

# Sobre la estabilidad, según Liapunov, de un sólido hiperelástico sometido a fuerzas hidrostáticas (\*)

Por RAFAEL RODRIGUEZ REBOLLO

Doctor Ingeniero de Caminos, C. y P.

*Para una posición de equilibrio de un sólido hiperelástico, compresible e isótropo, de forma arbitraria, sometido a fuerzas constantes en magnitud y dirección (fuerzas muertas) e hidrostáticas, se obtiene un criterio general de estabilidad lineal según Liapunov en función de las tensiones principales. Se establecen también condiciones suficientes de estabilidad en función de una sola tensión principal y de la desigualdad de Korn. Finalmente, para una aproximación usual en ingeniería, se obtienen otras condiciones suficientes de estabilidad.*

## 1. INTRODUCCION

La estabilidad de sólidos elásticos isótropos en equilibrio sometidos a fuerzas muertas e hidrostáticas ha sido examinada por diversos autores [1, 2, 3, 4]. Sus trabajos no se refieren a la estabilidad según Liapunov, sino al criterio de la energía. El cálculo de la estabilidad se reduce al problema algebraico de determinar cuando una forma cuadrática es definida positiva, utilizando la desigualdad de Korn y la condición de momento nulo con el fin de excluir ciertos movimientos como sólido rígido.

Recientemente, R. J. Knops y E. W. Wilkes [5] han desarrollado una teoría general de estabilidad elástica según Liapunov. Sobre esta base, hemos obtenido [6] condiciones suficientes de estabilidad según Liapunov para cargas muertas, utilizando la energía de deformación como funcional de Liapunov e introduciendo la expresión de Holden para las componentes del tensor elástico, así como la desigualdad de Korn.

Las cargas hidrostáticas son conservativas para ciertas condiciones [5] y el análisis de estabilidad lineal puede realizarse utilizando como

funcional de Liapunov, la energía de deformación aumentada aditivamente por una función potencial.

En este trabajo, consideramos la estabilidad lineal según Liapunov de un estado de equilibrio de un sólido hiperelástico, compresible e isótropo, de forma arbitraria, sometido a fuerzas muertas y una fuerza hidrostática constante y uniforme en todos los puntos de parte del contorno del sólido. En el resto del contorno, se consideran incrementos nulos de los desplazamientos con el fin de que las fuerzas hidrostáticas sean conservativas y para excluir movimientos como sólido rígido. Utilizamos la expresión de Holden para las componentes del tensor elástico y obtenemos un criterio general de estabilidad en función de las tensiones principales. Para los tres casos considerados para los signos de las tensiones, obtenemos cotas para los términos que aparecen en nuestra funcional de Liapunov y los criterios de estabilidad pueden expresarse en función de una sola tensión principal. Cuando el tensor de esfuerzos es uniforme en todo el sólido, utilizamos la desigualdad de Korn. Como es usual en diversos problemas de ingeniería, posteriormente despreciamos los términos de la expresión de Holden que son lineales en las componentes del tensor de esfuerzos y obtenemos otras condiciones suficientes de estabilidad.

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de enero de 1986.

## 2. FORMULACION GENERAL

Consideramos un sólido hiperelástico comprensible isótropo de forma arbitraria, inicialmente en un estado libre de esfuerzos, configuración de referencia homogénea  $C_0$ , con un volumen material  $V_0$  limitado por una superficie material  $S_0$ . Las configuraciones original, o no perturbada, y perturbada serán designadas  $C$  y  $C^p$ , respectivamente.

Nos referimos a un sistema único fijo de coordenadas cartesianas rectangulares, con  $X_A$  las coordenadas materiales de la partícula  $X$  en  $C_0$  y  $x_i$  sus coordenadas en el instante  $t$ , en  $C$ :

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t), \quad i = 1, 2, 3$$

$$0 < \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \right) = \det(x_{i,A}) < \infty$$

Las ecuaciones variacionales de movimiento, con respecto a la configuración  $C$ , en la aproximación lineal, son:

$$(d_{ijl} u_{k,l})_{,ij} = \mu \ddot{u}_i \quad \forall x \in [0, \infty) \quad [1]$$

con las condiciones de contorno:

$$u_i = 0 \quad \bar{S}_1 x(0, \infty) \quad [1]^1$$

$$n_j d_{ijkl} u_{k,l} = t_i \quad S_2 x(0, \infty)$$

incluyendo no solamente fuerzas de superficie hidrostáticas constantes y uniformes en  $S_2$ , sino también fuerzas de volumen superpuestas que son constantes en magnitud y dirección (fuerzas muertas).

