

Análisis de flujos de potencia compleja ($S = P + jQ$) en barras de tensión constante y cargas con dos elementos variables (Dominios no lisos)^(*)

Por LUIS GASPAR VEGA ARGÜELLES
Doctor Ingeniero Industrial.

El análisis de líneas de transporte de energía eléctrica en alta tensión precisa el conocimiento de una serie de factores como son: impedancias, admitancias, intensidades, potencias, etc., a cuyo estudio se dedica el siguiente artículo.

1. INTRODUCCION

En el presente estudio analizamos los lugares geométricos de impedancias, admitancias, intensidades y potencias mediante transformaciones conformes en el plano complejo, cuando la tensión que las alimenta permanece constante. Tal situación se puede considerar como real en la práctica cuando se analiza una barra de distribución en A.T. de potencia infinita.

Si bien es conocido el análisis de los circuitos eléctricos cuando es un solo el elemento que varía (resistencia, bobina o condensador), no lo es tanto cuando son dos los elementos que modifican su valor de manera simultánea. Supongamos que en el plano de las admitancias tenemos dos elementos que varían en la dirección de los respectivos ejes, esta composición de movimientos determina en el referido plano un área o dominio y su inverso ($1/Z$) en el plano de las impedancias, será un dominio congruente y biunívoco con el original al serlo la transformación (**).

2. FORMACION DE UN DOMINIO

Sea un circuito serie formado por una resistencia variable entre R_1 y R_2 ($R_1 \leq R \leq R_2$) y una reactancia que puede ser tanto inductiva como capacitiva y es infinita en ambas direcciones ($-\alpha \leq jX \leq \alpha$).

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de diciembre de 1988.

(**) Ver Bibliografía.

Al variar la resistencia entre los límites prefijados junto con la reactancia entre $\pm \alpha$, el lugar geométrico de las impedancias es un dominio limitado por dos rectas perpendiculares al eje real que pasan por R_1 y R_2 y se prolonga al infinito en ambas direcciones. Dicho dominio G lo tenemos representado en la figura 1., acotado como D.L.G. Z_{ab} .

El inverso del dominio de G será el G' delimitado por las circunferencias transformadas de las rectas límites, puesto que «rectas que no pasan por el origen se transforman en circunferencias que sí pasan por el origen». Para este caso concreto la forma más sencilla y rápida es determinar los diámetros de dichas circunferencias. El punto A, más cercano se

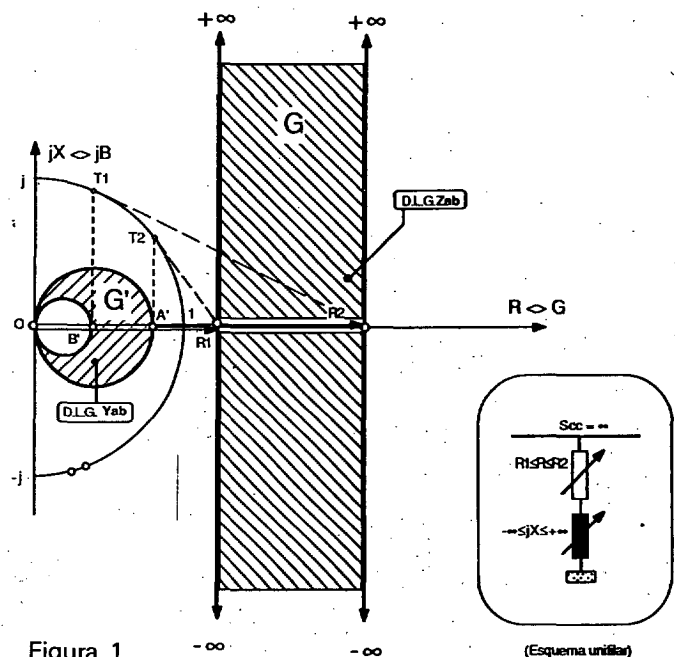


Figura 1.

(Esquema unitario)

transforma en el A' más alejado y el B, más alejado, se transforma en el B' más cercano.

Podemos afirmar que cualquier punto genérico del dominio de G se transforma en un punto interno de la lúnula G'.

A estos dominios en los que todos los puntos internos del mismo están definidos por una sola pareja de valores (componente real e imaginaria) se les denomina «lisos» y su análisis no presenta dificultad alguna.

