

Sobre los paraboloides elíptico (elpar) e hiperbólico (hipar) y la velaria paraboloidal considerados como láminas rebajadas^(*)

Por RAFAEL CORTELL BATALLER

Doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos (Cát. de Física). Valencia

Al tener en cuenta las ecuaciones de equilibrio de una estructura laminar como membrana, el problema queda simplificado al tratarse de una lámina rebajada, pues en este caso es un problema lineal.

Por otro lado, es conveniente preguntarse hasta qué límites es posible llegar con el esquema rebajado así como el error que se comete al usarlo, error que, por otra parte, dependerá de la forma considerada.

Es conveniente, pues, tener un criterio que permita discernir, para una estructura dada, si es conveniente o no tratarla como lámina rebajada así como poder determinar el error que se comete.

A este respecto, Wlassow (5) indica para lámina esférica, elipsoídica y paraboloide hiperbólico (hipar) de planta rectangular el valor máximo de 1/5 entre la cota máxima y el lado menor del rectángulo base. Otros autores (4) adoptan este límite para superficies cualesquiera. Parece ser que dicho valor representa una limitación del error cometido al considerar una lámina como rebajada.

Partiendo de las condiciones analíticas de admisión del esquema rebajado [1] y [2] es posible determinar cuándo conviene aplicarle al tener pequeños errores que serán aceptables. Dichas condiciones se pueden englobar en una sola y obtener un único criterio analítico local [2].

En este artículo se hacen aplicaciones a la velaria paraboloidal [3] y a los paraboloides elíptico (elpar) e hiperbólico (hipar), realizando un estudio comparativo entre estas láminas sobre planta rectangular.

Se determina, asimismo y en cada caso, la mínima tolerancia admisible para que el esquema rebajado se cumpla sobre todo el rectángulo.

Estática de la membrana

Sea

$$z = z(x, y) \quad [1]$$

la función de forma que define la geometría de la lámina respecto de una terna cartesiana ortogonal.

Según el tratamiento de Pucher (2) (fig. 1), para un elemento de lámina la relación entre los esfuerzos reales sobre la misma y los proyectados por unidad de longitud proyectada sobre el plano

XOY es:

$$\bar{N}_x = N_x \sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}} \quad ; \quad \bar{N}_{xy} = N_{xy} \quad ; \quad \bar{N}_y = N_y \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} \quad [2]$$

en donde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Análogamente se obtiene para las cargas:

$$\bar{P}_z = P_z \sqrt{1+p^2+q^2} \quad ; \quad \bar{P}_y = P_y \sqrt{1+p^2+q^2} \quad ; \quad \bar{P}_x = P_x \sqrt{1+p^2+q^2} \quad [3]$$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de mayo de 1985.

ESFUERZOS DE MEMBRANA

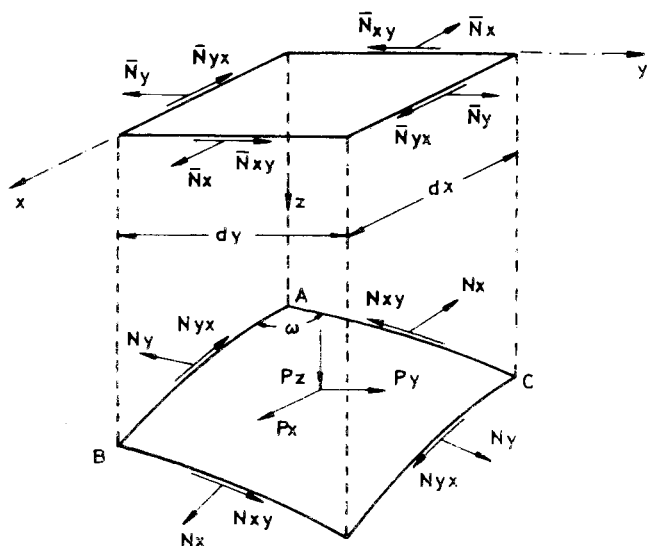


Figura 1.