La primera de las condiciones (1)<sup>1</sup> nos asegura la no existencia de movimientos rígidos.

En (1) y (1)<sup>1</sup>,  $\mu$  es la densidad de masa en  $C$ ;  $\mu_i = x_i^p - x_i$ ;  $n_i$ , las componentes del vector unitario normal a  $S_2$ ,  $S = \bar{S}_1 \cup S_2$ ;  $t_i$ , el incremento de las fuerzas de superficie;  $i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  y

$$\begin{aligned} d_{ijkl} &= c_{ijkl} + \sigma_j \delta_{ik} = d_{klij} \\ c_{ijkl} &= c_{ijlk} = c_{klij} = c_{jilk} \end{aligned} \quad [2]$$

$$= 4\mu x_{i,N} x_{k,M} x_{l,B} x_{j,A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial C_{AN} \partial C_{BM}}$$

donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos,  $C_{AN} = X_{i,A} X_{i,N}$  es el tensor de deformación de Green y  $\phi$  es la energía libre.

Cuando la configuración original  $C$  representa una pequeña deformación a partir de  $C_0$ , los componentes  $C_{ijkl}$  del tensor elástico adoptan la expresión:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + A_1 6 \delta_{ij} \delta_{kl} + \\ &+ A_2 \sigma \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\lambda + m}{\mu} (\delta_{ij} \sigma_{kl} + \sigma_{ij} \delta_{kl}) + \\ &+ 2(\sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{jl} \delta_{ik}) + \frac{n}{2\mu} e_{ils} e_{jkt} \sigma_{st} \end{aligned} \quad [3]$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \cdot \left[ 2l - 2m - \lambda - \frac{4\lambda(\lambda + m) + n\lambda}{2\mu} \right] \\ A_2 &= \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \cdot \left[ 2(m - \mu) - 4\lambda + \frac{n\lambda}{2\mu} \right] \end{aligned}$$

siendo  $\lambda$  y  $\mu$  las constantes de Lamé asociadas con la pequeña deformación inicial;  $l$ ,  $m$  y  $n$ , las constantes elásticas de segundo orden de Murnaghan;  $e_{ijk}$ , el símbolo de permutación y  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  la traza del tensor de esfuerzos.

Sea  $p$  la magnitud constante por unidad de área de las fuerzas hidrostáticas. Conocemos que:

$$\begin{aligned} \int_{S_2(t)} t_i \dot{u}_i dS &= \frac{p}{2} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} (u_{i,i} u_{j,j} - u_{i,j} u_{j,i}) dv = \\ &= \frac{p}{2} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} (e_{ii} e_{jj} - e_{ij} e_{ji} + \omega_{ij} \omega_{ji}) dv \end{aligned} \quad [4]$$

dado que

$$\begin{aligned} u_{i,i} u_{k,k} &= e_{ii} e_{kk} \\ u_{i,j} u_{j,i} &= (e_{ij} + \omega_{ij})(e_{ji} + \omega_{ji}) = e_{ij} e_{ji} - \omega_{ij} \omega_{ji} \end{aligned}$$

donde  $e_{ij}$  y  $\omega_{ij}$  son las componentes de los tensores deformación y rotación infinitesimales, respectivamente.

### 3. ESTABILIDAD SEGUN LIAPUNOV PARA LAS TENSIONES PRINCIPALES

Para una posición de equilibrio, se obtienen condiciones suficientes de estabilidad según Liapunov, de la desigualdad:

$$F(t) = \int_{v(t)} [d_{ijkl} u_{k,l} - p(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ij} + \omega_{ij}\omega_{ij})] dV \geq c\rho, c > 0 \quad [5]$$

siendo  $F(t) = 0$ , respecto a las medidas

$$\rho \text{ y } \rho = F(0) + \int_{v(0)} \mu \dot{u}_i \dot{u}_i dV$$

Nuestro propósito es la obtención de criterios de estabilidad a partir de la desigualdad (5), en función de las tensiones principales.