La ley de formación de la lúnula se puede considerar como la expansión de una circunferencia que no tiene puntos de solape con ella misma al aumentar su diámetro desde O-B' a O-A'.

Un dominio puede ser formado también por un arco de circunferencia que se traslada apoyándose en un segmento rectilíneo o en otro arco de circunferencia (Ver figura 2).

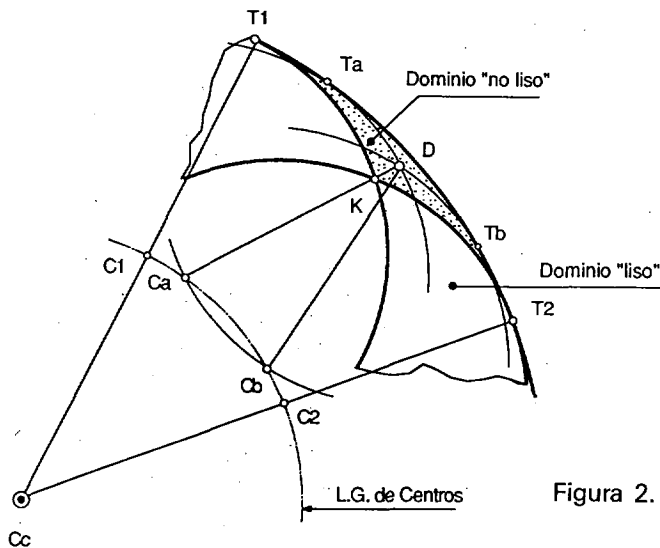


Figura 2.

Supongamos que el dominio se forma al trasladarse un arco de circunferencia a lo largo de otro que denominamos L.G. de Centros entre los puntos C₁ y C₂. Vemos que existe una zona del mismo delimitada por el triángulo curvilíneo T₁-K-T₂ en la que todos los puntos de la misma tiene una solución doble, al que denominaremos en lo sucesivo dominio «no liso».

Cualquier vector que tenga por afijo un punto interno del dominio «no liso» D puede pertenecer indistintamente a los arcos que tienen por centro C_a o C_b y ambas pueden ser solución del problema.

Riemann ha dado una interpretación sencilla de las superficies «no lisas» mediante un modelo de papel en el cual la zona punteada puede quedarse superpuesta por dos hojas o más dependiendo de la multivalencia de la función.

Por tanto, llamaremos dominio «liso» a aquél que no recubre más de una sola vez a todos los puntos de su respectivo plano y «no liso» al dominio que no cumpla esta condición.

3. ANÁLISIS DE UN CASO CONCRETO

Sea un circuito formado por tres cargas en paralelo de las siguientes características:

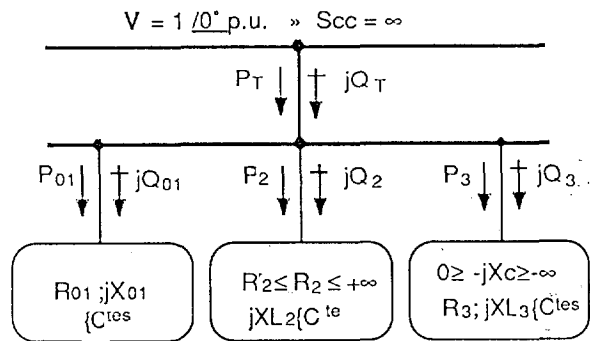
a) Una primera fija de valor $Z_{01} = R_{01} + jK_{L01}$.

b) Una segunda formada por una resistencia variable $R'_2 \leq R_2 \leq \alpha$ entre un valor mínimo e infinito en serie con una reactancia inductiva fija jX_{L2} .

c) Y una tercera que contiene una impedancia fija $Z_3 = R_3 + jX_{L3}$ en serie con un condensador variable, o compensador síncrono, de cero a infinito.

Se supone que todas estas cargas tienen sus valores traducidos a p.u. (por unidad) tomando como parámetros base de tensión y de potencia los adecuados para que la tensión de barra sea $V = 1 \angle 0^\circ$ p.u.

En la figura 3 hemos representado un diagrama unifilar en el que se refleja la situación de las cargas descritas anteriormente. Como puede apreciarse fácilmente, este sistema representa



(Diagrama unifilar)

Figura 3.

un conjunto de receptores de potencia conectados a una barra de tensión constante.

