

# Curvas verticales en los trazados ferroviarios<sup>(\*)</sup>

Por JOSE A. ESCOLADO PAUL

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

*El acuerdo en vertical entre pendientes y rampas de vías férreas plantea la necesidad de utilizar curvas de enlace, cuya definición en cuanto a desarrollo, radio, replanteo, etc., se estudian en el siguiente artículo.*

El perfil longitudinal de una línea está constituido por planos sucesivos que forman los tramos horizontales, las pendientes y las rampas.

Dos planos contiguos del perfil longitudinal deben quedar enlazados entre sí por un tramo curvo cuya sección vertical sea una circunferencia o parábola, de gran radio de curvatura.

La mayoría de las Redes introducen estos acuerdos verticales, entre rasantes sucesivas, cuando la diferencia algebraica de sus inclinaciones es igual o superior a «n» milésimas. El valor de «n» oscila entre 1 y 4 milésimas.

En RENFE, este enlace se establece cuando, definidas las inclinaciones de la rasante en milésimas, su diferencia algebraica es superior a 2,5 milésimas.

El Líneas de alta velocidad, se suele establecer curva vertical de enlace cuando la diferencia algebraica de las rasantes es igual o mayor de 2,0 milésimas.

## CURVA VERTICAL DE ENLACE

La curva de enlace es generalmente circular y su radio se fija en función de la aceleración vertical.

Los valores mínimos del radio se adoptan según criterios de confort.

Diversos ensayos de simulación realizados en Francia, han hecho que se fije como valor límite, para las aceleraciones verticales, el de 0,05 g. lo que equivale a una aceleración vertical de 0,5 m/s<sup>2</sup>.

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de marzo de 1988.

Teniendo en cuenta que la aceleración vertical viene dada por la fórmula:

$$a_v = \frac{V^2}{12,96 R}$$

cuando se expresa:

$$\begin{array}{ll} V & \text{en km/h.} \\ R & \text{en m.} \\ a_v & \text{en m/s}^2 \end{array}$$

resulta el cuadro I que relaciona las velocidades con los radios mínimos en las curvas verticales para  $a_v = 0,5 \text{ m/s}^2$ .

Si se admite para  $a_v$  un valor máximo de 0,3 m/s<sup>2</sup>, tal como fijan las normas de RENFE de febrero de 1982, se obtienen los valores del cuadro II.

En el cuadro III quedan registrados los diversos radios que se obtienen para las curvas verticales según la velocidad «V» (km/h.) permitida en el trayecto y el valor asignado al parámetro  $a_v$  (m/s<sup>2</sup>).

## DESARROLLO DE LA CURVA DE ENLACE

El ángulo que define la inclinación de las rampas y pendientes es muy pequeño, por ello, en la práctica, se iguala el valor de la tangente al del ángulo, medido en radianes. En el cuadro IV se pone de manifiesto la legitimidad de esta aproximación.

Por tanto, cuando la variación de las alineaciones verticales entre dos rasantes consecutivas es menor de 3,5°, ó lo que es lo mismo, cuando la variación de sus inclinaciones es me-

## CURVAS VERTICALES EN LOS TRAZADOS FERROVIARIOS

CUADRO I

$R = 0,1543 \times V^2$						
V km/h	125	150	175	200	225	250
R m	2.500	3.500	5.000	6.000	8.000	10.000

CUADRO II

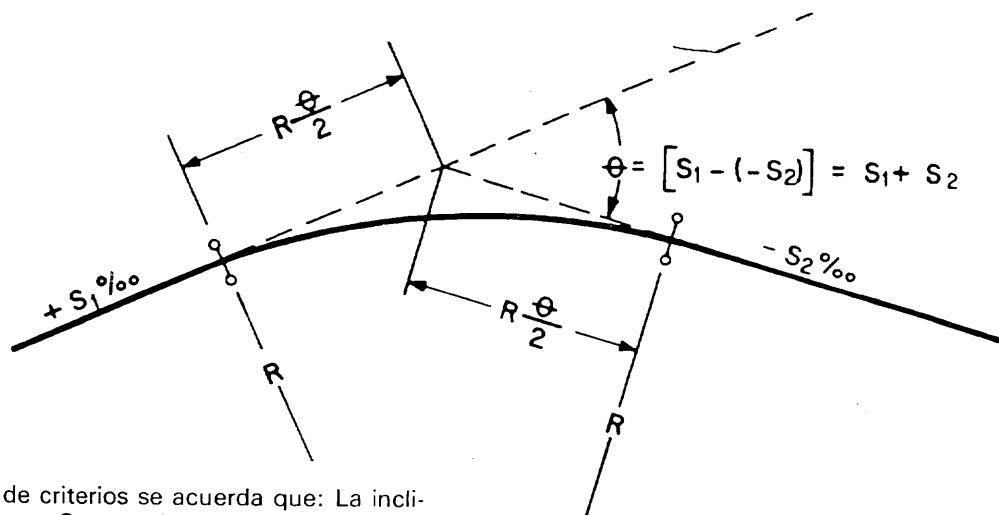
$R = 0,2572 \times V^2$						
V km/h	125	150	175	200	225	250
R m	4.000	6.000	8.000	10.000	13.000	16.000