#### 3.1 Expresión de $F(t)$

Si consideramos en cada punto del sólido unos ejes coincidentes con las direcciones principales del tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$ , con  $\sigma \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  las tensiones principales, obtenemos, teniendo en cuenta (2):

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{v(t)} I dW = \int_{v(t)} [c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - (e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ij} - \\ &\quad - e_{ij}e_{ij} + \omega_{ij}\omega_{ij}) + \sigma_1 e_{ii}^2 + \sigma_2 e_{22}^2 + \sigma_3 e_{33}^2 + \\ &\quad + (\sigma_1 + \sigma_2) e_{12}^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_1) e_{12}\omega_{12} + \\ &\quad + (\sigma_1 + \sigma_2) \omega_{12}^2 + (\sigma_1 + \sigma_3) e_{13}^2 + 2(\sigma_1 - \\ &\quad - \sigma_3) e_{13}\omega_{31} + (\sigma_1 + \sigma_3) \omega_{13}^2 + (\sigma_2 + \sigma_3) e_{23}^2 + \\ &\quad + 2(\sigma_3 - \sigma_2) e_{23}\omega_{23} + (\sigma_2 + \sigma_3) \omega_{23}^2] dV = \\ &= \int_{v(t)} [c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - (e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ij} + \omega_{ij}\omega_{ij}) + \\ &\quad + I_{II}] dV \quad [6] \end{aligned}$$

La expresión (3) sustituida en (6) nos da la siguiente igualdad para el integrando de  $F(t)$ :

$$\begin{aligned} I &= \lambda e_{ii}e_{jj} + 2\mu e_{ij}e_{ij} + A_1 \sigma e_{ii}e_{jj} + A_2 \sigma e_{ij}e_{ij} + \\ &\quad + \frac{2\lambda + m}{\mu} \sigma_i e_{ij}e_{ii} + 4\sigma_j e_{ij}e_{ij} + \\ &\quad + \frac{n}{2\mu} e_{ils} e_{jks} \sigma_s e_{ij}e_{kl} - p(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ij} + \\ &\quad + \omega_{ij}\omega_{ij}) + I_{II}. \quad [7] \end{aligned}$$

### 4. CRITERIOS DE ESTABILIDAD SEGUN LIAPUNOV

Consideramos la medida

$$\rho := \int_{v(t)} e_{ij}e_{ij} dV$$

La desigualdad (5) se escribe:

$$\int_{v(t)} [d_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} - p(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ij} + \omega_{ij}\omega_{ij}) - c e_{ij}e_{ij}] dV \geq 0, c > 0$$

Una condición suficiente de estabilidad según Liapunov, con respecto a las medidas  $\rho_0$

$$\rho_0 = F(0) + \int_{v(0)} \mu \dot{u}_i \dot{u}_i dV$$

y  $\rho$  es que el integrando, una forma cuadrática en  $e_{ij}$ ,  $\omega_{ij}$  sea una forma semi definida positiva en cada punto del sólido.

En el caso general, de (6) tenemos:

$$\begin{aligned} I &= c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - p e_{ii}e_{jj} + (\sigma_1 + p) e_{11}^2 + \\ &\quad + (\sigma_2 + p) e_{22}^2 + (\sigma_3 + p) e_{33}^2 + \\ &\quad + (\sigma_1 + \sigma_2 - 2p) e_{12}^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_1) e_{12}\omega_{12} + \\ &\quad + (\sigma_1 + \sigma_2 - 2p) \omega_{12}^2 + (\sigma_1 + \sigma_3 + 2p) e_{13}^2 + \\ &\quad + 2(\sigma_1 - \sigma_3) e_{13}\omega_{31} + (\sigma_1 + \sigma_3 - 2p) \omega_{13}^2 + \\ &\quad + (\sigma_2 + \sigma_3 + 2p) e_{23}^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_2) e_{23}\omega_{23} + \\ &\quad + (\sigma_2 + \sigma_3 - 2p) \omega_{23}^2 \quad [8] \end{aligned}$$

