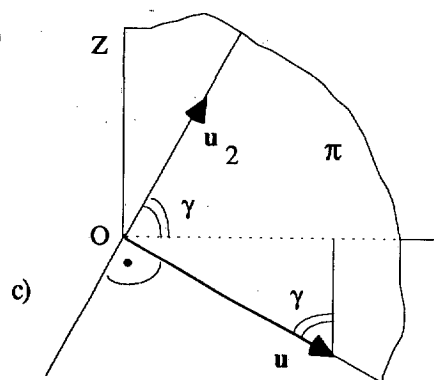
Dado el vector u , de modo que apunta hacia el observador, se plantea cómo construir los versores u_1 y u_2 de los ejes coordenados en el dibujo, con algún criterio razonable, y recordando que para u_1 y u_2 hacen falta sus 3 coordenadas en el espacio XYZ. Téngase en cuenta que para utilizar la expresión matricial dada para la



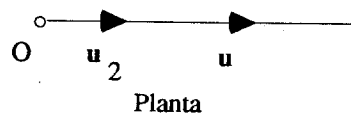
Perfil (verdadera magnitud)



Planta



Perfil (verdadera magnitud)



Planta

Fig. 1

proyección, hay que normalizar los vectores, aunque para los razonamientos que siguen no es necesario.

El criterio consiste en ver siempre vertical ascendente en el dibujo el eje OZ, y asimismo que la dirección de u_2 sea siempre vertical ascendente en el dibujo. Sólo hay un caso singular, cuando el plano de proyección coincide con el OXY, pues entonces la proyección de OZ es un punto.

Lo anterior obliga a que el vector u_2 se elija con la dirección de una recta intersección de dos planos del espacio XYZ: un plano vertical π (paralelo a OZ), que contenga a la dirección del vector u y el propio plano de proyección Ω definido por u (Fig 1.a).

El análisis de los planos de perfil que contienen a OZ y a la dirección u , y la observación de las plantas anteriores lleva a que u_2 se tome atendiendo a las siguientes expresiones:

Si $u_z > 0$: $u_{2x} = -u_x$; $u_{2y} = -u_y$ (Fig. 1b)

Si $u_z < 0$: $u_{2x} = u_x$; $u_{2y} = u_y$ (Fig. 1c)

Puesto que $\tan \gamma = \frac{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}{u_z}$, y $u_{2z} > 0$,

$$\text{entonces } u_{2z} = \frac{u_x^2 + u_y^2}{|u_z|}$$

Casos límites:

Si $u_z = 0$: $u_{2x} = u_{2y} = 0$; $u_{2z} = 1$.

Si $u_x = u_y = 0$: $u_{2x} = u_{2z} = 0$; $u_{2y} = u_z$.

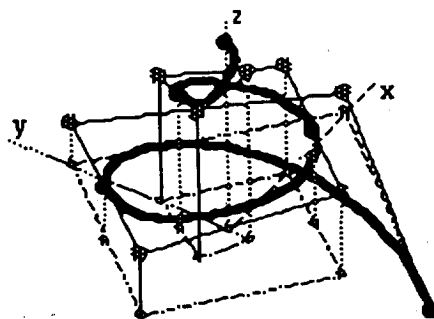
Por otro lado, se toma $u_1 = u_2 \wedge u$. Así está totalmente definida la proyección axonométrica ortogonal.

Como caso particular, la obtención de proyecciones sobre los planos coordenados se reduce a elegir como vectores u de proyección: (1,0,0) para YOZ; (0,1,0) para XOZ, y (0,0,1) para XOY (ver Fig. 2).

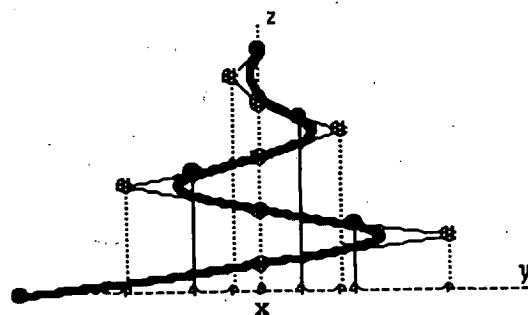
2.2. Definición mediante ángulos entre ejes

En los sistemas de axonometría ortogonal usualmente se adopta como plano del dibujo un plano arbitrario que, si no pasa por el origen, cortará a los ejes Ox, Oy, Oz del triedro de referencia en sendos puntos M, N y P, vértices del denominado triángulo de las trazas (Fig. 3a).

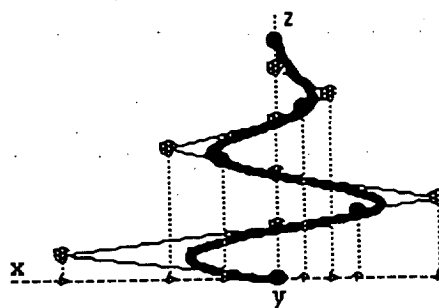
Como la proyección sobre el plano del dibujo es ortogonal, cada una de las trazas es normal a la proyección del eje perpendicular. Así, la traza MN del plano Oxy es ortogonal a la proyección O'z' del eje Oz, la traza MP es perpendicular a la proyección O'y', etc., con lo cual las proyecciones de los ejes son las alturas del triángulo de las trazas y, en consecuencia, los ángulos entre los ejes proyectados son suplementarios de los ángulos del citado



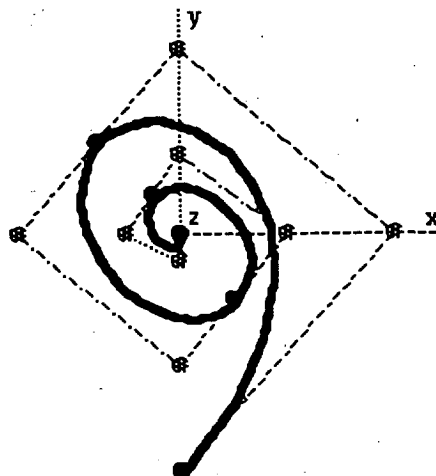
a) Curva en el espacio



b) Proyección YOZ



c) Proyección XOZ



d) Proyección XOY

Fig. 2

triángulo, es decir,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x' \hat{O'} y' = 180^\circ - \hat{P} \\ \beta &= z' \hat{O'} x' = 180^\circ - \hat{N} \\ \gamma &= y' \hat{O'} z' = 180^\circ - \hat{M} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

como se muestra en la Fig. 3b.

