

Resonancia en playas(*)

Por ANTONIO LECHUGA ALVARO

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Centro de Estudios y Experimentación
de Puertos y Costas - CEDEX - MOPU

Este trabajo recoge parcialmente los resultados de la tesis doctoral titulada "Formas rítmicas en playas: su relación con la evolución costera", defendida por el autor en junio de 1984. En un artículo anterior, publicado en esta Revista en mayo de 1983, se exponen las definiciones y los aspectos más importantes del tema, por lo que en el presente estudio se aborda el problema de la interacción de las ondas de orilla con el oleaje incidente en una playa cuando se dan las condiciones de resonancia o se está cerca de estas condiciones. El tratamiento numérico obtenido mediante la teoría se contrasta con mediciones efectuadas en una playa real. Finalmente, son analizadas las consecuencias que estos desarrollos puedan tener en la práctica costera.

1. INTRODUCCION

En la REVISTA DE OBRAS PUBLICAS de mayo de 1983 fue publicado el artículo «Formas rítmicas en playas», en donde introducíamos los principales conceptos y definiciones sobre la aparición de un modelado rítmico a lo largo de las playas y la relación de esta formación con las llamadas ondas de orilla. Con posterioridad seguimos profundizando en estos temas obteniendo como resultado un trabajo que constituyó nuestra tesis doctoral, leída en junio de 1984. En el presente artículo trataremos de resumir los resultados más interesantes de dicha tesis, haciendo particular hincapié en la consideración de estos fenómenos como un caso particular de resonancia que se da en las playas que cumplen determinadas condiciones que iremos viendo.

Debido a lo inusual de ciertos términos que aparecen en el problema que abordamos convendría definir lo más exactamente posible cada uno de ellos; sin embargo, teniendo en cuenta el trabajo primeramente citado nos eximimos de esta obligación, ya que en él se encuentran dichas definiciones son suficiente claridad, creemos.

El esquema general del proceso que da origen al modelado rítmico longitudinal es el siguiente:

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de mayo de 1985.

El oleaje de frecuencia ω , normalmente incidente a una playa y fuertemente reflejado en la misma, es inestable ante una pequeña perturbación en forma de onda de orilla. Estas ondas, cuya amplitud decrece exponencialmente desde la playa, se propagan longitudinalmente a lo largo de la misma. Naturalmente, nos estamos refiriendo a las ondas de orilla progresivas, cuya incidencia en la topografía de los fondos sería nula. Sin embargo, si la playa se encuentra limitada mediante un obstáculo de suficiente entidad, aparecen por las oportunas reflexiones las ondas de orilla estacionarias, y éstas si que pueden, en principio, alterar los fondos. Estas ondas de orilla estacionarias tendrían un frecuencia propia, dependiendo en general de la batimetría que llamaremos ω_0 . Su importancia se pone de manifiesto cuando, según se comprueba mediante el cálculo y las numerosas observaciones, la frecuencia ω_0 es exactamente la mitad que la correspondiente del oleaje incidente en ese momento, es decir,

$$\omega_0 = \omega/2 \quad [1]$$

En este caso nos encontramos ante un fenómeno de resonancia, con la consiguiente cesión de energía del oleaje a las ondas de orilla y, por tanto, con el crecimiento de estas últimas a costa del primero. Debido a la relación [1] que se establece entre las frecuencias nos encontramos ante una resonancia subarmónica. La amplitud de las ondas de orilla estacionarias comienza a crecer mediante la interacción con el

oleaje, haciendo que lo que era una pequeña perturbación irrelevante tenga una influencia en los fondos, siempre que éstos sean erosionables. La topografía de los fondos adoptará, por tanto, una estructura rítmica longitudinal congruente con la de las ondas de orilla.