y las condiciones suficientes son:

$$c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + c_1 e_{ij}e_{ij} \geq c_2 e_{ij}e_{ij}$$

para una constante positiva  $C_2$  y una constante  $C_1$  tal que

$$-(\sigma_3 - c_1) < p < \frac{\sigma_3 - c_1}{2}$$

$$(\sigma_i + \sigma_j + 2p - 2c)(\sigma_i + \sigma_j - 2p) - (\sigma_i - \sigma_j)^2 > 0$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 - 2p > 0,$$

$$i \neq j, i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{no suma en } i, j)$$

Si convenimos que:

$$\int_{v(t)} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dv \geq c \int_{v(t)} e_{ij} e_{ij} dv \quad [9]$$

donde  $C$  es una cierta constante positiva, las condiciones suficientes de estabilidad se obtienen fácilmente. En el análisis que sigue, consideramos la expresión (7) para  $I$  y obtenemos desigualdades como (9). La práctica usual es despreciar los términos de (3) que son lineales en  $\sigma_{ij}$ , lo que es una aproximación que requiere un estudio en cada caso. Más tarde, la utilizamos para obtener criterios más simples.

#### 4.1 Criterio general

a) Escribimos de nuevo la expresión (7) para obtener:

$$\begin{aligned} I = & M_1 e_{11}^2 + M_2 e_{22}^2 + M_3 e_{33}^2 + 2N_3 e_{11} e_{22} + \\ & + 2N_2 e_{11} e_{33} + 2N_1 e_{22} e_{33} + 2P_3 e_{12}^2 + 2P_2 e_{13}^2 + \\ & + 2P_1 e_{23}^2 + 2Q_3 e_{12} \omega_{12} + 2Q_2 e_{13} \omega_{13} + \\ & + 2Q_1 e_{23} \omega_{23} + 2R_3 \omega_{12}^2 + 2R_2 \omega_{13}^2 + 2R_1 \omega_{23}^2 \end{aligned} \quad [10]$$

donde

$$M_i = \lambda + 2\mu + (A_1 + A_2) \sigma +$$

$$+ 2 \left( \frac{\lambda + m}{\mu} + 2 \right) \sigma_i + \sigma_i, i = 1, 2, 3$$

$$\left[ \begin{aligned} N_i = & \lambda + A_1 \sigma + \frac{\lambda + m}{\mu} (\sigma_j + \sigma_k) + \\ & + \frac{u}{2\mu} \sigma_i - p \end{aligned} \right]$$

$$P_i = 2\mu + A_2 \sigma + 2(\sigma_j + \sigma_k) -$$

$$- \frac{u}{2\mu} \sigma_i + \frac{\sigma_j + \sigma_k}{2} + p$$

$$R_i = \frac{1}{2} (\sigma_j + \sigma_k - 2p)$$

$$Q_i = (\sigma - \sigma_k) e_{kj} \omega_{kj}$$

$$(k = 1, j = 2, i = 3;$$

$$\text{rotación cíclica; no suma para } j, k$$

$$\left. \begin{aligned} i & \neq j \neq k \\ j & \neq k \\ i, j, k & = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\}$$

#### Criterio

Una posición de equilibrio de un sólido hiperelástico, para las condiciones del presente trabajo, es estable según Liapunov, respecto a las medidas

$$\rho_o = \int_{v(o)} \mu \dot{u}_i \dot{u}_i dV + F(o)$$

y

$$\rho = \int_{v(t)} e_{ij} e_{ij} dV$$

si existe un  $c > 0$  tal que se verifican las siguientes desigualdades en cada punto del sólido:

$$M_i - c > 0, (M_1 - c)(M_2 - c) -$$

$$N_3^2 > 0, P_i - c > 0$$

$$\begin{vmatrix} M_i - c & N_3 & N_2 \\ N_3 & M_2 - c & N_1 \\ N_2 & N_1 & M_3 - c \end{vmatrix} > 0$$

$$4(P_i - c)R_i - Q_i^2 > 0, i = 1, 2, 3$$

(no suma índices repetidos).

b) Con el fin de hacer más explícita la presencia de la magnitud  $p$ , procedemos como sigue.