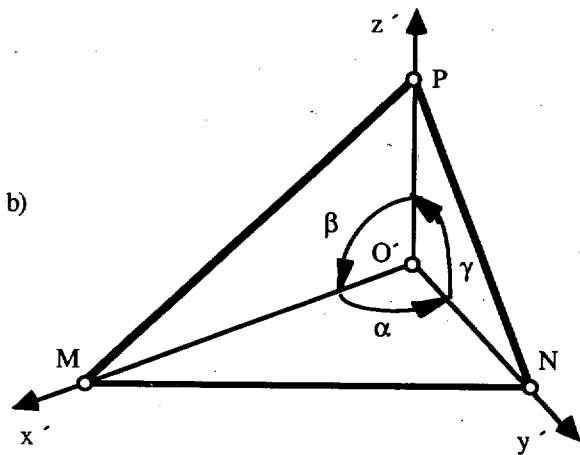
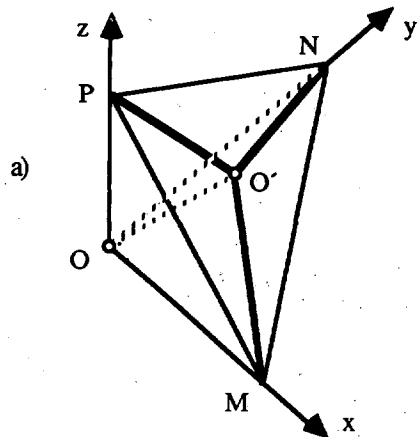


Fig. 3

Si $u(A, B, C)$ es un vector normal al plano de proyección y, por tanto, paralelo al OO' , los vectores directores de las trazas serán:

$$\left. \begin{aligned} MN: (A, B, C) \wedge (0, 0, 1) &= (B, -A, 0) \\ PM: (A, B, C) \wedge (0, 1, 0) &= (-C, 0, A) \\ NP: (A, B, C) \wedge (1, 0, 0) &= (0, C, -B) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

con lo cual, denotando $\circ$ el producto escalar, resulta

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \cos^2 \hat{P} = \left(\frac{PM \circ PN}{|PM| \cdot |PN|} \right)^2 \\ &= \frac{A^2 \cdot B^2}{(A^2 + C^2) \cdot (B^2 + C^2)} \\ \cos^2 \beta &= \cos^2 \hat{N} = \left(\frac{NM \circ NP}{|NM| \cdot |NP|} \right)^2 \\ &= \frac{A^2 \cdot C^2}{(A^2 + B^2) \cdot (B^2 + C^2)} \\ \cos^2 \gamma &= \cos^2 \hat{M} = \frac{B^2 \cdot C^2}{(A^2 + B^2) \cdot (A^2 + C^2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{C^2}{A^2 \cdot B^2} \cdot (A^2 + B^2 + C^2) \\ \operatorname{tg}^2 \beta &= \frac{B^2}{A^2 \cdot C^2} \cdot (A^2 + B^2 + C^2) \\ \operatorname{tg}^2 \gamma &= \frac{A^2}{B^2 \cdot C^2} \cdot (A^2 + B^2 + C^2) \end{aligned} \right. \text{ de donde}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \gamma} &= \frac{C^2}{A^2} \\ \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \gamma} &= \frac{B^2}{A^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

De esta forma, conocidos dos de los ángulos formados por los ejes proyectados, β y γ por ejemplo, puesto que $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 (\beta + \gamma)$, para obtener un vector u ortogonal al plano de proyección bastará fijar una componente, por ej. $A = 1$, quedando las restantes

$$B = \sqrt{\left| \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \gamma} \right|} \quad y \quad C = \sqrt{\left| \frac{\operatorname{tg}^2 (\beta + \gamma)}{\operatorname{tg}^2 \gamma} \right|} \quad (5)$$

Habría que analizar ahora las distintas combinaciones de signos de dichas componentes A , B y C según los valores posibles de β y γ , los cuales dependerán de que el vector ortogonal al plano de proyección sea paralelo al que partiendo del origen se dirige a un punto arbitrario de cada uno de los ocho octantes en que los planos coordenados dividen el espacio (Fig. 4).

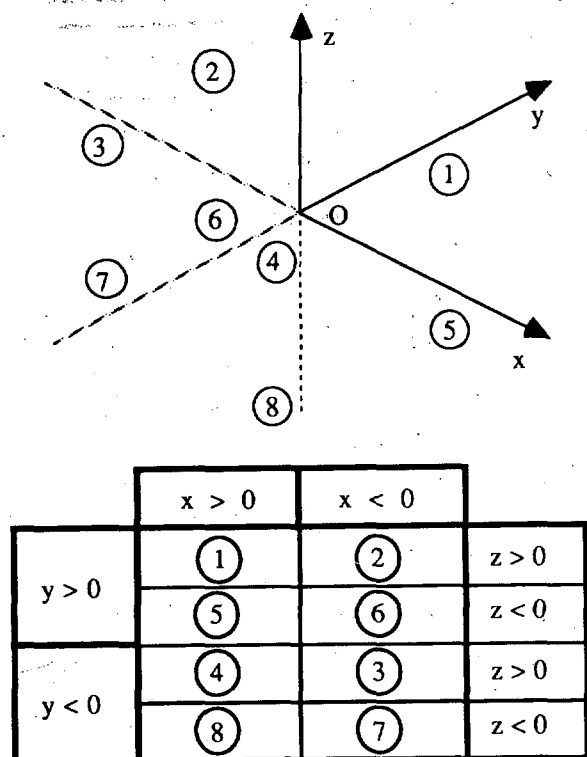


Fig. 4

Considerando que la proyección del eje Oz sobre el plano del dibujo es siempre vertical ascendente, las distintas posiciones de los ejes proyectados desde los diversos octantes se reflejan en la Fig. 5, permitiendo establecer el conjunto de posibilidades reflejado en la Tabla 1.