El crecimiento del sistema no puede ser ilimitado. En efecto, el aumento de amplitud de las ondas de orilla hace que aparezcan los fenómenos de amplitud finita que lo limitan. A su vez, y lo que es más importante, la perturbación topográfica rítmica que se manifiesta en los fondos hace que se produzca una variación progresiva de la frecuencia propia de las ondas de orilla, con lo cual se va dejando de cumplir con exactitud la relación [1]. Se pasa, por tanto, de resonancia perfecta a resonancia imperfecta; e, incluso, cuando la diferencia de frecuencias sea extrema, a la pérdida de la condición de resonancia y, con ello, al cese del crecimiento de la onda de orilla y, por consiguiente, de la perturbación que ésta crea en los fondos. En este momento se ha conseguido el equilibrio. Todo este proceso para el caso de playa de batimetría no uniforme es el que se modeliza en nuestra tesis.

En los cálculos y desarrollos de las interacciones oleaje-onda de orilla usaremos las ecuaciones hidrodinámicas en la zona costera en su forma llamada de aguas poco profundas. A tal fin necesitamos tanto los términos lineales como los cuadráticos y los cúbicos, porque si bien tanto el oleaje como las ondas de orilla, considerados aisladamente, resuelven las ecuaciones lineales, el proceso de resonancia se establece entre los restantes términos. Nos encontramos, por tanto, ante un fenómeno claramente no lineal, lo cual es conveniente enfatizarlo.

2. ECUACIONES HIDRODINAMICAS EN LA ZONA COSTERA

Con las hipótesis habituales de fluido homogéneo, incomprensible e irrotacional, en términos del potencial de velocidad ϕ y del desplazamiento η de la superficie libre, las ecuaciones

hidrodinámicas en aguas poco profundas se expresan como sigue:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h + \eta) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (h + \eta) \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad [1]$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + g \cdot \eta = 0 \quad [2]$$

siendo x e y las coordenadas en dirección perpendicular a la playa y en dirección longitudinal de la misma respectivamente.

Como puede observarse, en las ecuaciones no aparece la profundidad, suponiéndose que las distintas variables no dependen de ella.

Mediante la eliminación de η entre [2] y [3] obtenemos la ecuación no lineal,

$$\begin{aligned} -\phi_{tt} + g(h\phi_x)_x + g(h\phi_y)_y &= 2(\phi_x\phi_{xx} + \phi_y\phi_{yy}) + \\ &+ \phi_x(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2)(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \\ &+ \phi_x^2\phi_{xx} + \phi_y^2\phi_{yy} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} \end{aligned} \quad [4]$$

en donde los subíndices indican derivación parcial respecto a la variable indicada.

La ecuación [4] se puede poner en la forma,

$$L(\phi) = Q(\phi) + C(\phi) \quad [5]$$

en donde L , Q y C son respectivamente los términos lineales cuadráticos y cúbicos, es decir,

$$L(\phi) = -\phi_{tt} + g(h\phi_x)_x + g(h\phi_y)_y \quad [6]$$

$$Q(\phi) = 2(\phi_x\phi_{xx} + \phi_y\phi_{yy}) + \phi_x(\phi_{xx} + \phi_{yy}) \quad [7]$$

$$C(\phi) = \phi_x^2\phi_{xx} + \phi_y^2\phi_{yy} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} \quad [8]$$

Según el orden de magnitud del problema que contemplemos aparecerán los términos lineales, cuadráticos e incluso cúbicos en su desarrollo.

3. ONDAS DE ORILLA EN PLAYAS DE PENDIENTE UNIFORME

Consideradas aisladamente las ondas de orilla tanto progresivas como estacionarias resuelven la ecuación [6] igualada a cero en el primer orden de magnitud.

