

El «momento flector» y el «esfuerzo cortante» en los distribuidores de energía eléctrica (Distribuidores en C.A) (2.ª Parte) (*)

Por LUIS VEGA ARGÜELLES

Doctor Ingeniero Industrial.
Profesor Titular de la Asignatura Sistemas Eléctricos
en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros
de Caminos, Canales y Puertos de Santander.

Se presenta a continuación la segunda y última parte del artículo cuya publicación se inició en nuestro número anterior. En ella se analizan las analogías existentes entre los distribuidores eléctricos en corriente alterna y los clásicos procedimientos de cálculo de Resistencia de materiales.

En la primera parte de este estudio hemos analizado los distribuidores alimentados en corriente continua (c. c.) que no presentan grandes dificultades en su proceso de cálculo, más cómo seguidamente veremos, no sucede lo mismo con los distribuidores en corriente alterna (c. a.).

Si bien metodológicamente seguimos una exposición paralela a la desarrollada en c. c., el problema radica en el análisis matemático que es más difícil de desarrollar al tener la necesidad de utilizar funciones de variable compleja.

E.5) Sea un distribuidor alimentado por un punto A el cual tiene una impedancia unitaria $\dot{Z}_u = P_u + jx_u$ y alimenta a dos cargas

$$\dot{I}_1 = I_1 \angle -\psi_1 \quad \text{e} \quad \dot{I}_2 = I_2 \angle -\psi_2$$

La caída de tensión a lo largo del distribuidor será:

$$\Delta \dot{V} = (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \dot{Z}_u l_1 + \dot{I}_2 \dot{Z}_u (l_2 - l_1) = \dot{Z}_u (\dot{I}_1 l_1 + \dot{I}_2 l_2) \quad [E.49]$$

Expresión que podemos generalizar como en el caso de c. c.

$$\Delta \dot{V} = \dot{Z}_u \sum \dot{I}_j l_j \quad [E.50]$$

Tomaremos como origen de referencias de todas las intensidades, la tensión de alimentación. Para determinar la intensidad en cualquier

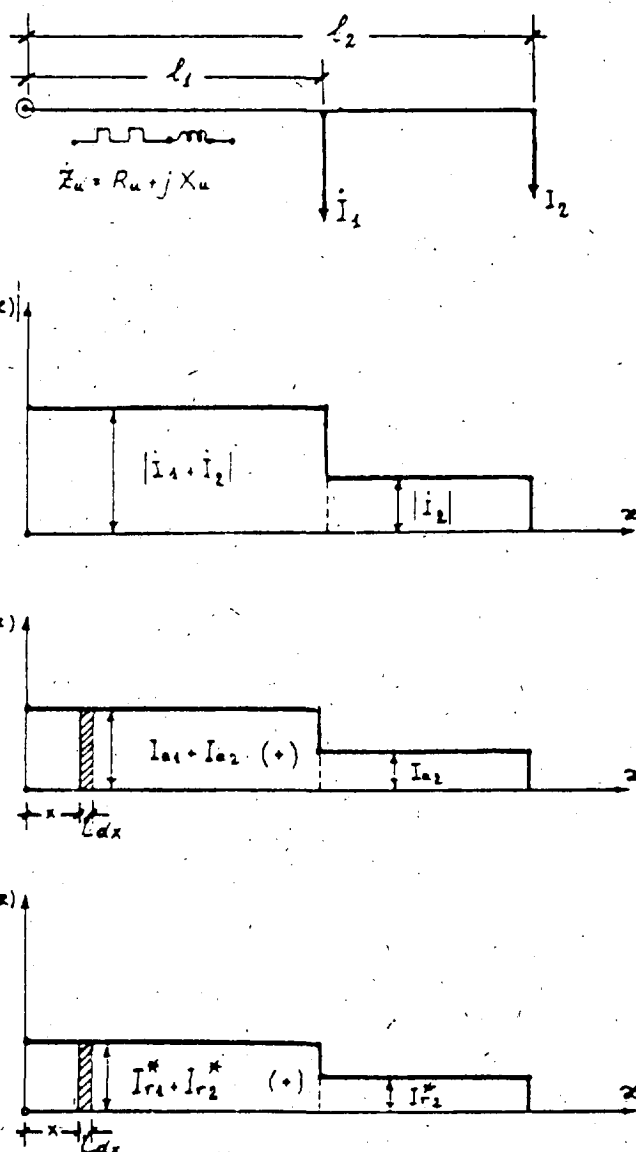


Figura 13.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de marzo de 1986.

punto del distribuidor se obtendrán primero sus componentes activas (en fase con $\dot{V}_A$) y reactivas (en cuadratura con $\dot{V}_A$) su módulo es:

$$I(x) = \sqrt{I_a(x)^2 + I_r(x)^2} \quad [E.51]$$

y su argumento:

$$\operatorname{tg} \psi(x) = \frac{I_r(x)}{I_a(x)} \quad [E.52]$$

Debemos recordar, que las componentes reactivas de las corrientes pueden ser positivas o negativas dependiendo del tipo de carga. (Positivas si con cargas capacitivas y negativas para cargas inductivas).

La caída de tensión en función de las componentes activas y reactivas es:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V} &= \dot{Z}_u \{ (I_a + (-j) I_{r1}) I_1 + (I_{a2} + (-j) I_{r2}) I_2 \} = \\ &= \dot{Z}_u (I_{a1} I_1 + I_{a2} I_2) - \\ &- j \dot{Z}_u (I_{r1} I_1 + I_{r2} I_2) = \Delta \dot{V}_a + \Delta \dot{V}_r = \\ &= \Delta V_a \angle \psi_L + \Delta V_r \angle \psi_L - 90^\circ \end{aligned} \quad [E.53]$$

«La caída de tensión de las componentes activas está adelantada ψ_L respecto a $\dot{V}_A$ y se obtiene integrando el diagrama de las componentes activas de las intensidades a lo largo del distribuidor y el resultado se multiplica por la impedancia unitaria». ψ_L es el argumento de la impedancia unitaria.

$$\Delta \dot{V}_a(x) = \dot{Z}_u \int_0^x I_a(x) dx \quad [E.54]$$

«La caída de tensión de las componentes reactivas está en cuadratura respecto a $\Delta \dot{V}_a(x)$ y estará en retraso o en adelanto dependiendo de que predominen las cargas inductivas o capacitivas». Su valor es:

$$\Delta \dot{V}_r(x) = j \dot{Z}_u \int_0^x \{ \pm I_r(x) \} dx \quad [E.55]$$

Gráficamente se puede representar la caída de tensión originada por las componentes activas de las intensidades sin más que tener presente que la ordenada correspondiente a una abscisa x es igual al área subintegral del diagrama de intensidades y por la impedancia $\dot{Z}_u$.

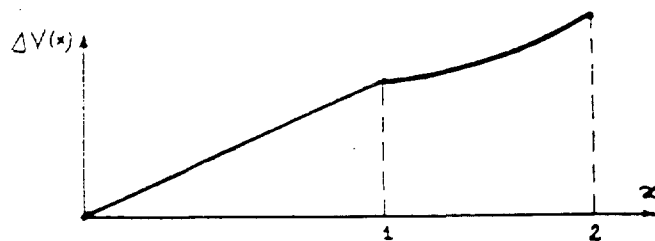
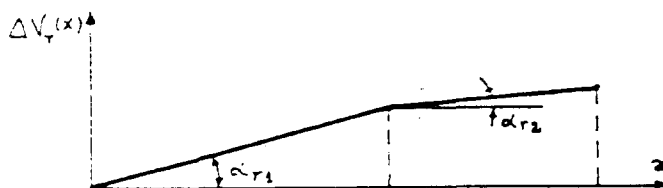
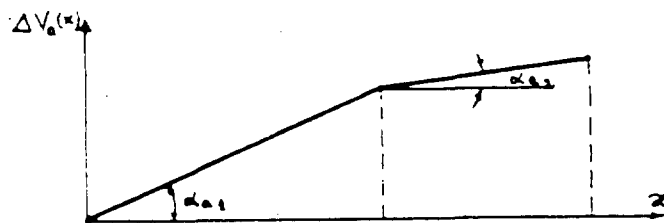


Figura 14.