El análisis conjunto de la Fig. 5 y la Tabla 1 conducen, de una parte a que la suma de los valores absolutos de β y γ ha de estar comprendida entre 90 y 270

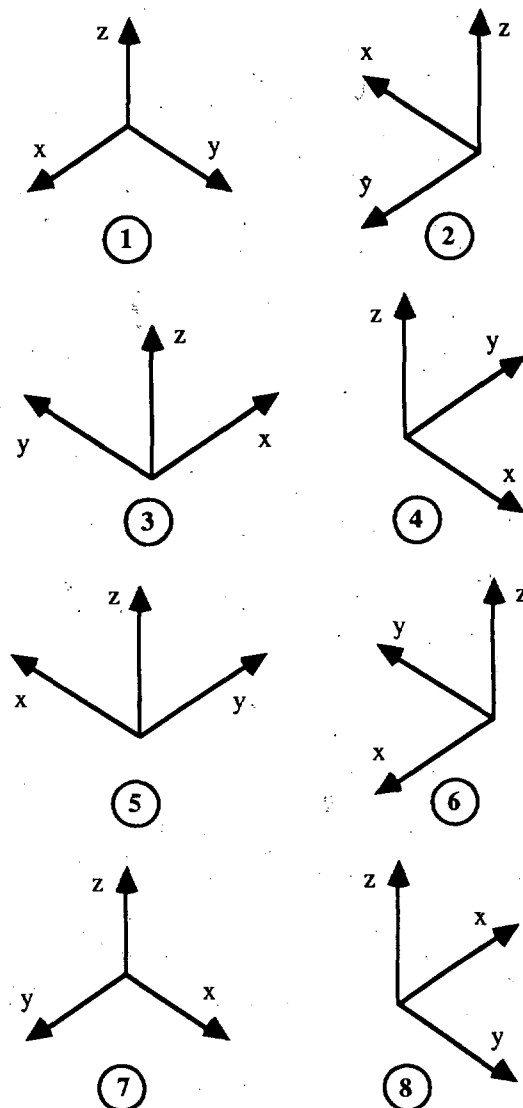


Fig. 5

	$-180^\circ < \gamma < -90^\circ$	$-90^\circ < \gamma < 0^\circ$	$0^\circ < \gamma < 90^\circ$	$90^\circ < \gamma < 180^\circ$
$-180^\circ < \beta < -90^\circ$	$A < 0$ $B < 0$ ⑦ $C < 0$	IMPOSIBLE	$A > 0$ $B < 0$ ④ $C > 0$	IMPOSIBLE
$-90^\circ < \beta < 0^\circ$	IMPOSIBLE	$A < 0$ $B < 0$ ③ $C > 0$	IMPOSIBLE	$A > 0$ $B < 0$ ⑧ $C < 0$
$0^\circ < \beta < 90^\circ$	$A < 0$ $B > 0$ ② $C > 0$	IMPOSIBLE	$A > 0$ $B > 0$ ⑤ $C < 0$	IMPOSIBLE
$90^\circ < \beta < 180^\circ$	IMPOSIBLE	$A < 0$ $B > 0$ ⑥ $C < 0$	IMPOSIBLE	$A > 0$ $B > 0$ ① $C > 0$

Tabla 1

grados sexagesimales, y de otra a que si esos ángulos tienen el mismo signo, supuestos positivos en sentido antihorario, han de ser ambos agudos o ambos obtusos, mientras que si son de distinto signo deberá ser uno agudo y el otro obtuso.

Hasta aquí se ha estudiado el caso mas general. Restan por ver aquellas opciones extremas en que el plano del dibujo es paralelo a uno de los planos coordenados o paralelo a uno de los ejes coordenados. En el primer caso, el eje ortogonal al plano del dibujo se proyecta sobre el origen y los otros dos quedan perpendiculares, con lo que uno de los ángulos dato entre ejes proyectados se considerará nulo y el otro de valor absoluto 90° . En la segunda opción, los ejes del plano coordenado perpendicular al del dibujo se proyectan opuestos y en prolongación, y el tercero ortogonal a ellos, por lo que dos de los ángulos de la terna (α, β, γ) tendrán un valor absoluto de 90° y el restante de 180° . Como consecuencia de ello, la dirección de proyección o vector perpendicular al plano del dibujo no queda unívocamente definido, aunque sí será nula la componente del eje al que es ortogonal, pudiéndose tomar las otras dos con un valor convenido, por ejemplo, ser iguales.

3. CURVAS EN EL ESPACIO

3.1. Definición paramétrica y representación gráfica

La representación paramétrica $r = r(u)$ es usada muy frecuentemente para definir curvas mediante computador. $r(u)$ es un vector de tres componentes en el espacio, de modo que cada una de ellas, $r_x(u)$, $r_y(u)$, $r_z(u)$ es una función escalar de u . Además, la curva suele tener una estructura compuesta de trozos simples (segmentos, tramos, spans), cada uno con una representación analítica particular que, aunque responde a la estructura global de toda la curva en su conjunto, tiene sus parámetros propios.

Los modelos de curvas presentadas en este trabajo, y otros también usados en la práctica, responden en cada uno de sus segmentos a la siguiente estructura:

$$r(u) = v_1 \cdot f_1(u) + v_2 \cdot f_2(u) + \left. \begin{aligned} &+ v_3 \cdot f_3(u) + v_4 \cdot f_4(u) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

dada por una combinación lineal de cierta información vectorial contenida en los vectores v_i constantes, siendo las funciones f_i de naturaleza escalar. En la literatura, estas funciones escalares son llamadas a veces funciones mezcladoras (blending functions) por su papel combinando o mezclando los vectores v_i .

El proceso general para realizar la generación y representación de una curva compuesta, que no tenga

necesariamente la estructura anterior, podría ser:

Proceso a)

Desde primer segmento a último Hacer

Desde primer punto en segmento a último Hacer

Inicio

Generar el punto r en el espacio 3D

Generar el punto proyectado r^* en el dibujo

$$2D(r^* = P^* \cdot r)$$

Representar punto proyectado sobre el dibujo

Fin

Por otro lado, la linealidad de la formula (6) permite agilizar la representación, para la que bastan las coordenadas de las proyecciones de los puntos del espacio sobre el plano de dibujo. Teniendo en cuenta que la relación entre un punto r (3D) y su proyección r^* (2D en el dibujo) es: $r^* = P^* \cdot r$, se puede escribir, para los puntos de cada segmento:

$$\left. \begin{aligned} r(u) &= P^* \cdot r(u) = \\ &= (P^* \cdot v_1) \cdot f_1(u) + (P^* \cdot v_2) \cdot f_2(u) + \\ &+ (P^* \cdot v_3) \cdot f_3(u) + (P^* \cdot v_4) \cdot f_4(u) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

La estructura algebraico-geométrica de las curvas no varía en la proyección, en el sentido de poder expresarse la curva proyectada como combinación lineal de los vectores proyecciones de los v_i con las mismas funciones de mezcla.