La solución lineal de ondas de orillas se conoce desde Stokes, en 1846. Sin embargo, la

correspondiente en aguas poco profundas para los distintos modos se debe a Eckart, en 1951. El problema de autovalores planteado tiene la siguiente resolución, para $h = \text{tg } \beta x$,

$$\phi_n = \frac{a \cdot g}{\omega} e^{-kx} \text{Ln}(2kx) \begin{pmatrix} \cos ky \cos \omega t \\ \cos (ky - \omega t) \end{pmatrix} \quad [9]$$

siendo $\text{Ln}(2kx)$ los polinomios de Laguerre de orden n . En el paréntesis figuran, arriba, la solución de onda estacionaria y, abajo, la de onda progresiva. En ambos casos la frecuencia correspondiente sigue la ley de dispersión para los distintos modos,

$$\omega^2 = gk(2n + 1) \text{tg } \beta \quad [10]$$

Como sabemos, los valores de los polinomios de Laguerre se obtienen como,

$$\text{Ln}(\xi) = e^{-\xi} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^n e^{-\xi})$$

y, para los tres primeros modos, valen,

$$\begin{aligned} n=0 & \quad L_0(kx) = 1 \\ n=1 & \quad L_1(2kx) = 1 - 2kx \\ n=2 & \quad L_2(2kx) = 1 - 4kx + 2(kx)^2 \end{aligned} \quad [11]$$

Con [9], [10] y [11], y teniendo en cuenta que:

$$\eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

queda perfectamente definida la solución lineal de las ondas de orilla en playas de pendiente uniforme (véase fig. 1).

También se conoce la solución no lineal de la onda de orilla cuando se tienen en cuenta los

términos cuadráticos en [5]. Los sucesivos órdenes de magnitud introducen términos correctores tanto en el potencial como en la frecuencia. En general su expresión es muy complicada.

4. OLEAJE INCIDENTE

De la misma manera que las ondas de orilla el oleaje normalmente incidente a una playa de pendiente uniforme también resuelve la ecuación lineal en aguas poco profundas, $L(\phi) = 0$. El potencial de velocidad en este caso tiene como expresión:

$$\phi = \frac{a \cdot g}{\omega_i} J_0(\chi) \cos \omega_i t - Y_0(\chi) \sin \omega_i t \quad [12]$$

$$\chi^2 = \frac{4\omega_i^2 x}{g \text{tg } \beta}$$

donde ω_i es la frecuencia del oleaje incidente y J_0 y Y_0 son funciones de Bessel de orden cero.

Como vemos, [12] representa ondas incidentes progresivas. En el caso límite de oleaje totalmente reflejado en la playa la solución estacionaria se escribiría:

$$\phi = \frac{a \cdot g}{\omega_i} J_0(\chi) \cos \omega_i t \quad [13]$$

Naturalmente, el oleaje también tiene componentes no lineales con soluciones conocidas desde hace mucho tiempo. En particular, como veremos en el proceso de interacción, en el apropiado orden de magnitud aparecen términos no lineales debido a las ondas de orilla en forma de onda reflejada.

La idealización que representa la ecuación [12] es muy fuerte debido fundamentalmente a la rotura parcial del oleaje. La onda estacionaria que representamos mediante el potencial supone reflexión total, lo que está lejos de ocurrir en las playas aun cuando su pendiente sea acusada.

Conocidas las soluciones, tanto del oleaje como de la onda de orilla, estamos en condiciones de estudiar el proceso de interacción, pero antes procederemos a resolver las ecuaciones en un caso más general de playa de pendiente no uniforme.

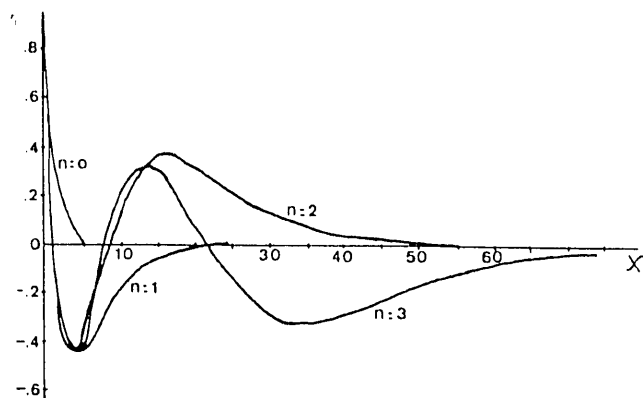


Fig. 1.—Dependencia respecto a χ de los cuatro modos primeros de la onda de orilla.