Como vemos, los esfuerzos proyectados están referidos a líneas coordenadas ortogonales sobre el plano XOY, que se corresponde, en general, sobre la superficie en líneas coordenadas no ortogonales, formando un ángulo ω tal que:

$$\cos \omega = \frac{pq}{\sqrt{(1+p^2) \cdot (1+q^2)}} \quad [4]$$

Para considerar una lámina como rebajada [2] ha de cumplirse:

$$\bar{N}_x \simeq N_x ; \quad \bar{N}_{xy} = N_{xy} ; \quad \bar{N}_y \simeq N_y \quad [5.1]$$

$$\bar{P}_x \simeq P_x ; \quad \bar{P}_y \simeq P_y ; \quad \bar{P}_z \simeq P_z \quad [5.2]$$

$$\cos \omega = 0 \quad [5.3]$$

Vamos a considerar cada una de estas condiciones por separado, relacionándolas con el margen de aproximación que se considere aceptable.

Según la referencia número 2, y para una determinada tolerancia asignada, se obtienen las siguientes conclusiones para las hipótesis [5] antes planteadas:

Hipótesis [5.1]: Para cada tolerancia asignada se obtiene un dominio de validez limitado por hipérbolas en unos ejes cartesianos (p, q).

Hipótesis [5.2]: Para cada tolerancia asignada se obtiene un dominio de validez circular en ejes (p, q).

Hipótesis [5.3]: Para cada tolerancia asignada se obtiene un dominio de validez limitado por curvas simétricas respecto a los ejes (p, q) y respecto a las bisectrices de los cuadrantes.

En el caso de tolerancia nula, los dominios correspondientes a las tres hipótesis anteriores degeneran en las bisectrices de los cuatro cuadrantes, el origen de coordenadas y los ejes coordenados, respectivamente.

Criterio de comprobación

Los criterios de validez comentados anteriormente nos permiten conocer si podemos o no aplicar las hipótesis de lámina rebajada, fijándonos de antemano una determinada tolerancia. Esto para cada una de las hipótesis [5.1], [5.2] y [5.3].

Se propone (referencia número 2) un criterio de más rápida aplicación y algo más restrictivo.

Consiste en fijar de antemano una cierta tolerancia permisible δ igual para las tres hipótesis [5] anteriormente comentadas.

Es posible concluir, entonces, que el dominio circular es el más restrictivo de todos; entonces, si para una determinada tolerancia signada estamos dentro del dominio circular, esto implicará que las demás condiciones (menos restrictivas que ésta) se cumplirán también para esa misma tolerancia.

Podemos, pues, reducir el problema a estudiar solamente el dominio circular.

$$p^2 + q^2 \leq R^2 = \delta(2 + \delta) \quad [6]$$

Tolerancia mínima

La inecuación [6] deberá cumplirse, para una determinada tolerancia asignada, en todo punto (x, y) del dominio de definición de la lámina de ecuación $z = z(x, y)$.

Si obtenemos el máximo absoluto M de la función

$$F(x, y) = p^2 + q^2 \quad [7]$$

en dicho dominio de definición, entonces la ecuación

$$M = \delta(2 + \delta) \quad [8]$$

nos dará la mínima tolerancia ($\delta_{\min}$) que habrá que adoptar para que dicha lámina pueda considerarse como rebajada.

Aplicación a los paraboloides elíptico (elpar) e hiperbólico (hipar) y a la velaria paraboloidal

Consideremos las láminas indicadas referidas a un sistema de coordenadas ortogonal con el origen en la cúspide de las mismas, siendo C la altura máxima para todas ellas.

Respecto de esta referencia, sus respectivas ecuaciones serán:

Paraboloide elíptico:

$$\frac{z}{C} = \frac{1}{2} ((x/a)^2 + (y/b)^2) \quad [9]$$

representado en la figura 2.

Paraboloide hiperbólico:

$$\frac{z}{C} = \frac{x \cdot y}{a \cdot b} \quad [10]$$

representado en la figura 3.

Velaria paraboloidal:

$$\frac{z}{C} = (x/a)^2 + (y/b)^2 - (xy/ab)^2 \quad [11]$$

representada en la figura 4.

Adoptando las coordenadas adimensionales:

$$\xi = x/a \quad ; \quad \eta = y/b \quad ; \quad \zeta = z/C$$

siendo

$$-1 \gg \xi \gg 1 \quad ; \quad -1 \gg \eta \gg 1 \quad ; \quad 0 \gg \zeta \gg 1 \quad [12]$$

según se indica en la figura 5.