Las pendientes, en este supuesto tendrán por valor:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{a1} &= |\dot{Z}_u| \cdot (I_{a1} + I_{a2}) = m_{a1}; \\ \operatorname{tg} \alpha_{r1} &= |\dot{Z}_u| \cdot (I_{r1} + I_{r2}) = m_{r1}; \end{aligned} \quad [E.56]$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{a2} &= |\dot{Z}_u| I_{a2} = m_{a2}; \\ \operatorname{tg} \alpha_{r2} &= |\dot{Z}_u| I_{r2} = m_{r2}; \end{aligned} \quad [E.57]$$

El módulo de la caída de tensión $\Delta V(x)$ lo obtendremos (ver figura 14) por:

$$\Delta(x) = \sqrt{\Delta V_a^2(x) + \Delta V_r^2(x)} \quad [E.58]$$

y forma un argumento con el origen de fases de

$$\epsilon = \psi_L - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\Delta V_r(x)}{\Delta V_a(x)} \right) \quad [E.59]$$

En este supuesto la caída de tensión entre $0 < x < l_1$ es lineal y tiene por ecuación la de una recta que pasa por el origen. Para valores

de x comprendidos entre $l_1 < x < l_2$ es un arco de parábola.

De forma genérica se puede decir que el módulo de la caída de tensión tiene por expresión

$$\Delta V(x) = \sqrt{\left(\left| \dot{Z}_u \right| \int_0^x I_a(x) dx \right)^2 + \left(\left| \dot{Z}_u \right| \int_0^x (\pm) I_r(x) dx \right)^2} \quad [E.60]$$

y su argumento

$$\epsilon = \psi_L - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\left| \dot{Z}_u \right| \int_0^x (\pm) I_r(x) dx}{\left| \dot{Z}_u \right| \int_0^x I_a(x) dx} \right) \quad [E.61]$$

El valor máximo de la caída de tensión es fácilmente deducible si se conocen las funciones $I_a(x)$ e $I_r(x)$. No obstante, este valor máximo no quiere decir que a ese punto le corresponda la mínima tensión, ya que no debemos olvidar que estamos analizando composiciones vectoriales (ver figura 15).

Para su desarrollo tomamos en el origen de fases a la tensión de alimentación $\dot{V}_A = V_A \angle 0^\circ$ y representamos un eje de referencia $E. R_a$ que será el L.G. de las caídas de tensión debidas a las componentes activas de las intensidades, en cuadratura con él tendremos, en el eje de referencia $E. R_r$, las caídas de tensión originadas por las componentes reactivas de las intensidades.

Los valores máximos de las caídas de tensión tanto activa como reactiva no coinciden, en general, con la caída de tensión máxima. Esta se determina mediante el radio máximo de una circunferencia que tenga por centro el afijo de $\dot{V}_A$ y sea tangente a L. G. $\Delta \dot{V}(x)$ (punto T_1).

Para determinar el valor de mínima tensión

($\dot{V}_{\min}$) efectuaremos una simetría respecto al punto afijo de $\dot{V}_A$, obteniendo L. G. $-\Delta \dot{V}(x)$, y trazaremos el arco de circunferencia de mínimo radio que sea tangente a este L. G. (punto T_2). dicho radio será el módulo de $\dot{V}_{\min}$.

(E.6) Veamos un distribuidor de c. a. alimentado por dos puntos a la misma tensión y con cargas $I_1 \angle -\psi_1$ e $I_2 \angle \psi_2$.

La forma de proceder es análoga a la del caso precedente:

1.º Se descompone en un diagrama de componentes de intensidades activas y reactivas con sus correspondientes ecuaciones de equilibrio

$$X_a = \sum I_{aj} - \frac{\sum I_{aj} l_j}{l} \quad [E.62]$$

$$X_r = \sum \pm I_{rj} - \frac{\sum \pm I_{rj} l_j}{l} \quad [E.63]$$

2.º Por estar alimentados el mismo potencial los extremos del distribuidor, el área delimitada por las $I_a(x)$ e $I_r(x)$ a lo largo del mismo con el eje x ha de ser nulo.

3.º El punto de corte de dichas componentes con el eje x representa un máximo de la caída correspondiente ($\Delta V_{a\max}$ o $\Delta V_{r\max}$).

4.º El cambio de signo de la componente activa significa que la componente de la intensidad procede del otro extremo o lo que es lo mismo su potencia o energía.

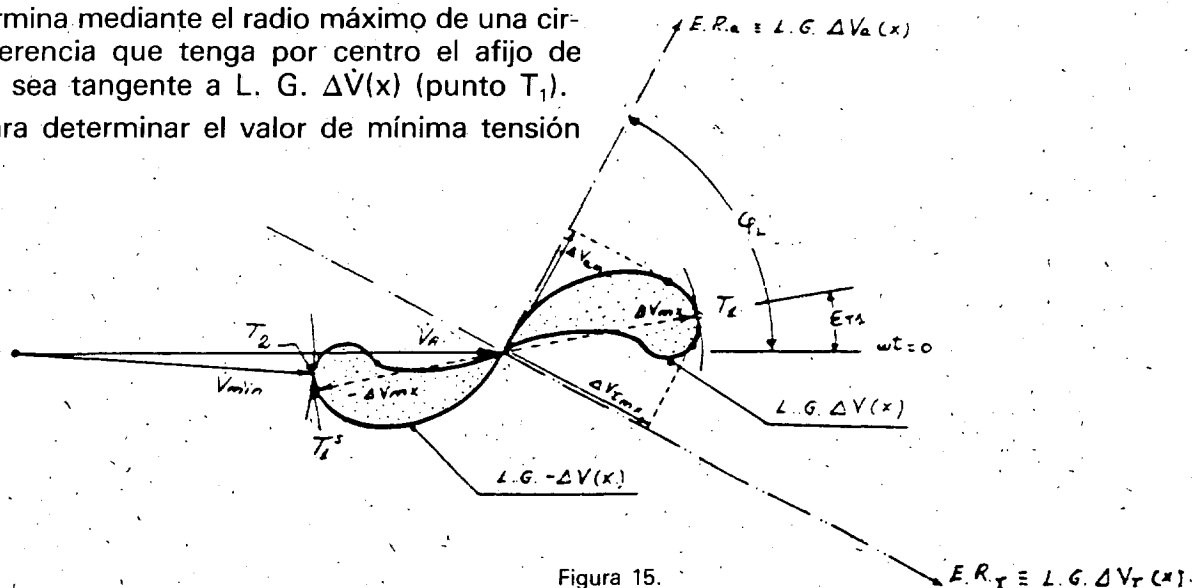


Figura 15.