CUADRO III

$R = \frac{V^2}{12,96 a_v}$						
$a_v$ V	125	150	175	200	225	250
0,5	2.500	3.500	5.000	6.000	8.000	10.000
0,4	3.000	4.500	6.000	8.000	10.000	12.000
0,3	4.000	6.000	8.000	10.000	10.000	16.000
0,2	6.000	9.000	12.000	16.000	20.000	24.000

CUADRO IV

Pendiente milésimas	5	10	20	30	40	50	60
tg $\Theta$	0,0050	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0600
$\Theta$ grados	0,2865	0,5729	1,1458	1,7184	2,1906	2,8624	3,4336
$\Theta$ radianes	0,0050	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0599



Para unificación de criterios se acuerda que: La inclinación de una rampa «S» sea siempre positiva, por el contrario la inclinación «S» de una pendiente sea siempre negativa.

$$\text{Tag. } \Theta \approx \Theta$$

$$\text{Tag. } \Theta = S_1 - S_2$$

nor del 60 milésimas, puede adoptarse:

$$\Theta = \text{tg } \Theta, \text{ con error menor de } 0,0001$$

En RENFE se utiliza como curva vertical el arco de círculo. Su desarrollo, teniendo en cuenta lo dicho en el apartado anterior se obtendrá por la fórmula:

$$D = R \Theta \left\{ \begin{array}{l} R = \text{Radio de la curva vertical (m)} \\ \Theta = \text{Angulo formado por las rasan-} \\ \text{tes (rad.)} \\ D = \text{Desarrollo de la curva vertical} \\ \text{(m)} \end{array} \right.$$

**RADIO DE LA CURVA DE ENLACE**

En RENFE se ha venido utilizando como curva vertical el arco de círculo, cuyo radio se deducía a partir de la fórmula:

$$R = V^2 \left\{ \begin{array}{l} R \text{ m.} \\ V \text{ km/h.} \end{array} \right.$$

En casos excepcionales se admitían radios menores, pero nunca inferiores a:

$$\frac{V^2}{4}, \text{ ó } 2.000 \text{ m.}$$

Recordando la fórmula:

$$a_v = \frac{V^2}{12,96 R} \left\{ \begin{array}{l} V \text{ en km/h.} \\ R \text{ en m.} \\ a_v \text{ en m/s}^2 \end{array} \right.$$

Resulta:

para  $R = V^2$ ;  $a_v = 0,0772 \text{ m/s}^2 = 0,008 \text{ g.}$

para  $R = \frac{V^2}{4}$ ;  $a_v = 0,3088 \text{ m/s}^2 = 0,031 \text{ g.}$

Teniendo en cuenta que las experiencias realizadas por la SNCF han dado como valor límite admisible para  $a_v = 0,05 \text{ g.}$ , resulta excesivamente conservador el primero de los criterios citados y aceptable el segundo.

En el cuadro siguiente se ha calculado el radio en función de la velocidad para diferentes valores de  $a_v$ .

El valor de  $R = \frac{V^2}{5}$  parece un valor máximo

$R = \frac{V^2}{2}$	$a_v = 0,15$
$R = \frac{V^2}{4}$	$a_v = 0,31$
$R = \frac{V^2}{5}$	$a_v = 0,39$
$R = \frac{V^2}{6}$	$a_v = 0,46$
$R = \frac{V^2}{8}$	$a_v = 0,62$

admisible y de hecho, para  $V = 100 \text{ km/h.}$ , da  $R = 2000 \text{ m}$  que era el valor mínimo que admitía RENFE.

De todo lo anteriormente expuesto se deduce que la fórmula:

$$R = \frac{V^2}{4}$$

parece razonablemente aceptable para definir el radio de las curvas verticales en los trayectos de nueva construcción.

Sin embargo, en los trayectos existentes, para definir la velocidad máxima en función del radio de las curvas verticales existentes, parece más lógico utilizar la fórmula:

$$V^2 = 5 R$$

Con esta fórmula, para  $R = 10.000 \text{ m}$  es perfectamente admisible la velocidad de  $225 \text{ km/h}$  y para  $R = 5.000 \text{ m}$  la velocidad de  $160 \text{ km/h}$ .