Así pues, las correspondientes ecuaciones en estas nuevas coordenadas serán:

$$\text{Elpar: } \zeta = \frac{1}{2} \cdot (\xi^2 + \eta^2)$$

$$\text{Hipar: } \zeta = \xi \cdot \eta \quad [13]$$

$$\text{Velaria paraboloidal: } \zeta = \xi^2 + \eta^2 - (\xi \cdot \eta)^2$$

La función $F(\xi, \eta) = p^2 + q^2$ para estas tres superficies es:

Para el elpar y para el hipar:

$$F(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 \quad [14]$$

PARABOLOIDE ELIPTICO

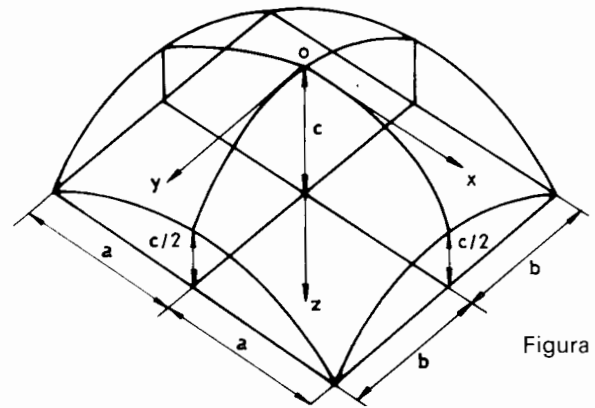


Figura 2.

PARABOLOIDE HIPERBOLICO

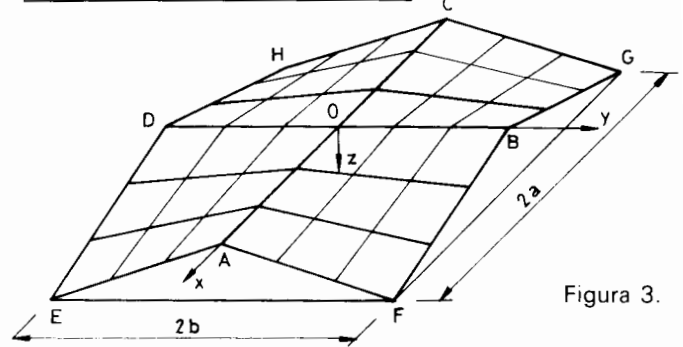


Figura 3.

VELARIA PARABOLOIDAL

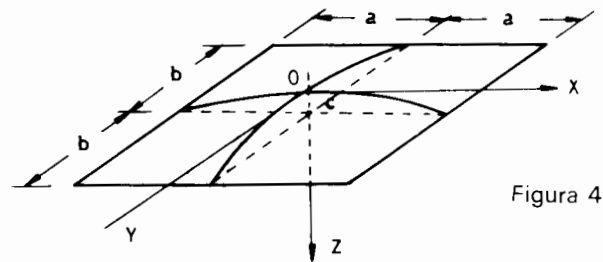


Figura 4.

COORDENADAS ADIMENSIONALES

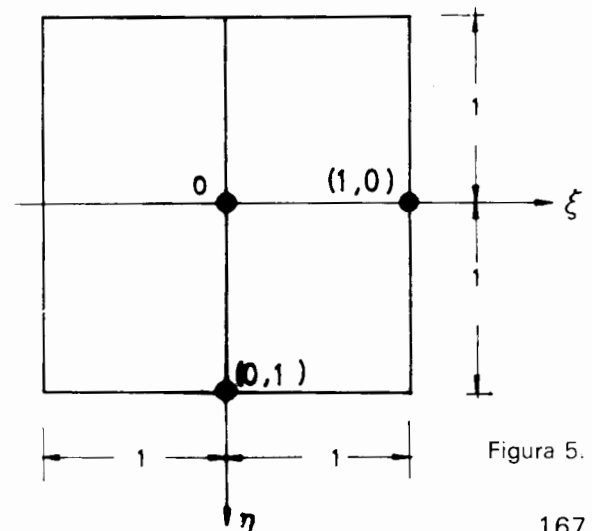


Figura 5.

y para la velaria paraboloidal:

$$F(\xi, \eta) = 4 \cdot (\xi^2(1 - \eta^2) + \eta^2(1 - \xi^2)) \quad [15]$$

siendo, por tanto, las [14] y la [15] simétricas respecto de la referencia adoptada.