El análisis se puede sintetizar como sigue:

3.1. El lugar geométrico de la impedancia Z_2 es una recta de origen en el extremo de $R'_2 + jX_{L2}$ y paralela al eje real hasta el infinito (Ver figura 4).

3.2. Su inversa es un arco de circunferencia que pasa por el origen, tiene su centro en el eje imaginario negativo y por radio $1/(2X_{L2})$.

3.3. El lugar geométrico de la impedancia Z_3 es una recta de origen en $R_3 + jX_{L3}$, perpendicular al eje real e indefinida.

3.4. Su inverso, el l.g. de la admitancia Y_3 , es un arco de circunferencia que pasa por el origen, tiene su centro en el eje real y un radio de $1/(2R_3)$.

3.5. el l.g. de la admitancia total Y_T se obtiene sumando las admitancias de las tres cargas en paralelo.

$$Y_T = Y_{01} + L.G.Y_2 + L.G.Y_3$$

La suma de las L.G. de Y_2 e Y_3 constituye un deslizamiento de un arco de circunferencia sobre otro, lo cual da lugar a un área o dominio en el plano complejo.

Al analizar la figura generada en este movi-

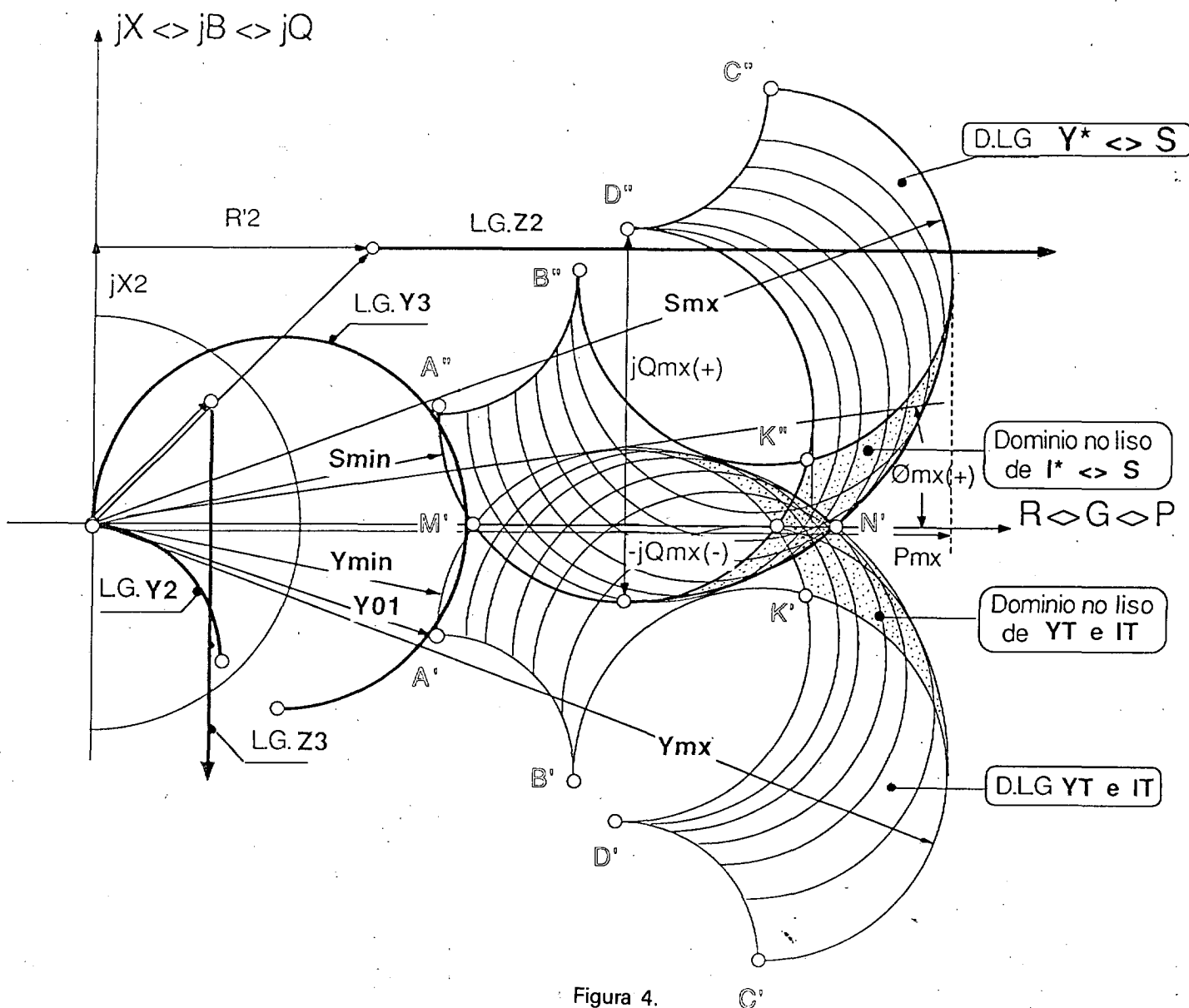


Figura 4.