De este modo, operando previamente con P^* los vectores v_i , el algoritmo para la representación gráfica 2D se puede expresar:

Proceso b):

Desde primer segmento a último Hacer

Inicio

Proyectar mediante la matriz P^* los vectores v_i

Desde 1er punto en segmento a último Hacer

Inicio

Generar punto proyectado en el dibujo 2D

Representar punto proyectado

Fin

Fin

Un sencillo conteo de operaciones nos permitirá comparar estos dos procesos. Para realizar la proyección de un punto, $r^* = P^* \cdot r$, son necesarios 6 productos y 4 sumas.

Se supondrá que se tiene una curva compuesta con ns segmentos. En cada segmento se supone que hay np

vectores v_i . La curva se evalúa en nps puntos por segmento.

Evaluemos el número de operaciones para el proceso a):

Por cada punto proyectado: i) Evaluación de cada r : $3 \cdot np$ productos, $3 \cdot (np-1)$ sumas y np evaluaciones de f_i ;

ii) Proyección para obtener r^* : 6 productos y 4 sumas; Total por punto: $3 \cdot np + 6$ productos, $3 \cdot np + 1$ sumas, np evaluaciones de f_i . En total: $ns \cdot nps$ veces más.

Por ejemplo para un caso de $ns = 10$, $np = 4$ y $nps = 10$ resultan 1800 productos, 1300 sumas y 400 evaluaciones de f_i .

Efectuemos ahora el conteo para el proceso b):

En cada segmento, para proyectar np vectores base v_i por segmento: $6 \cdot np$ productos y $4 \cdot np$ sumas. Para evaluar cada punto proyectado: $2 \cdot np$ productos, $2 \cdot (np-1)$ sumas y np evaluaciones de f_i . En cada segmento nps veces más.

Resumiendo, en total: $ns \cdot (6 \cdot np + nps \cdot 2 \cdot np)$ productos, $ns \cdot (4 \cdot np + nps \cdot (2 \cdot np - 2))$ sumas y $ns \cdot nps \cdot np$ evaluaciones de f_i .

Por ejemplo para un caso de $ns = 10$, $np = 4$ y $nps = 10$ resultan 1040 productos, 760 sumas y 400 evaluaciones de f_i .

La mayor eficiencia computacional del proceso b) es clara para el caso particular expuesto. Esta situación se da en la práctica, por ejemplo con funciones cúbicas a trozos como se presentan en este trabajo. Asimismo el número de 10 puntos a calcular por segmento para dibujarlo, está dentro de lo mínimo necesario. Por otro lado, incrementar el número de segmentos ns , acentúa la ventaja del proceso b).

La ventaja del proceso b) está, en resumen, en la necesidad de calcular los puntos de la curva en el espacio para hacer la representación en el dibujo. No obstante, en la fase final de diseño, en que hay que dar expresamente los puntos de la curva en 3D pues serán necesarios para su construcción o para otros tipos de análisis, hay que proceder inevitablemente a su cálculo.

3.2. Cúbicas de Bezier compuestas

Estas curvas responden, en cada uno de sus tramos o segmentos, a la estructura siguiente:

$$r(u) = v_0 \cdot (1-u)^3 + v_1 \cdot 3u \cdot (1-u)^2 + v_2 \cdot 3u^2 \cdot (1-u) + v_3 \cdot u^3, \quad u \in [0, 1] \quad (8)$$

Son un caso particular del más general:

$$r(u) = \sum_{i=0}^d v_i \cdot f_{i,d}(u), \quad u \in [0, 1] \quad (9)$$

$$f_{i,d}(u) = \binom{d}{i} \cdot u^i \cdot (1-u)^{d-i}$$

donde $f_{i,d}$ son los denominados polinomios de Bernstein. Verifican que para cualquier u , su suma para un d fijado y variando i de 0 a d , vale la unidad, pues responden a los términos del desarrollo de Newton de la potencia d -ésima del binomio $((1-u)+(u))$. Estos modelos fueron empleados por Pierre E. Bezier⁵ y Paul de Casteljaou⁶ independientemente en las industrias Renault y Citroën.

Para un tramo de curva con la ecuación (8) se verifica:

$$\left. \begin{aligned} r(0) &= v_0, \quad \left(\frac{dr}{du} \right)_{u=0} = 3 \cdot (v_1 - v_0) \\ r(1) &= v_3, \quad \left(\frac{dr}{du} \right)_{u=1} = 3 \cdot (v_3 - v_2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

El polígono determinado por los 4 puntos v_0, v_1, v_2, v_3 , llamados vértices de control, se denomina polígono de control, por su incidencia en la forma del segmento de curva a que se refiere. Por un lado, marca los puntos y tangencias de arranque y finales. Además, cualquier punto del segmento se puede poner como combinación lineal convexa de los vértices de control, por la propiedad antes citada de los polinomios de Bernstein. Por ello, todo el segmento está contenido en el tetraedro de vértices los v_i para el caso 3D, o bien en el recinto encerrado por el cuadrilátero definido por los cuatro v_i , en el caso bidimensional. Esta es la propiedad llamada de envoltura convexa (convex hull) para el segmento de curva de Bézier.

Desde el punto de vista de uso de estas curvas en diseño, interesa definir curvas compuestas de varios segmentos, lo que se puede hacer definiendo polígonos de control consecutivamente dispuestos conforme a la geometría que se quiere diseñar. Se puede obtener continuidad de tangente en la curva diseñada con cúbicas de Bézier si se elige el primer lado de cada polígono de control en prolongación del último lado del polígono de control anterior (Fig. 6).

Se pueden conseguir mayores órdenes de continuidad entre segmentos, elevando el grado de los polinomios básicos, imponiendo restricciones adicionales a los vértices de control^{9,7}. Aquí nos restringimos a la continuidad de la recta tangente entre segmentos.