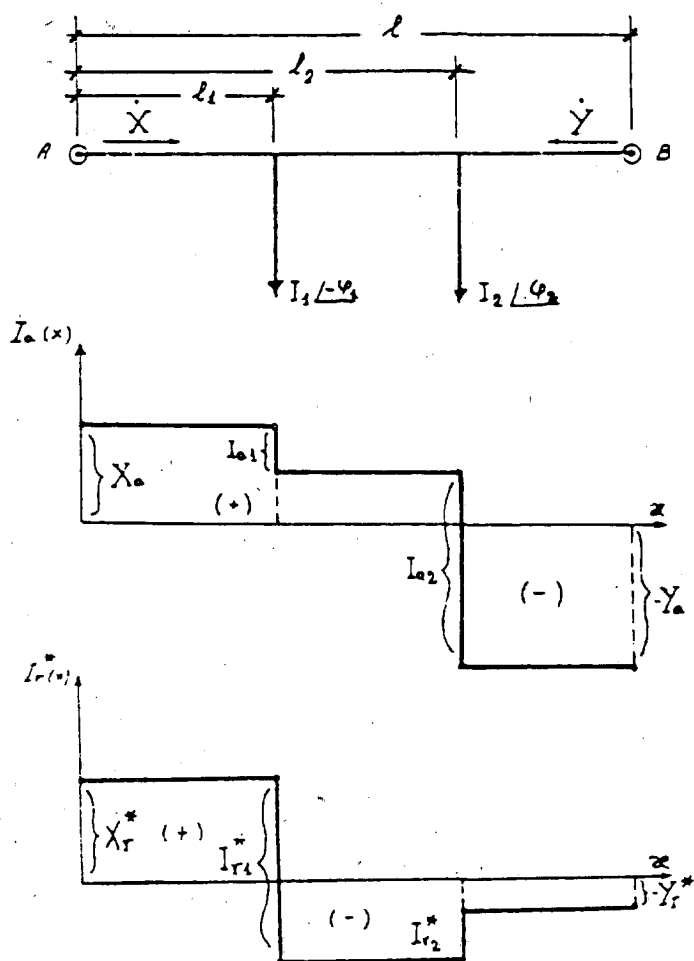


Figura 16.

5.º Para el gráfico de las componentes reactivas de la intensidad hemos tomado estas componentes cambiadas de signo, es decir, sus conjugadas ($I_r^*(x)$), la razón no es otra que la de seguir con el criterio internacionalmente admitido de que las potencias reactivas en cargas inductivas se toman como positivas y las de cargas capacitivas como negativas.

Por tanto, en el circuito equivalente de las componentes reactivas de las intensidades tomaremos a las de tipo inductivo como salientes de los nudos y entrantes en los nudos a las de tipo capacitivo.

Algunos autores diferencian las energías de tipo inductivo y capacitivo mediante la notación de energías importadas o exportadas lo que en ocasiones puede ser de más fácil interpretación.

6.º La caída de tensión originada por las

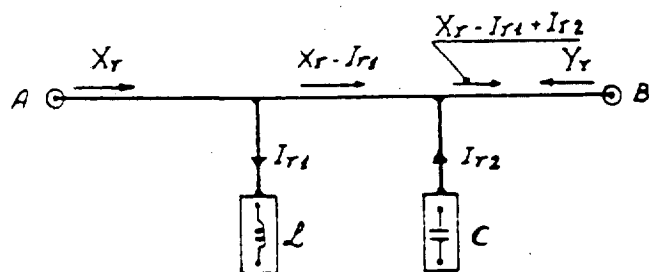


Figura 17.

componentes activas de las corrientes a lo largo del distribuidor tiene por valor

$$|\Delta \dot{V}_a(x)| = |\dot{Z}_u| \int_0^x I_a(x) \cdot dx \quad [E.64]$$

que es análoga a la caída de tensión en c. c.

7.º La caída de tensión debido a las componentes reactivas de las corrientes no tiene generalmente la misma distribución, ya que depende del tipo de carga y su módulo es

$$|\Delta \dot{V}_r(x)| = |\dot{Z}_u| \int_0^x I_r(x) \cdot dx \quad [E.65]$$

8.º Para obtener la caída de tensión resultante de ambas componentes se puede hacer punto a punto sumando los cuadrados de las ordenadas y extrayendo la raíz cuadrada.

$$\Delta V_T(x) = \sqrt{\Delta V_a(x)^2 + \Delta V_r(x)^2} \quad [E.66]$$

Para este caso (ver figura 18) la caída de tensión total a una distancia x de A es: a) Una recta para $0 < x < l_1$; por ser en este espacio la

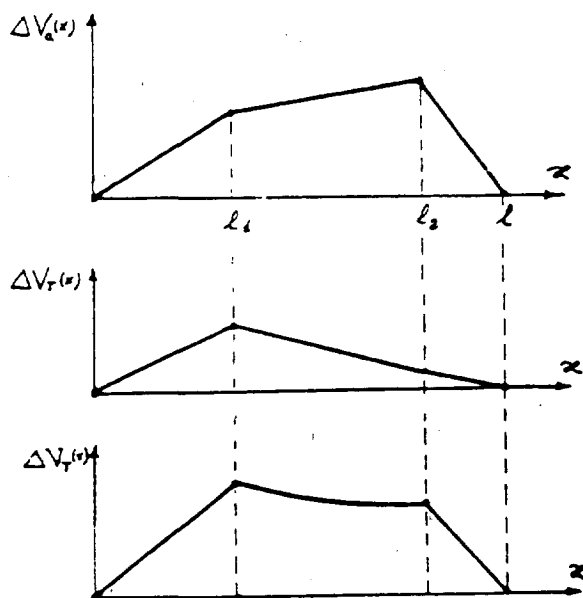


Figura 18.

$\Delta V_a(x)$ y $\Delta V_r(x)$ rectas que se cortan en el origen.

b) Una curva parabólica para $l_1 < x < l_2$ por ser $\Delta V_a(x)$ y $\Delta V_r(x)$ rectas que sí se cortan en el mismo punto de x .

La caída de tensión en función de las potencias activas y reactivas de las cargas.

Si tenemos presente que la potencia compleja tiene por expresión

$$\dot{S} = \dot{V} \dot{I} = \dot{V} I_a \pm j \dot{V} I_r = P \pm j Q \quad [E.67]$$

por tanto

$$\dot{I} = \frac{\dot{S}}{\dot{V}}$$

con lo que la ecuación (E. 50) se transforma en

$$\Delta \dot{V} = \dot{Z}_u \sum_{k=1}^n \frac{\dot{S}_k}{\dot{V}} I_k \quad [E.68]$$

En la mayoría de las aplicaciones la tensión en bornes de cada carga no difiere mucho de la nominal y de V_k se puede sacar factor común, quedando como expresión de la caída de tensión la siguiente

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V} &= \frac{\dot{Z}_u}{\dot{V}} \left(\sum_{k=1}^n P_k I_k \pm j \sum_{k=1}^n Q_k I_k \right) = \\ &= \frac{\dot{Z}_u}{\dot{V}} \sum_{k=1}^n P_k I_k \pm j \frac{\dot{Z}_u}{\dot{V}} \sum_{k=1}^n Q_k I_k \quad [E.69] \end{aligned}$$

Para cargas discretas utilizaremos las expresiones

$$\Delta \dot{V}_a = \frac{\dot{Z}_u}{\dot{V}} \sum_{k=1}^n P_k I_k \quad [E.70]$$

$$\Delta \dot{V}_r = \pm j \frac{\dot{Z}_u}{\dot{V}} \sum_{k=1}^n Q_k I_k \quad [E.71]$$

y de forma genérica

$$\Delta \dot{V}_a(x) = \frac{\dot{Z}_u}{\dot{V}} \int_0^x P(x) \cdot dx \quad [E.72]$$

«La caída de tensión de las componentes activas se obtiene integrando el diagrama de las potencias activas a lo largo del distribuidor, multiplicado por la impedancia unitaria y dividido, a su vez, por el conjugado de la tensión».