Tenemos:

$$I = I_i \left\{ -\alpha p e_{ii} e_{ij} + (2\mu + \alpha p + A_2 \sigma) (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + [\lambda + (\alpha - 1)p + A_1 \sigma] e_{ii} e_{jj} + \\
 & + \left[ \left( 2 \frac{\lambda + m}{\mu} + 5 \right) \sigma_1 + (1 - \alpha)p \right] e_{11}^2 + \\
 & + \left[ \left( 2 \frac{\lambda + m}{\mu} + 5 \right) \sigma_2 + (1 - \alpha)p \right] e_{22}^2 + \\
 I_{II} & + \left[ \left( 2 \frac{\lambda + m}{\mu} + 5 \right) \sigma_3 + (1 - \alpha)p \right] e_{33}^2 + \\
 & + 2 \left[ \frac{\lambda + m}{\mu} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{u}{2\mu} \sigma_3 \right] e_{11} e_{22} + \\
 & + 2 \left[ \frac{\lambda + m}{\mu} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{u}{2\mu} \sigma_2 \right] e_{11} e_{33} + \\
 & + 2 \left[ \frac{\lambda + m}{\mu} (\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{u}{2\mu} \sigma_1 \right] e_{22} e_{33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + [4\mu + 2p + 2A_2 \sigma + 5(\sigma_1 + \sigma_2) - \\
 & - \frac{u}{2\mu} \sigma_3] e_{12}^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_1) e_{12} \omega_{12} + \\
 & + (\sigma_1 + \sigma_2 - 2p) \omega_{12}^2 + \\
 I_{III} & + [4\mu + 2p + 2A_2 \sigma + 5(\sigma_1 + \sigma_3) - \\
 & - \frac{u}{2\mu} \sigma_2] e_{13}^2 + 2(\sigma_1 - \sigma_3) e_{31} \omega_{31} + \\
 & + (\sigma_1 + \sigma_2 - 2p) \omega_{13}^2 + \\
 & + [4\mu + 2p + 2A_2 \sigma + 5(\sigma_2 + \sigma_3) - \\
 & - \frac{u}{2\mu} \sigma_1] e_{23}^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_2) e_{23} \omega_{23} + \\
 & + (\sigma_2 + \sigma_3 - 2p) \omega_{23}^2
 \end{aligned}$$

[11]

donde hemos introducido una constante

$$0 < \alpha \leq 1$$

Consideramos las desigualdades:

$$I_I > 0$$

$$I_{II} \geq c(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2)$$

$$I_{III} \geq 2c(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2)$$

y se obtiene un nuevo criterio para las mismas condiciones y medidas que en 4.1.a.

### Criterio

El estado de equilibrio se establece según Liapunov si las desigualdades que siguen:

$$-(2\mu + A\sigma) < \alpha p < \frac{2\mu + A\sigma}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$M_i^1 - c > 0, \quad (M_i^1 - c)(M_j^1 - c) - N_{ij}^{12} > 0$$

$$\begin{bmatrix} M_1^1 - c & N_3^1 & N_2^1 \\ N_3^1 & M_2^1 - c & N_1^1 \\ N_2^1 & N_1^1 & M_3^1 - c \end{bmatrix} > 0$$

[12]

$$[4\mu + 2p + 5(\sigma_1 + \sigma_2) + 2A_2 \sigma - \frac{u}{2\mu} \sigma_k - 2c]$$

$$(\sigma_i + \sigma_j - 2p) - (\sigma_i - \sigma_j)^2 > 0$$

$$\sigma_i + \sigma_j - 2p > 0$$

$$i \neq j \neq k, \quad i \neq k$$

$i, j, k = 1, 2, 3$  (no suma respecto índices repetidos).

se verifican para un  $c > 0$  y en cada punto del sólido.