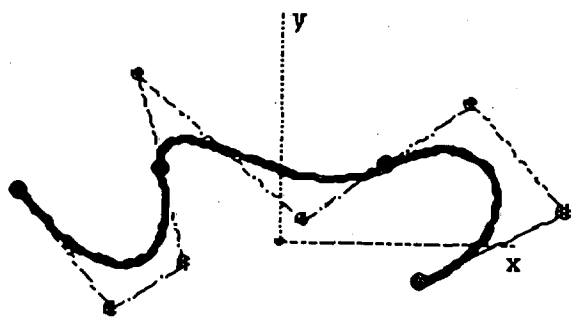


Fig. 6

La construcción de curvas compuestas cúbicas de Bézier se realiza dando vértices de control que configuran los sucesivos segmentos. Se dan los 4 vértices del primer segmento. Para cada segmento restante se dan tres vértices, que añadidos al último vértice del segmento anterior definen el segmento considerado y de este modo se garantiza la continuidad simple entre segmentos. Para garantizar la continuidad de tangente entre segmentos hay que dar los vértices, como ya se ha dicho, de modo que el último lado de cada polígono y primero del siguiente estén en prolongación.

Se puede facilitar la tarea de elegir el polígono de control, y más en el caso de diseño de curvas en el espacio 3D, mediante el siguiente proceso (ver Fig. 7).

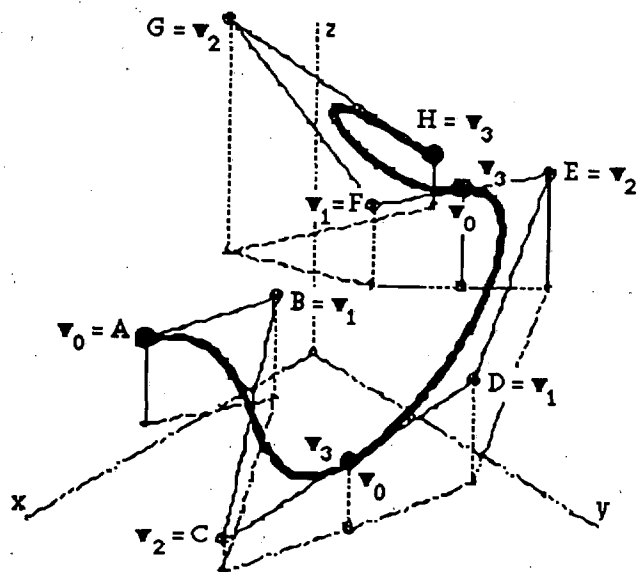


Fig. 7

Se elige el vértice de arranque A del primer segmento. Luego otros dos vértices B y C. Y se da otro punto D que ya va a ser el segundo vértice del segundo segmento. El último vértice del primer segmento, que es a la vez el primero del segundo, se elige en un punto intermedio del segmento rectilíneo CD. El diseño se prosigue dando el

tercer vértice, punto E del segundo segmento, y otro vértice más F que será el segundo del siguiente segmento, cuyo primer vértice estará en el segmento rectilíneo EF. Y así se prosigue hasta acabar el diseño. En el último segmento se da expresamente el cuarto vértice que es el punto final de la curva compuesta. Los puntos datos son entonces los A, B, C, D, E, F, G, H. Los vértices del polígono son, junto a los puntos anteriores, el punto intermedio del segmento rectilíneo CD y el del EF. Estos dos puntos son puntos de paso de la curva, además del vértice inicial A y el final H. No son de paso los demás vértices. Para una mayor claridad, en la Fig. 7 se representa, además de la curva en el espacio y su polígono de control, la proyección de éste sobre el plano XOY.

Obsérvese el carácter local del diseño, es decir, que si se cambia un vértice de control dato no se modifica toda la curva, sino solamente el segmento que contiene al vértice modificado y el segmento contiguo al afectado que más cerca esté del vértice cambiado.

Nótese también que el número de puntos que se deben dar como datos ha de ser par, y hay que dar seis como mínimo, en cuyo caso se tienen dos segmentos. El número de segmentos resulta, con este esquema, igual a: $(n^\circ \text{ de puntos dato}/2) - 1$. En este modelo de definición de cúbicas de Bézier compuestas, queda como un grado de libertad la ubicación del punto de empalme entre los segmentos de curva, que debe darse sobre el segmento rectilíneo que contiene los dos lados del polígono de control alineados entre segmentos y que precisamente compartan dicho punto como vértice. En la Fig. 7 se ha elegido sobre el punto medio de dicho segmento rectilíneo.

Para hacer la representación gráfica, hay que calcular en cada segmento:

$$r^*(u) = \left(P^* \cdot v_0 \right) \cdot (1-u)^3 + \left(P^* \cdot v_1 \right) \cdot 3u \cdot (1-u)^2 + \left(P^* \cdot v_2 \right) \cdot 3u^2 \cdot (1-u) + \left(P^* \cdot v_3 \right) \cdot u^3, \quad u \in [0, 1] \quad (11)$$

es decir, conviene realizar sobre los puntos dato el proceso b) de proyección explicado en 3.1 como paso previo a la representación de la curva.

Para realizar la evaluación de puntos en un segmento simple de curva de Bézier con $n+1$ vértices de control v_i resulta muy útil el algoritmo de P. de Casteljaú^{3,6}. El algoritmo se expresa como sigue:

$$\left. \begin{aligned} v_i^j(u) &= v_i^{j-1}(u) \cdot (1-u) + v_{i+1}^{j-1}(u) \cdot u \\ \{j &= 1, \dots, n; i = 0, \dots, n-j\} \\ v_i^0(u) &= v_i; \quad v_0^n = r(u) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Para el caso de un segmento cúbico de Bézier obsérvese el siguiente esquema triangular:

$$\begin{array}{cccc} v_0 & v_0^1 & v_0^2 & v_0^3 \equiv r(u) \\ v_1 & v_1^1 & v_1^2 & \\ v_2 & v_2^1 & & \\ v_3 & & & \end{array}$$

3.3. Splines cúbicos

El proceso de diseño con las curvas de Bézier utiliza el polígono de control como referencia para señalar el aspecto general de la curva diseñada, marcando algunos puntos de paso y direcciones tangentes. No se trata de una técnica de interpolación clásica, esto es, la curva diseñada no pasa por todos los puntos dados como vértices de control. Cuando se desea diseñar una curva de formas suaves que pase por todos los puntos que son datos, una alternativa interesante y relativamente sencilla es emplear otra familia de funciones polinómicas cúbicas a trozos. Se trata de los splines cúbicos.