**REPLANTEO DE LA CURVA DE ENLACE**

Las curvas verticales se replantean por abscisas y ordenadas, a partir de los puntos de tangencia de cada una de las rasantas, utilizando la fórmula:

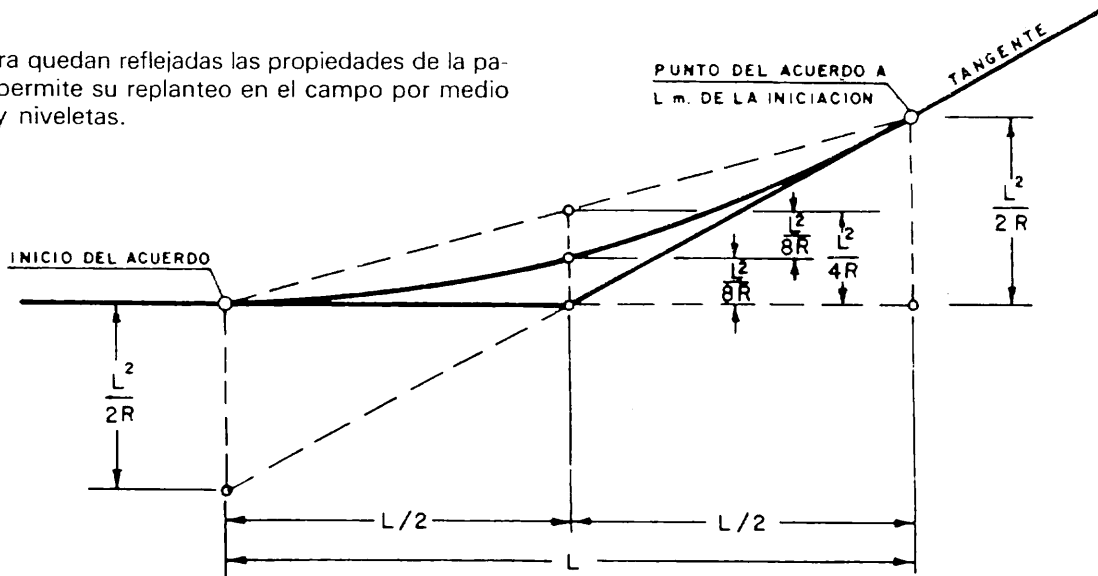
$$Y = \frac{X^2}{2R}$$

Esta fórmula es perfectamente admisible, teniendo en cuenta que la ecuación del círculo, tomando como ejes la rasante y la perpendicular a la misma y como origen el punto de tangencia, sería:

$$X^2 + Y^2 - 2RY = 0$$

## CURVAS VERTICALES EN LOS TRAZADOS FERROVIARIOS

En la figura quedan reflejadas las propiedades de la parábola que permite su replanteo en el campo por medio de jalones y niveletas.



De donde:

$$Y = \frac{X^2}{2R} + \frac{Y^2}{2R}$$

Despreciando el último término, la ecuación anterior se reduce a:

$$Y = \frac{X^2}{2R}$$

«parábola osculadora» al círculo de enlace en el punto de tangencia.

Con objeto de cuantificar el orden del error cometido se han calculado para radio 10.000 y 20.000, las «Y» correspondientes a la circunferencia y a la parábola y las diferencias entre ambas.

Los valores obtenidos quedan reflejados en los cuadros adjuntos.

El máximo error cometido es de 1 mm, valor que se obtiene para R = 10.000 y una abscisa de 300 metros, equivalente a un desarrollo de 600 metros.

### VARIOS

#### Longitudes de rasantes y acuerdos verticales

No existen criterios definidos respecto a las longitudes mínimas de las rasantes, con pen-

dientes constantes entre dos acuerdos, ni respecto a las longitudes de los propios acuerdos.

En algunas Administraciones estos valores mínimos se fijan en cifras del orden de 100 a 150 metros.