En (12), tenemos:

$$M_i^1 = \lambda + A, \sigma + \sigma_i \left( 2 \frac{\lambda + m}{\mu} + 5 \right)$$

$$\begin{aligned}
 N_i^1 &= \lambda + (\alpha - 1)p + A_1 \sigma + \frac{\lambda + m}{\mu} (\sigma_i + \sigma_k) + \\
 & + \frac{u}{2\mu} \sigma_i
 \end{aligned}$$

## 4.2. Criterios como función de una sola tensión principal

Ahora obtenemos cotas para los términos de la expresión (7). Consideramos tres casos para signos diferentes de las tensiones principales.

a) Sea

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < 0, \quad \sigma_1 < 0, \quad \sigma_2 < 0$$

Podemos escribir

$$I \geq (\lambda - p) e_{ij} e_{ij} + [2\mu + \sigma_3 (1 + \eta) + p]$$

$$e_{ij} e_{ij} + (\sigma_3 - p) \omega_{ij} \omega_{ij}$$

donde hemos considerado que:

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + 2p) e_{12}^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_1) e_{12} \omega_{12} +$$

$$+ (\sigma_1 + \sigma_2 - 2p) \omega_{12}^2 = (\sigma_1 + p) (e_{12} - \omega_{12})^2 +$$

$$+ (\sigma_2 + p) (e_{12} + \omega_{12})^2 - 4p \omega_{12}^2 \geq$$

$$\geq 2 \cdot (\sigma_3 + p) (e_{12}^2 + \omega_{12}^2) - 4p \omega_{12}^2$$

$$\eta = 9A_1^+ = 3A_2^+ + 2 \frac{\lambda + m}{\mu} + 4 \left[ \frac{\lambda + m}{\mu} \right] +$$

$$+ 4 + \left[ \frac{\nu}{\mu} \right]$$

$$A_1^+ = \text{máx. } (A_1, 0),$$

$$A_2^+ = \text{máx. } (A_2, 0)$$

Condiciones suficientes de estabilidad son:

$$2\mu + \sigma_3 (1 + \eta) + p - c \geq 0 \quad \sigma_3 - p \geq 0$$

para un  $c > 0$ , en cada punto del sólido.

Considerando que  $\sigma_{ij}$  es homogéneo en todo el sólido, es posible introducir una constante K de Korn (2.º Caso) y obtenemos las siguientes condiciones suficientes:

$$2\mu + \sigma_3 (1 + \eta + k) + p(1 - K) - c \geq 0$$

$$\sigma_3 < p \leq \lambda$$

con ciertas restricciones sobre  $u_i$  [7].

b) Cuando  $\sigma > 0$ ,  $\sigma_3 > 0$ , de forma análoga al apartado a), obtenemos

$$I \geq (\lambda - p) e_{ij} e_{ij} + (2\mu + \sigma_1 \eta^1 + p) e_{ij} e_{ij} - p \omega_{ij} \omega_{ij}$$

Condiciones suficientes de estabilidad son:

$$2\mu + \sigma_1 \eta^1 + p - c \geq 0, \quad p < 0$$

(admitimos esta posibilidad).

en tanto que  $\lambda > 0$

o bien:

$$2\mu + \sigma_1 \eta^1 + p(1 - k) - c \geq 0 \quad 0 < p \leq \lambda$$

para un  $c > 0$ . En el segundo caso, consideramos que  $\sigma_{ij}$  es uniforme en todo el cuerpo con las conocidas restricciones sobre  $u_i$ .