Lo mismo para

$$\Delta \dot{V}_r(x) = \frac{\dot{Z}_u}{\dot{V}} \int_0^x (\pm j) Q(x) dx \quad [E.73]$$

«La caída de tensión de las componentes reactivas se obtiene integrando el diagrama de potencias reactivas a lo largo del distribuidor multiplicado por el vector

$$\left(\frac{\dot{Z}_u}{\dot{V}^*} \right) (\pm j)»$$

Los diagramas de $P(x)$ y $Q(x)$ pueden ser datos del problema o se pueden deducir de los de las componentes de las intensidades sin más que multiplicar estas por la tensión.

Para no alargar más este punto, dejamos al lector la transformación de los diagramas de intensidades en diagramas de potencias, de todos los casos analizados previamente.

Distribuidores en A. T. con distintos niveles de tensión.

Los distribuidores estudiados anteriormente tenían las propiedades: a) De que la impedancia unitaria (Ω/Km) era única a lo largo del distribuidor. b) La tensión a lo largo del mismo se diferenciaba muy poco de la tensión nominal de las cargas, lo cual permitía pasar de los diagramas de intensidades a los de potencias sin más que multiplicar por V .

En los distribuidores en A. T. las impedancias unitarias de las líneas no son iguales a ambos lados de los transformadores ni la propia impedancia de estos tiene relación alguna con la de aquellos.

Se propone, por tanto, para resolver los distribuidores en A. T. el seguir los siguientes pasos:

a) Traducir a un diagrama único conductivo las líneas y transformadores que componen el distribuidor.

b) Elección ordenada de los parámetros base para efectuar la transformación del apartado anterior.

c) Determinar los diagramas de las componentes activas y reactivas (intensidades o potencias). I_a p. u. (x); I_r p. u. (x) o P p. u. (x); Q p. u. (x).

d) Evaluación de las caídas de tensión de las componentes activas $\dot{V}_a(x)$ y reactivas $\dot{V}_r(x)$ a lo largo del distribuidor.

e) Caída de tensión total $\Delta \dot{V}(x)$

f) Tensión a lo largo del distribuidor $\dot{V}(x)$.

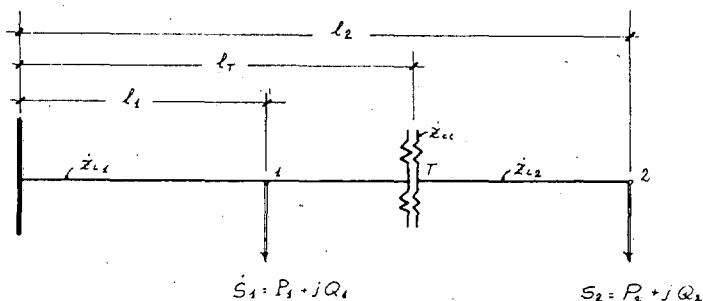
Analicemos el siguiente supuesto:

(E.7) Sea una subestación M con un nivel de tensión $\dot{V}_M$ que alimenta a cargas de valor $\dot{S}_1$ y $\dot{S}_2$, tal como se indica en la figura 19; el transformador tiene por relación de transformación V_1/V_2 , Potencia nominal S_T y una impedancia de cortocircuito $\dot{Z}_{cc} = R_{cc} + jX_{cc}$; la cuál suele venir expresada en % ó en p. u. sobre los parámetros nominales del transformador; las impedancias de las líneas son conocidos:

$$\dot{Z}_{L1} = Z_{L1} \angle \psi_{L1} \text{ (}\Omega/\text{km)} \text{ y}$$

$$\dot{Z}_{L2} = Z_{L2} \angle \psi_{L2} \text{ (}\Omega/\text{km)}.$$

— Diagrama unifilar.



— Diagrama p. u. equivalente.

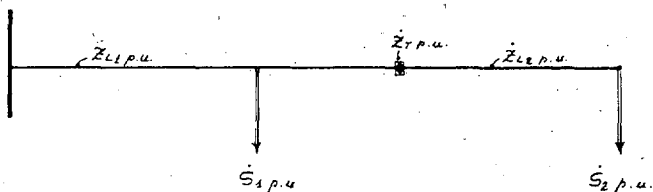


Figura 19.

Con la adecuada elección de los parámetros base, potencia y tensión, por ejemplo, (S_B , V_B), determinaremos:

1.º Las impedancias unitarias

$$\dot{Z}_{L1} \text{ p.u.} = \frac{\dot{Z}_{L1}}{Z_B} = \frac{\dot{Z}_{L1}}{V_{B1}^2} \cdot S_B \quad [E.74]$$

$$\dot{Z}_{L2} \text{ p.u.} = \dot{Z}_{L2} \cdot \left(\frac{S_B}{V_{B2}^2} \right) \quad [E.75]$$

con

$$V_{B2} = V_{B1} \cdot \frac{V_2}{V_1}$$

$$\dot{Z}_T \text{ p.u.} = \dot{Z}_{cc} \left(\frac{S_B}{S_T} \right) \left(\frac{V_1}{V_{B1}} \right)^2 \quad [E.76]$$

2.º Las intensidades en p. u. y sus componentes activas y reactivas (o las potencias activas y reactivas en p. u.) (figura 20, a y b).

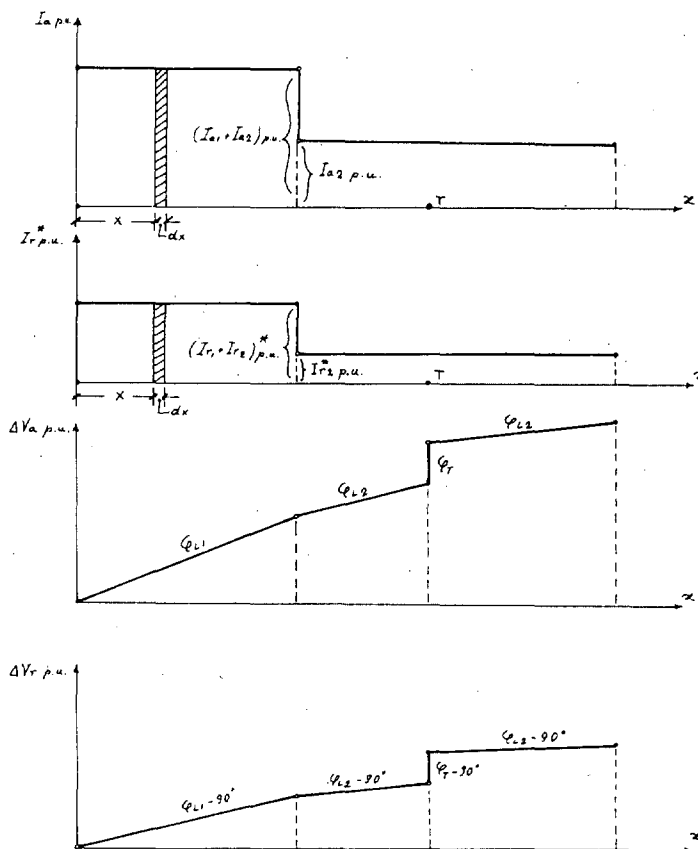


Figura 20.