En las renovaciones de vía, en RENFE, se procuraba establecer rasantes con longitudes mínimas de 500 metros. Excepcionalmente se

#### CALCULO DE LAS DIFERENCIAS EXISTENTES ENTRE Y<sub>c</sub> e Y<sub>p</sub> PARA RADIOS DE VALORES 10.000, 15.000 y 20.000 METROS Y VALORES DE X COMPRENDIDOS ENTRE 10 y 300 METROS

R = 10.000 m

X	Y <sub>c</sub>	Y <sub>p</sub>	A
10 m	5,000001 mm	5,000000 mm	0,000001 mm
20 m	20,000020 mm	20,000000 mm	0,000020 mm
30 m	45,000101 mm	45,000000 mm	0,000101 mm
40 m	80,000320 mm	80,000000 mm	0,000320 mm
50 m	125,000781 mm	125,000000 mm	0,000781 mm
60 m	180,001620 mm	180,000000 mm	0,001620 mm
70 m	245,003001 mm	245,000000 mm	0,003001 mm
80 m	320,005120 mm	320,000000 mm	0,005120 mm
90 m	405,008202 mm	405,000000 mm	0,008202 mm
100 m	500,012501 mm	500,000000 mm	0,012501 mm
200 m	2.000,200040 mm	2.000,000000 mm	0,200040 mm
300 m	4.501,012956 mm	4.500,000000 mm	1,012956 mm



**Coincidencia de curvas de transición en puntos de acuerdo verticales**

En la medida de lo posible deben evitarse. Cuando no se puedan evitar, se utilizarán radios verticales de la mayor amplitud posible.

**Poligonal de replanteo**

En la práctica la curva de enlace se sustituye por una poligonal regular, cuyo lado ordinariamente suele tener 10 ó 20 metros, que enlaza los puntos calculados de la parábola.

Evidentemente la diferencia de pendiente entre dos lados sucesivos de la poligonal será menor de 2,5 milésimas.

A veces, en los trabajos de campo, surge la necesidad de actuar de forma práctica, estableciendo una curva de enlace que no ha sido objeto de cálculo. Para ello se procede fijando una variación determinada de «a» milésimas entre lados sucesivos de la poligonal, siendo «L» metros la longitud de un lado.

Cuando se actúa de esta forma, debe tenerse en cuenta que el radio de la curva circular de enlace tiene como valor:

$$\frac{1.000 L}{a}$$

no tenido por qué coincidir con la del proyecto.

En el caso de adoptar una poligonal de 10 m de lado, el radio de la curva de enlace es de 10.000 m para variación de 1 milésima entre dos lados consecutivos de la poligonal y 5.000 m si se adoptan 2 milésimas.

Si se adopta para la poligonal un lado de 20 m, el radio de la curva de enlace pasaría a ser de 20.000 m para una variación de 1 milésima entre dos lados consecutivos de la poligonal y de 10.000 m, si se adoptan 2 milésimas de variación.

**Cálculo de la rasante en la curva de enlace**

En el cuadro adjunto se han calculado las cotas de la curva de enlace cada 20 m para un radio de 10.000 m y una variación de 11 milésimas entre las rasantes enlazadas.

**BIBLIOGRAFIA**

1. GARCIA LOMAS, J. M.: «Tratado de Explotación de Ferrocarriles».
2. CRESPO, A.: «Constitución de las alineaciones curvas».
3. ALIAS, J.: «La Voie Ferrée».

**José A. Escolado Paul.**

Nacido en Puerto Real (Cádiz) en 18-12-1926. Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. D.A.D.E. —IESE— 1971. Ingresó en RENFE en el año 1957 en donde ha prestado ininterrumpidamente sus servicios.

Ingresó como Ingeniero 2.º del Cuerpo de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos en la Dirección General de Obras Hidráulicas del Ministerio de Obras Públicas el 6 de abril de 1961, solicitando fuese declarado Supernumerario con objeto de continuar prestando sus servicios en la Red.

El 11 de Julio de 1961 fue declarado Supernumerario, situación en la que permaneció hasta el 6-10-86, en que queda en situación de excedencia.

Entre las actividades desarrolladas en la red se encuentran las siguientes:

1-07-57. —Ingeniero en Prácticas del Departamento de Estudios y Reconstrucciones; 1-07-61. —Fue nombrado Ingeniero Jefe de Vía y Obras de la 4.ª Zona (Valencia); 9-11-65. —Fue nombrado Director de la 4.ª Zona (Valencia); 24-6-69. —Se le concedió la categoría de Subdirector de la Red y fue trasladado a la 5.ª Zona (Barcelona), como Director de la misma; 1-7-72. —Fue nombrado Director Adjunto en la Dirección de Explotación, siendo trasladado a Madrid; 1-6-73. —Fue nombrado Director de Obras e Instalaciones; 2-05-78. —Fue nombrado Director del Area Técnica; 21-7-80. —Pasó a ser Director del Area de Inversiones, como consecuencia de la nueva estructura de RENFE; 1-6-81. —Se le nombró Inspector General, puesto que sigue desempeñando en la actualidad.