La cantidad

$$\eta^1 \text{ es } 9A_1^- + 3A_2^- + 2 \frac{\lambda + m}{\mu} -$$

$$- 4 \left[ \frac{\lambda + m}{\mu} \right] - \left[ \frac{\nu}{\mu} \right]$$

$$A_1^- = \text{mín. } (A_1, 0),$$

$$A_2^- = \text{mín. } (A_2, 0)$$

c) Por último, consideramos que

$$\sigma > 0, \quad \sigma_3 < 0, \quad \sigma_1 > |\sigma_3|, \quad \sigma_2 > |\sigma_3|$$

y obtenemos:

$$I \geq (\lambda - p) e_{ij} e_{ij} + [2\mu + \sigma_1 (\eta^{II} - 1) + p] e_{ij} e_{ij} -$$

$$(\sigma_1 + p) \omega_{ij} \omega_{ij}$$

Condiciones de estabilidad son:

$$2\mu + \sigma_1 (\eta^{II} - 1) + p - c \geq 0, \quad \sigma_1 + p \leq 0$$

o bien

$$2\mu + \sigma_1 (\eta^{II} - 1 - k) + p(1 - k) - c \geq 0$$

$$\sigma_1 + p > 0$$

donde

$$\eta'' 9A_1^- + 3A_2^- + 2 \left( \frac{\lambda + m}{\mu} \right)^- - 4 \left[ \frac{\lambda + m}{\mu} \right] - \left[ \frac{u}{\mu} \right]$$

Debe observarse que las condiciones de estabilidad han sido establecidas como funciones de una sola tensión principal. Estimaciones de cargas críticas se obtienen fácilmente.

### 4.3. Criterios para aproximación en ingeniería

Consideramos la siguiente aproximación para las componentes del tensor elástico:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad [13]$$

Los resultados de 4.2 permanecen válidos para

$$\eta = \eta' = \eta'' = 0$$

Sustituyendo (13) en (6), obtenemos diversos conjuntos de condiciones suficientes de estabilidad según Liapunov, respecto a las medidas  $\rho_0$  y  $\rho$ . Seleccionamos el criterio que sigue, por ser de gran simplicidad.

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} I \geq & (\lambda - p) e_{ii} e_{jj} + \mu e_{ij} e_{ij} + \mu (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + \\ & + (p + \sigma_1) e_{11}^2 + (p + \sigma_2) e_{22}^2 + (p + \sigma_3) e_{33}^2 + \\ & + (\sigma_1 + \sigma_2 + 2p) e_{12}^2 + (\sigma_1 + \sigma_3 + 2p) e_{13}^2 + \\ & + (\sigma_2 + \sigma_3 + 2p) e_{23}^2 + \\ & + 2\mu e_{12}^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_1) e_{12} \omega_{12} + \\ & + (\sigma_1 + \sigma_2 - 2p) \omega_{12}^2 + 2\mu e_{13}^2 + \\ & + 2(\sigma_1 - \sigma_3) e_{31} \omega_{31} + (\sigma_1 + \sigma_3 - 2p) \omega_{13}^2 + \\ & + 2\mu e_{23}^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_2) e_{23} \omega_{23} + (\sigma_2 + \sigma_3 - 2p) \omega_{23}^2 \end{aligned}$$

y obtenemos las siguientes condiciones suficientes:

$$\begin{aligned} -\sigma_3 \leq p \leq \lambda \\ 2\mu (\sigma_i + \sigma_j - 2p) - (\sigma_i - \sigma_j)^2 > 0 \\ i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \text{(no suma respecto } i, j) \end{aligned}$$

para cada punto del sólido.

Observemos que estas condiciones están implicadas por las desigualdades:

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_i - \sigma_j)^2}{8\mu} \leq -p \leq \sigma_3 > 0 \\ \text{(no suma respecto } i, j) \end{aligned}$$

### 4.4. Criterios para aproximación en ingeniería y la desigualdad de Korn

Es interesante utilizar la desigualdad de Korn (Caso 2) con el fin de incorporar a los criterios una cierta constante K que depende sólo de la forma del sólido. Suponemos que el tensor de esfuerzos es uniforme en todo el cuerpo y las conocidas restricciones sobre  $u_i$ .