miento vemos que se crea un área o «dominio» de solapa de arcos en el que las soluciones son dobles; es, por tanto, un dominio «no liso».

Dominio

$$\{A' \rightarrow M' \rightarrow N' \rightarrow C' \rightarrow D' \rightarrow K' \rightarrow B' \rightarrow A'\}$$

3.6. Los valores máximos y mínimos de la admitancia total son fácilmente deducibles:

$$Y_{Tmx} = Y_{Tmx} \angle -\phi_{Tmx}$$

de modulo.

$$Y_{Tmx} = \sqrt{\left(Y_{01} \cos \phi_0 + \frac{1}{2R_2'} + \frac{1}{2R_3}\right)^2 + \left(Y_{01} \sin \phi_0 + \frac{1}{2X_{L2}}\right)^2} + \frac{1}{2R_3}$$

y argumento

$$\phi_{Tmx} = \arctg \left(\frac{Y_{01} \sin \phi_0 + \frac{1}{2X_{L2}}}{Y_{01} \cos \phi_0 + \frac{1}{2R_2'} + \frac{1}{2R_3}} \right)$$

y el valor de la admitancia mínima

$$Y_{Tmin} = Y_{Tmin} \angle -\phi_{Tmin}$$

de módulo

$$Y_{Tmin} = \sqrt{\left(Y_{01} \cos \phi_0 + \frac{1}{2R_3}\right)^2 + \left(Y_{01} \sin \phi_0\right)^2} - \frac{1}{2R_3}$$

y argumento

$$\phi_{Tmin} = \arctg \left[\frac{(Y_{01} \sin \phi_0)}{(Y_{01} \cos \phi_0 + 1/2R_3)} \right]$$

3.7. El lugar geométrico de la admitancia coincide con el de la intensidad en unidades p.u. al tomar $V \equiv 1 \angle 0^\circ$ p.u.

$$I_T = V \cdot Y_T \equiv Y_T (\text{p.u.})$$

3.8. El conjugado de la intensidad (I^*) coincide con el de la potencia en unidades p.u., puesto que

$$S_T = V \times I_T^* = I_T^* (\text{p.u.})$$

Dominio

$$\{A'' \rightarrow M' \rightarrow N' \rightarrow C'' \rightarrow D'' \rightarrow K'' \rightarrow B''\}$$

3.9. Los valores máximos y mínimos de las potencias aparentes serán entonces idénticas a las respectivas de las admitancias pero con el argumento cambiado de signo.

$$S_{mx} = S_{mx} \angle \phi_{Tmx}$$

$$S_{min} = S_{min} \angle \phi_{Tmx}$$

3.10. Un dato que ha de estar presente es el de la máxima potencia puesta en juego por el conjunto de las cargas (P_{mx}). Tal punto de funcionamiento le corresponde a la abscisa máxima, de valor:

$$P_{mx} = V^2 \left\{ (Y_{Tmx} - 1/2R_3) \cos \phi_{Tmx} + 1/2R_3 \right\} \equiv \left\{ (Y_{Tmx} - 1/2R_3) \cos \phi_{Tmx} + 1/2R_3 \right\}$$

en p.u.