En lo que sigue se presenta la generación de dichas curvas en 3D mediante una representación paramétrica en que cada componente del vector de posición de sus puntos es una función polinómica cúbica del parámetro u de la curva. Este proceso, abundantemente repetido en la literatura^{2,10}, se presenta aquí con cierto detalle para hacer este trabajo más autocontenido.

Para el segmento k -ésimo, cualquier cúbica en paramétricas se plantea:

$$r_k(u) = \sum_{j=1}^4 b_{kj} u^{j-1} = (b_{k1} \ b_{k2} \ b_{k3} \ b_{k4}) \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} u \in [0, u_{k+1}] \\ (3 \times 1) \quad (3 \times 4) \quad (4 \times 1) \end{array} \right\} \quad (13)$$

La curva resulta de la concatenación de $n-1$ segmentos, cada uno con la ecuación anterior variando $k=1, \dots, n-1$ (Fig. 8). Para el segmento $r_k(u)$ se considerará en principio u variando entre 0 y u_{k+1} . Los vectores b_{ki} son vectores paramétricos de tres componentes, a determinar mediante condiciones adicionales. La anterior representación se suele denominar representación algebraica de la curva.

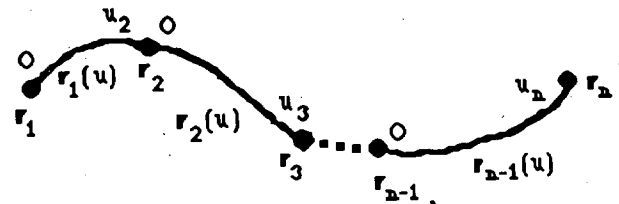


Fig. 8

Es sencillo pasar a la representación llamada geométrica, implicando a elementos con una interpretación geométrica clara, como son los puntos inicial y final del segmento k , r_k y r_{k+1} y unos vectores tangentes en ellos, r'_k y r'_{k+1} . Basta desarrollar las cuatro igualdades vectoriales:

$$\left. \begin{array}{l} r_k(0) = r_k, \quad \left(\frac{dr_k(u)}{du} \right)_{u=0} = r'_k \\ r_k(u_{k+1}) = r_{k+1}, \quad \left(\frac{dr_k(u)}{du} \right)_{u=u_{k+1}} = r'_{k+1} \end{array} \right\}$$

que agrupadas conducen a la expresión matricial:

$$(b_{k1} \ b_{k2} \ b_{k3} \ b_{k4}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_{k+1} & 1 & 1 \\ 0 & u_{k+1}^2 & 0 & 2u_{k+1} \\ 0 & u_{k+1}^3 & 0 & 3u_{k+1}^2 \end{pmatrix} = (r_k \ r_{k+1} \ r'_k \ r'_{k+1}), \text{ es decir,}$$

$$B_k \cdot M_k = G_k \quad (14)$$

(3x4) (4x4) (3x4)

De este modo, la representación geométrica queda:

$$\left. \begin{array}{l} r_k(u) = G_k \cdot M_k^{-1} \cdot U = \\ = (r_k \ r_{k+1} \ r'_k \ r'_{k+1}) \cdot M_k^{-1} \cdot (1 \ u \ u^2 \ u^3)^T \end{array} \right\} \quad (15)$$

Lo anterior tiene validez para cualquier curva polinómica cúbica a trozos, en la que se especifiquen puntos de paso y direcciones tangentes en ellos.

Los splines cúbicos resultan como un caso particular de este planteamiento. En ellos, las direcciones tangentes en los puntos de contacto entre segmentos se deducen imponiendo las condiciones adicionales de que entre los