3.º Las caídas de tensión de las componentes activas tendrán por expresión para los distintos tramos:

$$\Delta \dot{V}_a(x)_{p.u.} = \dot{Z}_{L1} p.u. \int_0^{l_1} (I_{a1} + I_{a2})_{p.u.} dx$$

para $0 < x < l_1$ [E.77]

$$\Delta \dot{V}_a(x)_{p.u.} = \dot{Z}_{L1} p.u. \int_{l_1}^{l_T} (I_{a2})_{p.u.} dx$$

para $l_1 < x < l_T$ [E.78]

$$\Delta \dot{V}_a(x)_{p.u.} = \dot{Z}_T p.u. I_{a2} p.u.$$

para $l_T < x < l_T +$ [E.79]

(esta caída de tensión representa una discontinuidad en el gráfico de $\Delta V_a(x)$ puesto que las dimensiones del transformador son despreciables si se comparan con la longitud de la línea).

$$\Delta V_a(x)_{p.u.} = Z_{L2} p.u. \int_{l_T}^{l_2} (I_{a2})_{p.u.} dx$$

para $l_T < x < l_2$ [E.80]

Estas caídas de tensión vendrán afectadas, en cada tramo, por los argumentos de las líneas y transformadores.

De forma similar procederemos para determinar las caídas de tensión debida a las componentes reactivas.

$$\Delta \dot{V}_r(x)_{p.u.} = -j \dot{Z}_{L1} p.u. \int_0^{l_1} (I_{r1} p.u. + I_{r2} p.u.) dx$$

para $0 < x < l_2$ [E.81]

$$\Delta \dot{V}_r(x)_{p.u.} = -j \dot{Z}_{L1} p.u. \int_{l_1}^{l_T} (I_{r2})_{p.u.} dx$$

para $l_1 < x < l_T$ [E.82]

$$\Delta \dot{V}_r(x)_{p.u.} = -j \dot{Z}_T p.u. I_{r2} p.u.$$

para $l_T < x < l_T +$ [E.83]

(punto de discontinuidad por la misma razón apuntada para las componentes activas)

$$\Delta \dot{V}_T(x)_{p.u.} = -j \dot{Z}_{L2} p.u. \int_{l_T}^{l_2} (I_{r2})_{p.u.} dx$$

para $l_T < x < l_2$ [E.84]

Las caídas de tensión debido a las componentes reactivas estarán en cuadratura respecto de las componentes activas y estarán en retraso para cargas inductivas y en adelanto para cargas capacitivas.

4.º La caída de tensión resultante la obtendremos mediante la composición vectorial de $\Delta V_a(x)$ y $\Delta V_r(x)$ es decir:

de módulo $\Delta V(x)_{p.u.} =$

$$= \sqrt{|\Delta V_a(x)_{p.u.}|^2 + |\Delta V_r(x)_{p.u.}|^2} \quad [E.85]$$

y argumento $\varphi(x) = \varphi_{L/T} - \text{tg}^{-1}$

$$\frac{\Delta V_r(x)_{p.u.}}{\Delta V_a(x)_{p.u.}} \quad [E.86]$$

Es decir ecuaciones análogas a las (E. 58) y (E. 59) pero utilizando parámetros en p. u. (Ver Anexo I).

CONCLUSIONES

De entre las muchas que se pueden extraer de este estudio, destacamos como más importantes las siguientes:

1. La total analogía que existe entre la caída de tensión con el momento flector y la intensidad con el esfuerzo cortante, para distribuidores que tengan resistencia uniforme en c. c. o impedancia uniforme en c. a.
2. La intensidad o intensidades de alimentación por uno o dos extremos de un distribuidor tiene las mismas ecuaciones que las de las ecuaciones de las reacciones en una viga empujada en un extremo o apoyada en los dos, respectivamente. (Ver casos 1.º y 2.º de la 1.ª parte).
3. Los diagramas correspondientes a las caídas de tensión de los distintos supuestos de dis-

tribuidores que hemos analizado, se identifican plenamente en los respectivos diagramas de momentos de casos homólogos en el cálculo de vigas.

4. En los distribuidores en c. a. las máximas caídas de tensión no necesariamente coinciden con el punto de mínima tensión.

5. Hemos generalizado el procedimiento de cálculo para distribuidores en A. T. con distintos niveles de tensiones utilizando el conocido método p. u. en donde las caídas de tensión sean equiparables a lo largo del mismo.

6. A modo de resumen se puede decir que los distribuidores y las vigas son dos sistemas semejantes a los que se les puede aplicar los criterios de dualidad ya que ambos dan lugar a las mismas ecuaciones, o a ecuaciones semejantes, siempre que la resistencia o impedancia unitaria sea constante a lo largo de cada tramo del distribuidor. Aquellos casos donde la impedancia o resistencia esté localizada en un punto, caso de transformadores, bobinas de reactancia, etc, se pueden considerar como puntos singulares cuyo análisis no ofrece dificultad alguna.

ANEXO I

Con el fin de matizar y puntualizar aquellos aspectos ue en la exposición teórica no hubieran quedado suficientemente claros, exponemos aquí un caso práctico concreto en A. T.

Sea un distribuidor formado por las líneas L1 y L2 tal como se indica en la figura A-1 con salida de una subestación A) y con cargas $\hat{S}_1$ a 30 Km. de A y $\hat{S}_2$ a 5 Km. del transformador T.

Las características de las líneas son: $\dot{Z}_{L1} = 0,20 + j1,5 \Omega/\text{Km.}$ y fase $\dot{Z}_{L2} = 0,10 + j0,5 \Omega/\text{Km.}$ y fase; el transformador tiene por parámetros nominales: $S_T = 15 \text{ MVA}$, $r_t = 110/11 \text{ KV}$; $\dot{Z}_{cc} \text{ p. u.} = 0,01 + j0,1$

Supongamos que las cargas son las indicadas y que la tensión en A es del $120 \angle 0^\circ \text{ KV}$, se pide: calcular la tensión a lo largo del distribuidor.

Solución:

1.º Determinaremos el circuito p. u. equivalente tomando como parámetros base $V_{B1} = 120 \text{ KV}$ y $S_B = 50 \text{ MVA}$.

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{L1} \text{ p. u.} &= Z_{L1} \left(\frac{S_B}{V_{B1}^2} \right) = \\ &= (0,20 + j1,5) \left(\frac{50}{120^2} \right) = \\ &= 0,000694 = j0,005208 = \\ &= 0,005254 \angle 82,40^\circ \text{ p.u./km}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{L2} \text{ p. u.} &= \dot{Z}_{L2} \left(\frac{S_B}{V_{B2}^2} \right) = \\ &= (0,10 + j0,5) \frac{50}{12^2} = \\ &= 0,034722 + j0,173611 = \\ &= 0,177049 \angle 78,69^\circ \text{ p.u./km}\end{aligned}$$