3.11. Analicemos un punto interno del dominio «liso», como el H y otro del dominio «no liso», como el K. (Ver figura 5).

El vector Y_{H2} que tiene por afijo el punto H del dominio «liso», está definido por una suma de los vectores Y_{H2} y Y_{H3} . Por el punto H sólo pasa un l.g. de Y_3 , con centro en H y radio $1/2 R_3$ cortaremos a la línea de centros en CH que trasladado al L.G. del Y_2 nos define el valor de Y_{H2} o lo que es lo mismo el valor de resistencia R_2 que lo genera.

$$Y_{H2} = Y_{H2} \angle \phi_{H2}$$

$$R_2 = \cos \phi_{H2} Y_{H2}$$

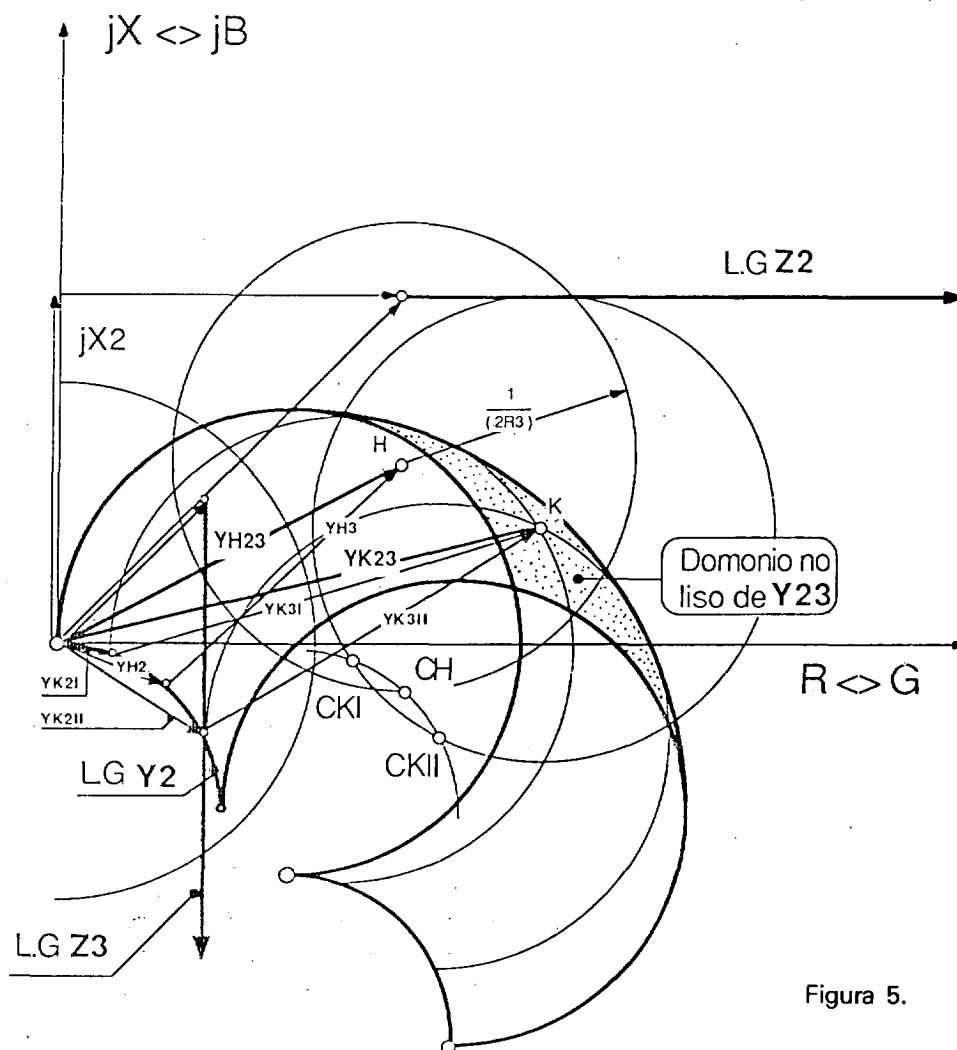


Figura 5.

Una vez deducido Y_{H2} se determina Y_{H3} por diferencia vectorial.

$$Y_{H3} = Y_{H2} - Y_{H2}$$

En el módulo y argumento.

$$Y_{H3} = Y_{H3} \angle \phi_{H3}$$

y su inverso nos determinará el valor de la impedancia.

$$Z_{H3}(1/Y_{H3}) \angle -\phi_{H3}$$

la cual nos proporciona la reactancia capacitiva.

$$X_{H3} = Z_{H3} \sin \phi_{H3} + X_{L3}$$

Que junto con la resistencia R_2 definen el punto de carga H.

El punto K afijo del vector Y_{K23} , que pertenece a la superficie «no lisa», tiene dos parejas de soluciones. La primera definida por el l.g. de Y_3 con centro en C_{K1} y la segunda con centro en C_{KII} , que son a su vez los puntos de corte de una circunferencia de centro en K y radio $(2R_3)^{-1}$ con el lugar geométrico de la línea de centros.