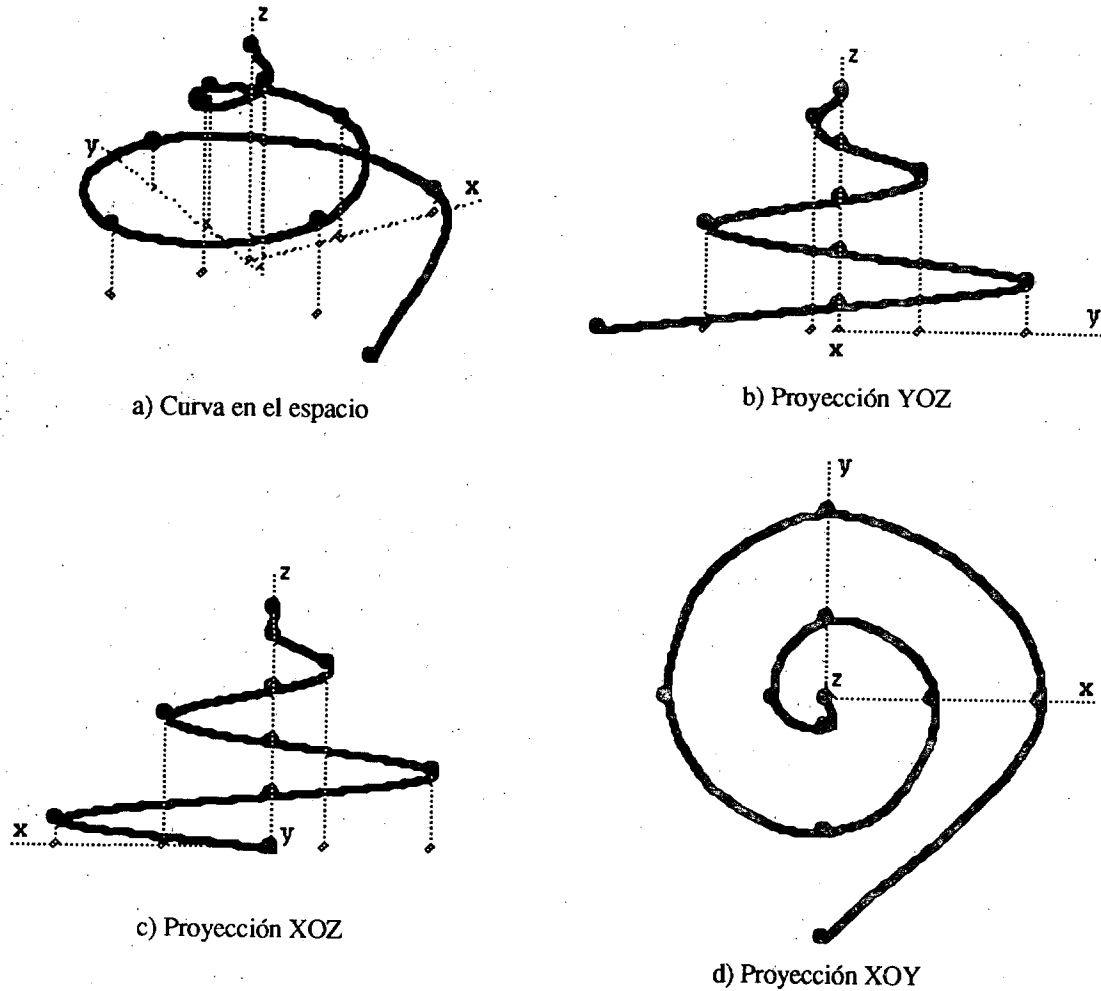


Fig. 9

segmentos el vector derivada segunda $r''(u)$ es continuo. De este modo, no hay que dar vectores tangentes entre segmentos como datos externos, sino que se deducen automáticamente dados los puntos de paso r_j .

Un ejemplo de spline paramétrico cúbico espacial se muestra en la Fig. 9, en la que la curva interpola los vértices de control de la cúbica de Bézier representada en la Fig. 2.

Para una situación como la de la Fig. 8, en que se dan los puntos de paso $r_1, r_2, \dots, r_n$, y se consideran $n-1$ segmentos $r_k(u)$, $k=1, \dots, n-1$, se tienen n incógnitas vectoriales: los vectores r_j' , tangentes en los puntos r_j . Se impondrán $n-2$ condiciones vectoriales, reflejadas por la continuidad de $r''(u)$ en $r_2, r_3, \dots, r_{n-1}$, y se tendrá aún flexibilidad para elegir dos condiciones vectoriales más.

El vector derivada segunda $r''(u)$ en el segmento k -ésimo de la curva, $r_k(u)$, tiene la expresión:

$$\left. \begin{aligned} r_k''(u) &= G_k \cdot M_k^{-1} \cdot U'' = \\ &= (r_k \ r_{k+1} \ r_k' \ r_{k+1}') \cdot M_k^{-1} \cdot (0 \ 0 \ 2 \ 6u)^T \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

con $k=1, \dots, n-1$.

La igualdad del vector derivada segunda a ambos lados de cada punto de unión entre segmentos, se expresa:

$$r_i''(u_{i+1}) = r_{i+1}''(0), \quad i=1, \dots, n-2 \quad (17)$$

Desarrollada esta condición se tiene:

$$\left. \begin{aligned} &u_{i+2} \cdot r_i'^T + 2(u_{i+1} + u_{i+2}) \cdot r_{i+1}'^T + \\ &+ u_{i+1} \cdot r_{i+2}'^T = \frac{3u_{i+1}}{u_{i+2}} \cdot (r_{i+2}'^T - r_{i+1}'^T) + \\ &+ \frac{u_{i+2}}{u_{i+1}} \cdot (r_{i+1}'^T - r_i'^T) \quad \text{para } i=1, \dots, n-2 \end{aligned} \right\}$$

que se puede agrupar matricialmente así:

$$\begin{pmatrix} u_3 & 2(u_2+u_3) & u_2 & 0 & \dots \\ 0 & u_4 & 2(u_3+u_4) & u_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & u_n & 2(u_{n-1}+u_n) & u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3u_2}{u_3}(r_3^T - r_2^T) + \frac{3u_3}{u_2}(r_2^T - r_1^T) \\ \frac{3u_3}{u_4}(r_4^T - r_3^T) + \frac{3u_4}{u_3}(r_3^T - r_2^T) \\ \vdots \\ \frac{3u_{n-1}}{u_n}(r_n^T - r_{n-1}^T) + \frac{3u_n}{u_{n-1}}(r_{n-1}^T - r_{n-2}^T) \end{pmatrix} \quad (18)$$

Nótese que en cada ecuación aparece una combinación de vectores tangentes que equivale a una combinación debidamente pesada de las vectores cuerdas de los segmentos implicados. Se tiene entonces un sistema con $n-2$ ecuaciones vectoriales y n incógnitas vectoriales, las r_i , $i = 1, \dots, n$. Este sistema se puede completar con dos ecuaciones vectoriales más para equilibrar número de ecuaciones e incógnitas. Dos condiciones sencillas, que son las tomadas en este trabajo, son: $r_1' = r_2 - r_1$ y $r_n' = r_n - r_{n-1}$, es decir, tangentes inicial y final en la dirección de primera y última cuerda respectivamente. Se pueden imponer otro tipo de condiciones, entre ellas las de los splines cíclicos, para construir curvas cerradas haciendo coincidir primer y último punto; las llamadas naturales, que hacen cero el vector derivada segunda en los puntos extremos; y otras ^{2,3,4}.

El sistema anterior se reduce a tres sistemas lineales con tres incógnitas escalares: las tres componentes de los vectores tangentes en los puntos base. Obsérvese que la matriz de coeficientes de esos tres sistemas es la misma, y que además tiene una estructura tridiagonal con dominancia de la diagonal principal. Cada uno de los tres sistemas antes citados se resuelve rápidamente en $O(n)$ operaciones.

Una observación a hacer sobre los splines cúbicos es su naturaleza "global", que significa que basta que se cambie un punto base para que se vea afectada toda la curva, pues cambia el sistema de ecuaciones que da los vectores r_i . Desde el punto de vista de diseño, son preferibles los modelos de curvas "locales", como las cúbicas de Bézier, en que las modificaciones sólo

repercuten en los segmentos más próximos a la zona en que se realizaron.