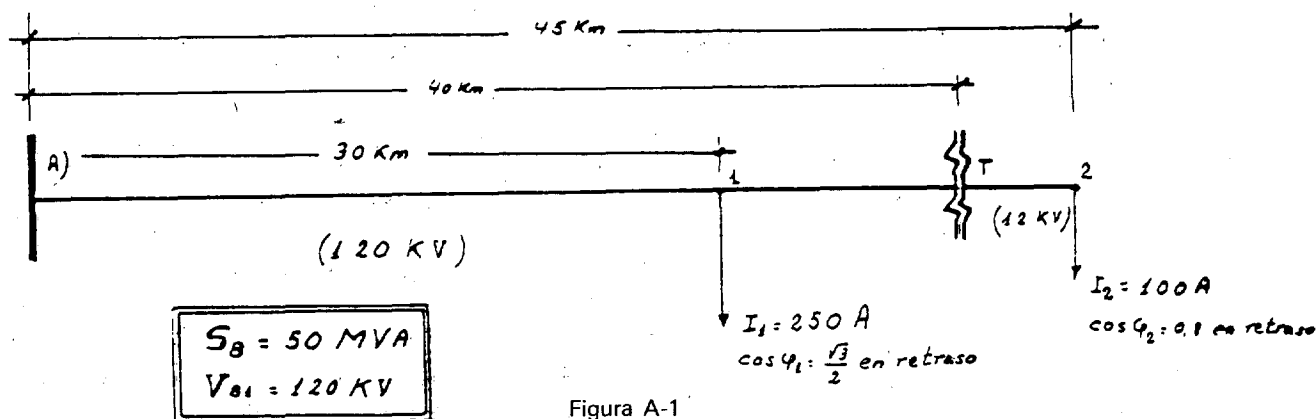


Figura A-1

$$\begin{aligned}\dot{Z}'_{cc} \text{ p.u.} &= \dot{Z}_{cc} \left(\frac{S_B}{S_T} \right) \left(\frac{V_{T1}}{V_{B1}} \right)^2 = \\ &= (0.01 + j0.10) \left(\frac{50}{15} \right) \left(\frac{110}{120} \right)^2 = \\ &= 0.028009 + j0.280093 = \\ &= 0.281490 \angle 84.29^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

Las intensidades serán

$$I_{a2} \text{ p.u.} + jI_{l2} \text{ p.u.} = \dot{I}_2 \text{ p.u.} =$$

$$\frac{I_2}{I_{B2}} = \frac{100 \angle -36.87^\circ}{50.000 \sqrt{3} \times 12} =$$

$$= 0.041569 \angle -36.78^\circ =$$

$$0.033255 - j0.024942 \text{ p.u.}$$

$$\dot{I}_1 \text{ p.u.} = I_{a1} \text{ p.u.} + jI_{l1} \text{ p.u.} =$$

$$\frac{\dot{I}_1}{I_{B1}} = \frac{250 \angle -30^\circ}{50.000 \sqrt{3} \times 120} = 1.039230 \angle -30^\circ =$$

$$= 0.900000 - j0.519615 \text{ p.u.}$$

2.º Diagramas de las componentes activas y reactivas de las corrientes a lo largo del distribuidor y diagramas de las caídas de tensión respectivas.