Podemos escribir que:

$$\begin{aligned} I \geq & (\lambda - p) e_{ii} e_{jj} + \sigma_3 e_{ij} e_{ij} + (2\mu + p) \\ & (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + (4\mu + 2p) e_{12}^2 + \\ & + 2(\sigma_2 - \sigma_1) e_{12} \omega_{12} + (\sigma_1 + \sigma_2 - 2p) \omega_{12}^2 + \\ & + (4\mu + 2p) e_{13}^2 + 2(\sigma_1 - \sigma_3) e_{31} \omega_{31} + \\ & + (\sigma_1 + \sigma_3 - 2p) \omega_{13}^2 + (4\mu + 2p) e_{23}^2 + \\ & + 2(\sigma_3 - \sigma_2) e_{23} \omega_{23} + (\sigma_2 + \sigma_3 - 2p) \omega_{23}^2 = I'' \end{aligned}$$

Si consideramos las desigualdades:

$$I'' \geq \sigma_3 e_{ij} e_{ij} + c_1 e_{ij} e_{ij} + c_2 \omega_{ij} \omega_{ij} \geq c_3 e_{ij} e_{ij}$$

para una constante positiva  $C_3$ , la posición de equilibrio es estable según Liapunov para las siguientes condiciones suficientes:

$$c_2 - 2\mu \leq p \leq \lambda$$

$$(4\mu + 2p - 2c_1)(\sigma_i + \sigma_j - 2p - 2c_2) - (\sigma_i - \sigma_j)^2 > 0, \quad i \neq j$$

$$\sigma_3 + c_1 + c_2 k > 0 \quad [14]$$

(no suma para i, j)

para unas constantes  $C_1$  y  $C_2$  (negativa).

Este es el criterio general.

Tomemos  $C_1 = C > 0$  y  $C_2 = -uC$ ,  $u > 0$ .

Si  $u = 1$ ,  $C = p$ , las condiciones (14) se convierten en:

$$p < \min. \left( \lambda, \frac{\sigma_3}{k-1} \right)$$

$$(\sigma_i - \sigma_j)^2 < 4\mu(\sigma_i + \sigma_j) \quad [15]$$

(no suma para i, j)

con tal que  $K > 1$ .

Las desigualdades (15) están implicadas por

$$\frac{(\sigma_i - \sigma_j)^2}{8\mu(k-1)} < p < \min. \left( \lambda, \frac{\sigma_3}{k-1} \right)$$

(no suma para i, j)

Si  $u = \frac{1}{k}$ ,  $c = 2\mu$  es suficiente que:

$$\sigma_3 > 0, \quad 0 < p < \min. \left( \lambda, \frac{2\mu}{k} \right)$$

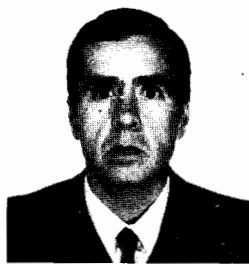
$$(\sigma_i - \sigma_j)^2 < \frac{4p(2\mu - pk)}{k}$$

(no suma para i, j)

## BIBLIOGRAFIA

1. BEATTY, M. F.: *A theory of elastic stability for incompressible hyperelastic bodies*. Int. J. solids structures, vol. 3, 23-27 (1967).
2. BEATTY, M. F.: *Stability of the undistorted states of an isotropic elastic body*. Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 3, 337-349 (1968).
3. BEATTY, M. F.: *Stability of hyperelastic bodies subject to hydrostatic loading*. Int. J. Non-Linear Mechanics, vol. 5, 367-383 (1970).
4. HOLDEN, J. T.: *Estimations of Critical Loads in Elastic stability Theory*. Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 17, 171-183 (1964).
5. KNOPS, R. J. and WILKES, E. W.: *Theory of elastic stability*. Handbuch der Physik, Vol. VI a/3. Springer (1973).
6. RODRIGUEZ REBOLLO, R.: *On sufficient criteria of Liapunov stability for hyperelastic bodies*. Ing. Arch. Vol. 47, 181-186 (1978).
7. FRIEDRICHS, K. O.: *On the boundary-value problems of the Theory of elasticity and Korn's inequality*. Ann. of Math. 48, 441-471 (1947).

## Rafael Rodríguez Rebollo



Nacido el 2 de marzo de 1943 en Córdoba, doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, promoción 1967 y licenciado en Ciencias Físicas. Profesor agregado interino en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla hasta el año 1983, donde impartió clases de Mecánica. Actualmente, delegado de Transportes de Sevilla en Renfe.