Obtenidos los vectores derivada primera r_i' , se puede evaluar el spline a lo largo de cualquier segmento k mediante (15), resultando la expresión:

$$r_k(u) = r_k + r_k' \cdot u + \left\{ \begin{aligned} &+ \left(\frac{3}{u_{k+1}^2} (r_{k+1} - r_k) - \frac{1}{u_{k+1}} (2r_k' + r_{k+1}') \right) \cdot u^2 + \\ &+ \left(\frac{2}{u_{k+1}^3} (r_k - r_{k+1}) + \frac{1}{u_{k+1}^2} (r_k' + r_{k+1}') \right) \cdot u^3 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Diferentes elecciones de los rangos de variación $[0, u_{k+1}]$ del parámetro en los segmentos lleva a construir diferentes curvas. Ello tiene influencia en la variación de la curvatura a lo largo de la curva ^{1,7}. Los ejemplos aquí presentados toman el modelo más sencillo consistente en que, para todos los segmentos, $u \in [0, 1]$. De este modo, y añadiendo las condiciones de "contorno" para r_1' y r_n' , resulta el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2^T \\ r_3^T \\ \vdots \\ r_{n-2}^T \\ r_{n-1}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r_3^T - 2r_1^T - r_2^T \\ 3(r_4^T - r_2^T) \\ \vdots \\ 3(r_{n-1}^T - r_{n-3}^T) \\ 2r_n^T + r_{n-1}^T - 3r_{n-2}^T \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (n-2) \times (n-2) & (n-2) \times 3 & (n-2) \times 3 \end{matrix} \quad (20)$$

La evaluación del spline se realiza con la fórmula (19) sustituyendo u_{k+1} por 1.

Para hacer la representación en el dibujo, hay que aplicar el operador matricial correspondiente. El punto genérico $r_k^*(u)$ se puede obtener, llamando $r_k^*(u)$ al punto representado en el dibujo:

$$r_k^*(u) = P^* \cdot r_k(u) = \left\{ \begin{aligned} &= (P^* \cdot G_k) \cdot M_k^{-1} \cdot (1 \ u \ u^2 \ u^3)^T \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Teniendo en cuenta que P^* es la matriz (2×3) de proyección simplificada para el caso axonométrico

ortogonal, se observa que, por la estructura de la formulación del modelo de spline, puede realizarse ventajosamente de modo previo el proceso de proyección de la información geométrica contenida en cada segmento en los vectores tridimensionales ya conocidos r_k , r_k ,

r_{k+1} , r_{k+1} , obteniéndose los correspondientes

vectores bidimensionales r_k^* , r_k^* , r_{k+1}^* , r_{k+1}^* , sobre el plano de dibujo y que van a permitir construir tantos puntos como se desee del spline imagen sobre el dibujo. Para la evaluación de punto genérico del segmento k en el dibujo, se puede emplear la expresión (19) sin más que sustituir los vectores r y r por los r^* y r^* , respectivamente.

Para la evaluación de cada una de las dos componentes de r_k^* , es conveniente emplear el algoritmo de Horner de evaluación de polinomios. El número de puntos intermedios tomados en cada segmento para la representación en los dibujos presentados es de 10.

Resumiendo, el proceso operativo se puede efectuar así:

Principio

Leer puntos r_k

Calcular r_k^* , $k=1, \dots, n$

(* Hasta aquí los cálculos no dependen de la proyección para dibujo *)

Calcular la información geométrica proyectada r_k^* y

r_k^* , $k=1, \dots, n'$

Calcular las matrices $P^* \cdot G_k \cdot M_k^{-1}$

(* Pintar la curva desde el primer segmento al último *)

Desde $k=1$ a $k=n-1$

Pintar $r_k^*(u)$ punto a punto

Fin

4. CONCLUSIONES

A través de algunas ilustraciones sencillas se ha pretendido poner de manifiesto que las técnicas de diseño geométrico y representación gráfica asistidos por computador son una realidad manejable con facilidad y cuyo uso hay que seguir potenciando en todos los ámbitos del diseño ingenieril, técnico, artístico, etc. La comprensión de técnicas geométricas clásicas, junto a planteamientos algebraicos

matriciales facilitan la formulación clara y eficiente de este tipo de problemas. Entre otras cualidades, pone de manifiesto más claramente las situaciones en que podría realizarse procesamiento paralelo. Se ha presentado aquí el tratamiento de la proyección axonométrica ortogonal, bien dando como elemento de definición un vector ortogonal al plano de proyección o bien dando los ángulos entre ejes, esto último más tradicional en el uso manual de ese sistema de representación. El incorporar estas opciones a un programa de computador exige el estudio analítico exhaustivo de las posibles situaciones aquí realizado. Por otro lado, se ha puesto de relieve la conveniencia de considerar la estructura algebraica de las ecuaciones de las curvas, pues ello conduce a simplificar la complejidad de los algoritmos de representación.

Los modelos de curvas de Bézier, splines, etc. surgidos en los años sesenta, se han ido perfeccionando y comprendiendo mejor, por lo que debe extenderse su uso, tanto en diseño bidimensional como en tres dimensiones. Asimismo estas ideas son aprovechables para el diseño de superficies.

Para la confección de las figuras en este trabajo se ha empleado un Macintosh SE con una resolución de 512x342 pixels, lo que tiene incidencia en la calidad de los dibujos obtenidos.

5. REFERENCIAS

- 1 Ahlberg, J., Nilson, E. and Walsh, J.: The Theory of Splines and their Applications. *Academic Press*, 1967.
- 2 Rogers, D.F. and Adams, J.A.: Mathematical Elements for Computer Graphics. *McGraw-Hill*, 1976.
- 3 Farin, G.: Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. *Academic Press*, 1988.
- 4 Brunet, P., La interpolació amb Funcions Spline: Introducció Automàtica de les Condicions d'Extrem. *Qüestió*, Vol 6, nº 4, Dec 1982.
- 5 Bézier, P.E.: Emploi des machines à commande numérique. *Ed. Masson*, 1970. En inglés: Numerical Control Mathematics and Applications, *Ed. John Wiley*, 1972.
- 6 Casteljau, P. de: Courbes et Surfaces à Poles, *Citroën*, 1959, Paris.
- 7 Faux, I.D. and Pratt, M.J.: Computational Geometry for Design and Manufacture. *Ellis Horwood Ltd.*, England, 1979.
- 8 Foley, J. and Van Dam, A.: Fundamentals of Interactive Computer Graphics. *Addison-Wesley*, 1982.
- 9 Bartels, R.H., Beatty, J.C. and Barsky, B.A.: An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling. *Morgan Kaufmann Publishers*, 1987.
- 10 Mortenson, M.: Geometric Modeling. *John Wiley & Sons*, 1985.