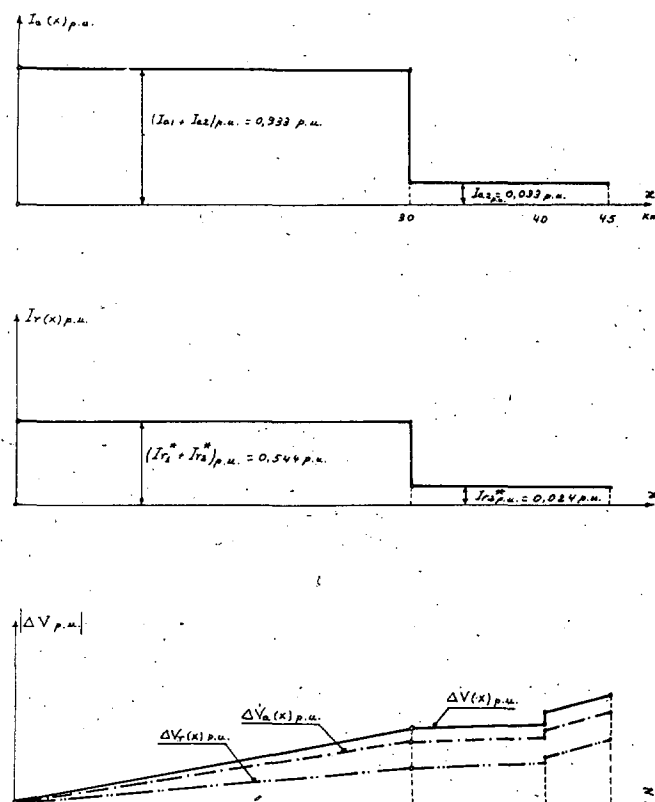


Figura A-3

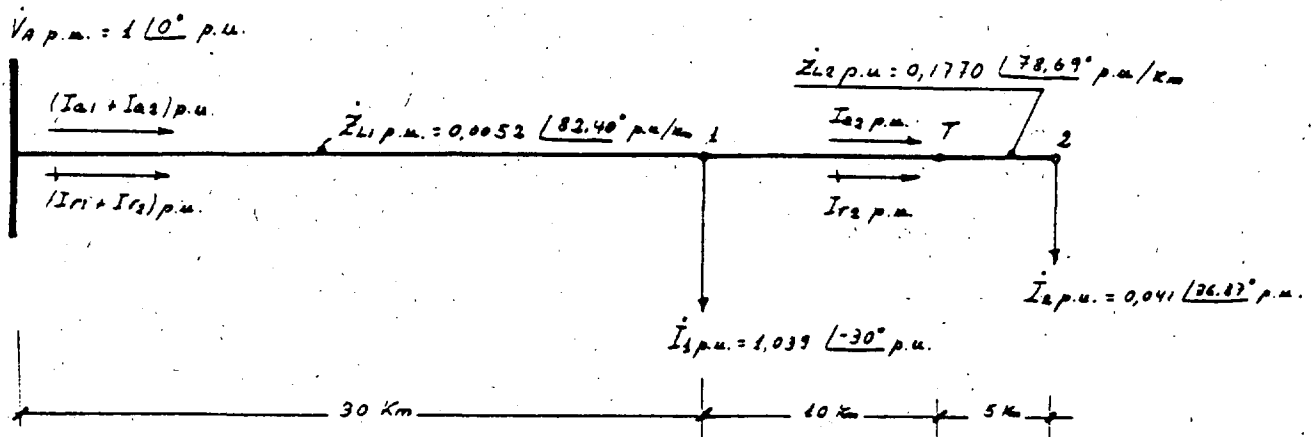


Figura A-2

$$\begin{aligned}(\Delta \dot{V}_{A-1})_{ap.u.} &= Z_{L1p.u.} \int_0^{l_1} (I_{a1p.u.} + I_{a2p.u.}) dx = \\&= 0,005254 \angle 82,40^\circ \int_0^{30} 0,933255 dx = \\&= 0,147100 \angle 82,40^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \dot{V}_{A-1})_{rp.u.} &= -jZ_{L1p.u.} \int_0^{l_1} (I_{r1p.u.} + I_{r2p.u.}^*) dx = \\&= -j0,005254 \angle 82,40^\circ \int_0^{30} 0,544557 dx = \\&= 0,085833 \angle 82,40 - 90^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{V}_{A-1p.u.} &= (\Delta \dot{V}_{A-1})_{ap.u.} + (\Delta \dot{V}_{A-1})_{rp.u.} = \\&= 0,147100 \angle 82,40^\circ + \\&+ 0,085833 \angle -7,6^\circ = 0,170311 \angle 52,13^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{1p.u.} &= \dot{V}_{Ap.u.} - (\Delta \dot{V}_{A-1})_{p.u.} = 1 \angle 0^\circ - \\&- 0,170311 \angle 52,13^\circ = 0,905504 \angle -8,53^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \dot{V}_{1-T-})_{ap.u.} &= \\&= 0,005254 \angle 82,40^\circ \int_{30}^{40} 0,033255 dx = \\&= 0,001747 \angle 82,40^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \dot{V}_{1-T-})_{rp.u.} &= 1 \angle -90^\circ \times \\&\times 0,005254 \angle 82,40^\circ \int_{30}^{40} 0,024942 dx = \\&= 0,001310 \angle -7,6^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \dot{V}_{1-T-})_{p.u.} &= (\Delta \dot{V}_{1-T-})_{ap.u.} + (\Delta \dot{V}_{1-T-})_{rp.u.} = \\&= 0,001747 \angle 82,40^\circ + 0,001310 \angle -7,6^\circ = \\&= 0,002183 \angle 45,53^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{Tp.u.} &= \dot{V}_{1p.u.} - (\Delta \dot{V}_{1-T-})_{p.u.} = \\&= 0,905504 \angle -8,54^\circ - 0,002183 \angle 45,53^\circ = \\&= 0,904225 \angle -8,65^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \dot{V}_{T-T+})_{ap.u.} &= \dot{Z}_{ccp.u.} \cdot I_{a2} = \\&0,281490 \angle 84,29^\circ \cdot 0,033255 = \\&0,009360 \angle 84,29^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \dot{V}_{T-T+})_{rp.u.} &= -\dot{Z}_{ccp.u.} \cdot I_{r2} = \\&= 1 \angle 90^\circ \cdot 0,281490 \angle 84,29^\circ \cdot 0,04942 = \\&= 0,007020 \angle -5,71^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \dot{V}_{T-T+})_{p.u.} &= (\Delta \dot{V}_{T-T+})_{ap.u.} + \\&+ (\Delta \dot{V}_{T-T+})_{rp.u.} = \\&= 0,009360 \angle 84,29^\circ + 0,007020 \angle -5,71^\circ = \\&0,011700 \angle -47,42^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{T+p.u.} &= \dot{V}_{Tp.u.} - (\Delta \dot{V}_{T-T+})_{p.u.} = \\&= 0,904225 \angle -8,65^\circ - \\&- 0,011700 \angle 47,42^\circ = 0,897747 \angle -9,27^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$(\Delta \dot{V}_{T^+ - 2})_{ap.u.} = \dot{Z}_{L_{2p.u.}} \int_{l_T}^{\frac{1}{2}} I_{a_{2p.u.}} dx =$$

$$= 0,177049 \angle 78,69^\circ \cdot \int_{40}^{45} 0,033255 dx =$$

$$= 0,029438 \angle 78,69^\circ \text{ p.u.}$$

$$(\Delta \dot{V}_{T^+ - 2})_{p.u.} = (\Delta \dot{V}_{T^+ - 2})_{ap.u.} + (\Delta \dot{V}_{T^+ - 2})_{rp.u.} =$$

$$= 0,029438 \angle 78,69^\circ + 0,022079 \angle -11,31^\circ =$$

$$= 0,036797 \angle 41,81^\circ \text{ p.u.}$$

$$(\Delta \dot{V}_{T^+ - 2})_{rp.u.} = -j \dot{Z}_{L_{2p.u.}} \int_{l_T}^{\frac{1}{2}} I_{r_{2p.u.}} dx =$$

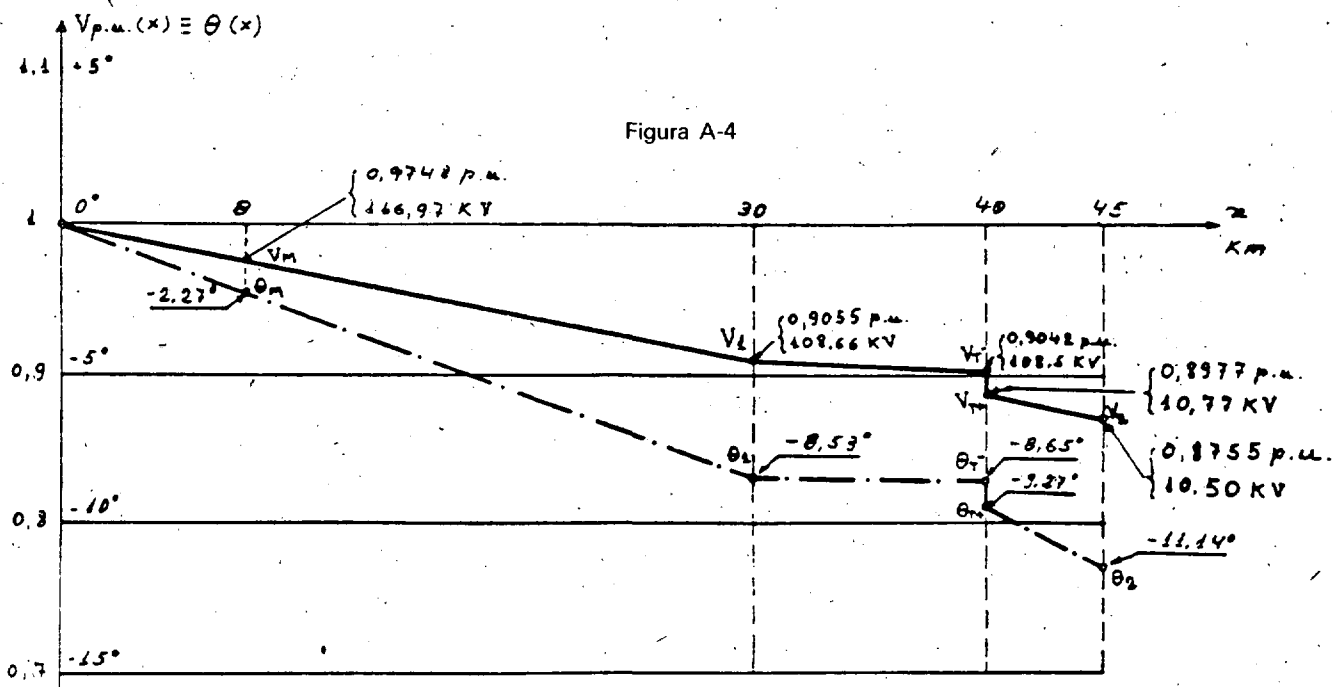
$$= 1 \angle -90^\circ \cdot 0,177049 \angle 78,69^\circ \int_{40}^{45} 0,024942 dx =$$

$$= 0,022079 \angle -11,31^\circ \text{ p.u.}$$

$$\dot{V}_{2p.u.} = \dot{V}_{T^+ p.u.} - (\Delta \dot{V}_{T^+ - 2})_{p.u.} =$$

$$= 0,897747 \angle -9,27^\circ - 0,036797 \angle 41,81^\circ =$$

$$= 0,875114 \angle -11,14^\circ \text{ p.u.}$$



Los resultados vectoriales nos permiten representar el módulo y argumento de la tensión ($V_{p.u.}(x)$ y $\theta(x)$) a lo largo del distribuidor.

Con estos gráficos se puede evaluar el módulo y argumento de la tensión en cualquier punto de una forma simple; supongamos que nos interesa conocer estos valores a 8 Km. de la subestación, tendríamos:

$$\Theta_M = -\frac{8}{30} \cdot 8,53^\circ = -2,27^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow V_{Mp.u.} = 0,9748 \angle -2,27^\circ \text{ p.u.}$$

es decir $V_M = V_{Mp.u.} \cdot V_B =$

$$= 0,9748 \angle -2,27^\circ \cdot 120 =$$

$$= 116,97 \angle -2,27^\circ \text{ K.V}$$

$$V_{Mp.u.} = 1 - \frac{8}{30} (1 - 0,9055) = 0,9748 \text{ p.u.}$$

Terminamos este supuesto efectuando un balance de potencias en los distintos puntos.