Estudiando dichas funciones sobre el cuadrado de lado unidad, concluimos que:

- a) La ecuación [14] posee un *mínimo* en el origen de coordenadas, anulándose en dicho punto. No presenta ningún máximo sobre dicho cuadrado unidad. El mayor valor lo toma en los vértices en donde:

$$F(1, 1) = F(1, -1) = F(-1, 1) = F(-1, -1) = 2 \quad [16]$$

- b) La ecuación [15] posee un *mínimo* en el vértice del cuadrado unidad, anulándose en dicho punto. Posee, además, un *máximo* en las intersecciones del cuadrado con los ejes (ξ, η) de valor

$$F(1, 0) = F(0, 1) = 4 \quad [17]$$

Así pues, es posible concluir que para las superficies elpar e hipar:

$$M = F_{\max} = C^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2} \quad [18]$$

y para la velaria paraboloidal:

$$F(a, 0) = 4 \cdot (C/a)^2 \quad ; \quad F(0, b) = 4 \cdot (C/b)^2$$

y si b es el lado menor del rectángulo:

$$M = F_{\max} = 4 \cdot (C/b)^2 \quad [19]$$

viendo, además, que para planta cuadrada las expresiones [18] y [19] se transforman respectivamente en ($a = b$):

$$M_{\text{elpar}} = M_{\text{hipar}} = 2 \cdot (C/a)^2 \quad ; \quad M_{\text{vel.}} = 4 \cdot (C/a)^2 \quad [20]$$

Tolerancia mínima según C/a

A partir de la ecuación [8], y tomando la raíz positiva, obtenemos:

$$\delta_{\min.} = -1 + \sqrt{1 + M} \quad [21]$$

$$(\delta_{\min.} + 1)^2 - 1 = M$$

Podemos, pues, concluir que para las láminas elpar e hipar:

$$\delta_{\min.} = -1 + \sqrt{1 + 2 \cdot (C/a)^2} \quad [22]$$

y para la velaria paraboloidal:

$$\delta_{\min.} = -1 + \sqrt{1 + 4 \cdot (C/a)^2} \quad [23]$$

Así pues, el profesor Wlassow (5), al limitar a 1/5

la relación C/a, vemos que al sustituir este valor en [22] y [23], está presuponiendo una tolerancia del 3,923 por 100 para los paraboloides elíptico e hiperbólico y otra del 7,703 por 100 para la velaria paraboloidal, según nuestro criterio.

Por otro lado, la tolerancia mínima depende de la forma de la lámina. Es por ello por lo que no puede adoptarse un límite único de la relación C/a para todas las formas laminares, siendo aconsejable estudiar cada caso particular según este y otros criterios en lo que a láminas rebajadas se refiere.

BIBLIOGRAFIA

1. ALPA, G.; BOZZO, E., y CORSANEGO, A.: «Problemi inversi nella statica dei gusci ribassati», vol. 8. Università de Génova. Instituto de la Ciencia de la Construcción, 1978.
2. CALZOLARI, M.; MAGGI, L., y STURA, D.: «Limiti di validità dello schema ribassato nella statica delle membrane», publicación núm. 11, serie IV. Universidad de Génova. Instituto de la Ciencia de la Construcción, 1978.
3. CORTELL, R.: «Formas, tensiones y deformaciones en estructuras laminares con puntos singulares», dos tomos. Tesis doctoral Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Valencia, junio de 1983.
4. SOARE, M.: «Application des Equations aux Différences Finies au Calcul des Coques». Eyrolles. París, 1962.
5. WLASSOW, W. S.: «Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik». Akademie-Verlag. Berlín, 1958.

Rafael Cortell Bataller



Es profesor responsable de la Cátedra de Física de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Valencia, desde el curso académico 1982-83 hasta la actualidad.

Realizó su tesis doctoral sobre el tema de diseño y cálculo de estructuras de tipo laminar, que fue presentada en la ETSI de Caminos, Canales y Puertos de Valencia, el 7 de julio de 1983 y leída el 28 de junio del mismo año, obteniendo la calificación de sobresaliente *cum laude*.

Actualmente, y respecto de este tema, orienta su investigación hacia la búsqueda de superficies mínimas susceptibles de poseer la correspondiente aplicación estructural.