Por traslación de los puntos C_{K1} y C_{KII} al l.g. de Y_2 determinamos Y_{K21} y Y_{K2II} y por composición vectorial con Y_{K23} se calculan Y_{K31} y Y_{K3II} .

$$Y_{K31} = Y_{K23} - Y_{K21} = Y_{K31} \angle \phi_{K31}$$

$$Y_{K3II} = Y_{K23} - Y_{K2II} = Y_{K3II} \angle \phi_{K3II}$$

Por inversión de Y_{K21} determinamos el valor de R_{K21} que con el de la capacidad obtenida de la inversión de Y_{K31} nos definen la primera

pareja de valores que son solución de la posición de K.

$$R_{K2I} = (Y_{K2I})^{-1} \cos \varnothing_{K2I}$$

$$X_{CK3I} = (Y_{K3I})^{-1} \sin \varnothing_{K3I} + X_{L3}$$

y la segunda pareja será:

$$R_{K2II} = (Y_{K2II})^{-1} \cos \varnothing_{K2II}$$

$$X_{CK3II} = (Y_{K3II})^{-1} \sin \varnothing_{K3II} + X_3$$

CONCLUSIONES

1.^a Vemos en el presente estudio, que es posible evaluar y definir el flujo de potencia activa y reactiva en barras de tensión constante mediante transformaciones conformes en el plano complejo.

2.^a Los valores máximos y mínimos de admitancia y potencias complejas son fácilmente deducibles por este procedimiento, afirmación que no podemos hacer si se intenta una solución analítica del problema puesto que tendríamos que determinar la solución de derivadas direccionales en el campo complejo.

3.^a Hemos visto la generación de dominios «no lisos» y hemos dado una interpretación física concreta a los mismos, determinando las dobles parejas de valores que los definen.

4.^o Los posibles estados de resonancia (puntos del dominio de Y_T de componente imaginaria nula) están definidas por la recta $M'N'$ en la que se aprecia que puede tener parte en el dominio «liso» y parte en el dominio «no liso», es decir que hay estados de resonancia definidos por una pareja de valores de los dos elementos variables y existen estados de resonancia en donde el mismo punto de funcionamiento los definen dos parejas distintas de los elementos variables.

NOTACIONES Y ABREVIATURAS

L.G.: (Lugar geométrico).

A.T.: (Alta tensión).

p.u.: (Por unidad).

V: (Vector tensión).

I: (Vector intensidad).

Z: (Vector impedancia).

Y: (Vector admitancia).

S: (Vector potencia aparente).

R: (Resistencia).

X_L : (Reactancia inductiva).

X_C : (Reactancia capacitiva).

G: (Conductancia).

B: (Susceptancia).

P: (Potencia activa).

Q: (Potencia reactiva).

I^* : (Vector conjugado de la intensidad).

Y^* : (Vector conjugado de la admitancia).

< >: (Superposición plano, ejes, líneas, dominio, etc., en el plano complejo).

BIBLIOGRAFIA

1. AHLFORS, A.: «Funciones de variable compleja».
2. BELDA TROCONIZ.: «Análisis Algebraico».
3. BIEBERBACH, L.: «Introducción a la Teoría de la Representación Conforme».
4. BOURBAKI, N.: «Elementos de Historia de la Matemática».
5. BRENNER, J.: «Análisis de Circuitos Eléctricos».
6. BUDDEN, J.: «Números Complejos».
7. CARL, L.S.: «Topics in Complex Function Theory».
8. CUNNINGAN, J.: «Complex Variable Methods in Science and Technology».
9. M.I.T.: «Circuitos Eléctricos».
10. MOORHOUSE: «Potencia Eléctrica, Líneas y Cargas».
11. PHILLIPS, E.G.: «Funciones de Variable Compleja».

Luis Gaspar Vega Argüelles



Nacido en Campo de Caso (Asturias). Perito Industrial por la Escuela de Gijón en 1964. Ingeniero Industrial por la Escuela de Bilbao en 1970. Catedrático E.U. del Grupo XI «Electricidad I» en 1971. Doctor Ingeniero Industrial por la Escuela de Bilbao en 1982. Profesor Titular de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos del Grupo XXVIII «Sistemas Eléctricos» el 1984. En la actualidad Director del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética de la Universidad de Cantabria.