Potencia absorbida por la carga en el punto 2.

$$\begin{aligned}\dot{S}_2 \text{ p.u.} &= \dot{V}_2 \text{ p.u.} \cdot \dot{I}_2^* \text{ p.u.} = \\ &= 0,875114 \angle -11,14^\circ \cdot 0,041569 \angle 36,87^\circ = \\ &= 0,036378 \angle 25,73^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{S}_2 &= \dot{S}_2 \text{ p.u.} \cdot S_B = 0,036378 \times 50 \angle 25,73^\circ = \\ &= \angle 25,73^\circ \text{ (MVA)} = \\ &= 1,6385 + j0,7896 \text{ MW;MVAR}\end{aligned}$$

Potencia de salida del secundario del transformador

$$\begin{aligned}\dot{S}_T \text{ p.u.} &= \dot{V}_T \text{ p.u.} \cdot \dot{I}_2^* \text{ p.u.} = \\ &= 0,897747 \angle -9,27^\circ \cdot 0,041569 \angle 36,87^\circ = \\ &= 0,0373,8 \angle 27,6^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{S}_T^+ &= \dot{S}_T \text{ p.u.} \cdot S_B = 0,037318 \times 50 \angle 27,6^\circ = \\ &= 1,865922 \angle 27,6^\circ \text{ MVA} = \\ &= 1,6535 + -j0,8644 \text{ (MW;MVAR)}\end{aligned}$$

Potencia perdida en la línea L2

$$\begin{aligned}\dot{S}_p L &= \dot{S}_T^+ - \dot{S}_2 = 10^3 (0,015 + j0,074) = \\ &= 15 + j75 \text{ (KW;KVAR)}\end{aligned}$$

Potencia de entrada al primario del transformador

$$\begin{aligned}\dot{S}_T - \text{p.u.} &= \dot{V}_T - \text{p.u.} \cdot \dot{I}_2^* \text{ p.u.} = \\ &= 0,904225 \angle -8,65^\circ \cdot 0,041569 \angle 36,87^\circ = \\ &= 0,037587 \angle 28,22^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$S_T^- = S_T - \text{p.u.} \cdot S_B = 0,037587 \times$$

$$\begin{aligned}&\times 50 \angle 28,22^\circ = 1,879386 \angle 28,22^\circ \text{ (MVA)} = \\ &= 1,6559 + j0,8886 \text{ (MW;MVAR)}\end{aligned}$$

Potencia absorbida por la carga en el punto 1

$$\begin{aligned}S_1 \text{ p.u.} &= V_1 \text{ p.u.} \cdot I_1^* \text{ p.u.} = \\ &= 0,905504 \angle -8,53^\circ \times 1,039230 \angle 30^\circ = \\ &= 0,941026 \angle 21,47^\circ \text{ p.u.} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_1 &= S_1 \text{ p.u.} \cdot S_B = 0,941026 \angle 21,47^\circ \times 50 = \\ &= 47,0513 \angle 21,47^\circ \text{ (MVA)} = \\ &= 43,7864 + j17,2214 \text{ (MW;MVAR)}\end{aligned}$$

Potencia de salida, en el punto 1, hacia el transformador T.

$$\begin{aligned}(\dot{S}_1 - T) \text{ p.u.} &= \dot{V}_1 \text{ p.u.} \times \dot{I}_2^* \text{ p.u.} = \\ &= 0,905504 \angle -8,53^\circ \times 0,041569 \angle 36,87^\circ = \\ &= 0,037640 \angle 28,34^\circ \text{ p.u.}\end{aligned}$$

$$\dot{S}_1 - T = (\dot{S}_1 - T) \text{ p.u.} \cdot$$

$$\begin{aligned}\dot{S}_B &= 0,037640 \times 50 \angle 28,34^\circ = \\ &= 1,882044 \angle 28,34^\circ \text{ (MVA)} = \\ &= 1,6564 + j0,8934 \text{ (MW;MVAR)}\end{aligned}$$

Potencia de entrada, al punto 1, procedente de la subestación A.

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 - L_1 &= \dot{S}_1 + \dot{S}_{1-T} = \\ &= 45,4428 + j18,1148 \text{ (MW;MVAR)}\end{aligned}$$

Potencia de salida de la subestación A.

$$\dot{S}_{A \text{ p.u.}} = \dot{V}_{A \text{ p.u.}} \cdot \dot{I}_T^* \text{ p.u.} =$$

$$= 1 \angle 0^\circ \cdot 1,0805 \angle 30,26^\circ \text{ p.u.}$$

$$\dot{S}_A = \dot{S}_{A \text{ p.u.}} \cdot S_B = 1,0805 \times 50 \angle 30,26^\circ =$$

$$= 54,0255 \angle 30,26^\circ \text{ (MVA)} =$$

$$= 46,6626 + j27,2277 \text{ (MW; MVAR)}$$

Rendimiento del transporte.

$$\eta = \frac{P_1 + P_2}{P_{TA}} =$$

$$= \frac{1,6385 + 43,7864}{46,6626} \times 100 = 97,34 \%$$

Evidentemente en P_{TA} están incluidas las pérdidas en las líneas y transformador.

BIBLIOGRAFIA

- BELDA VILLENA, E.: «Mecánica clásica». Ed. Vizcaina. Bilbao, 1965.
- STIOPIN, P. A.: «Resistencia de materiales». Ed. MIR. 1976.
- TIMOSHENKO, S.: «Resistencia de materiales». Ed. Espasa Calpe. Madrid, 1976.
- PARKER SMITH, S.: «Problemas de Ingeniería Eléctrica». Ed. Selecciones Científicas. 1962.
- WEEDY, B. M.: «Sistemas Eléctricos de gran Potencia». Ed. Reverté. 1978.
- FRAILE MORA, J.: «Instalaciones Eléctricas». (2 tomos). Madrid, 1976.
- HERING, P.: «Canalizaciones, material de A. T. y B. T., Centrales». (Tomo X E.T.E.). Ed. Labor. 1976.

STEVENSON, W. D.: «Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia». McGRAW-HILL. 1976.

ELGERD, O. I.: «Electric Energy Systems Theory». McGRAW-HILL. 1982.

NOTACIONES Y ABREVIATURAS

- A. T. (alta tensión).
 B. T. (baja tensión).
 $\dot{I}$ (vector intensidad).
 $\dot{I}^*$ (vector conjugado de $\dot{I}$).
 I_a (componente activa de $\dot{I}$).
 I_r (componente reactiva de $\dot{I}$).
 p. u. (por unidad).
 P (potencia activa).
 Q (potencia reactiva).
 $\dot{S}$ (potencia compleja).
 $\dot{S}^*$ (conjugada de $\dot{S}$).
 V (vector tensión).
 $\dot{V}$ (vector tensión).
 $\dot{V}^*$ (vector conjugado de $\dot{V}$).
 T (punto representativo de entrada al transformador).
 T^+ (punto representativo de salida del transformador).
 J (densidad lineal de carga) (A/m).
 θ (ángulo de par o ángulo entre una tensión cualquiera y la de referencia).

Luis Gaspar Vega Argüelles



Puertos de Santander del Grupo XXVIII «Sistemas Eléctricos».

Nacido en Campo de Caso (Asturias), obtuvo el título de Perito Industrial por la Escuela de Gijón en 1964 y de Ingeniero Industrial por la Escuela de Bilbao en 1970 y desde 1971 es Catedrático E. U. del Grupo XI «Electricidad I». Doctor Ingeniero Industrial por la Escuela de Bilbao en 1982 y desde 1984 Profesor Adjunto de la E.T.S. de Ingeniero de Caminos, Canales y