5. ONDAS DE ORILLA EN PLAYAS DE PENDIENTE NO UNIFORME

Las soluciones de ondas de orilla cuando la pendiente es uniforme ya la hemos señalado en el apartado 3. Cuando consideramos otro tipo de pendiente la solución analítica es prácticamente inabordable en la ecuación $L(\phi) = 0$. Holman y Bowen referencian otras soluciones. Ball, en 1967, obtuvo la solución en el caso de playa exponencial. En este caso, la expresión del potencial, ϕ , es extraordinariamente compleja en base a series hipergeométricas.

Nuestro enfoque, en este punto, es cualitativamente distinto, y se puede resumir como sigue: Para poder estudiar el proceso de resonancia ondas de orilla-oleaje es necesario conocer los potenciales de velocidad y, además, que éstas sean expresadas de una manera lo más simple posible, ya que si no los términos no lineales de las ecuaciones tienen expresiones desorbitadas. Por tanto, para el modo de orden cero, que es donde se producen las interacciones, fijamos la estructura del potencial de velocidades en función de un parámetro y calculamos la expresión de la batimetría que dé lugar a dicha estructura. Teniendo en cuenta que ésta es escogida de manera que cumpla las condiciones de contorno, y que además es la que correspondería al siguiente término en un desarrollo en exponenciales, comprobamos la validez de la solución, que en este caso es exacta.

La ecuación a resolver es, según [6],

$$-\phi_t + g(h\phi_x) + g(h\phi_y)_y = 0$$

Teniendo en cuenta la solución para $h = \tan \beta x$ y la periodicidad longitudinal de las ondas de orilla, la expresión del potencial de modo cero la adoptamos como sigue:

$$\phi = \frac{a_0 g}{\omega} (e^{-kx} + be^{-2kx}) \cos ky \cos \omega t \quad [14]$$

Después de resolver la correspondiente ecuación diferencial no homogénea se obtiene la expresión paramétrica de $h(x)$, la cual es bastante complicada (véase fig. 2).

La forma cóncava que presenta esta batimetría, salvo en la línea de costa, la hace especialmente adecuada para reproducir el perfil de pla-

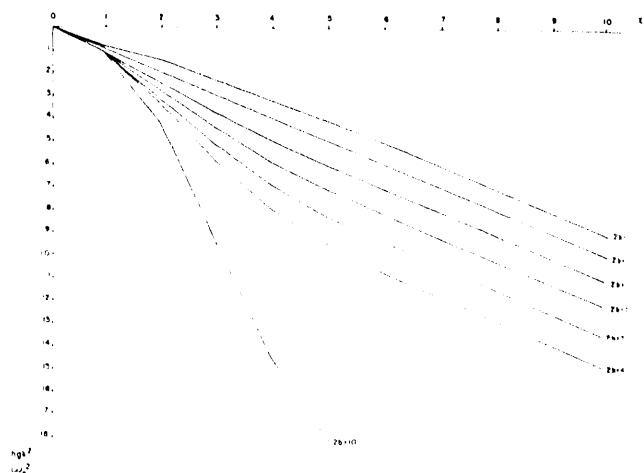


Fig. 2.—Gráfico de la función adimensional de la batimetría según distintos valores de $2b$.

yas reales. El cambio de perfil entre playa de pendiente uniforme y no uniforme implica el correspondiente cambio de frecuencia en las ondas de orilla. En el caso particular contemplado en la playa de Zahora, al Norte del cabo de Trafalgar, en Cádiz, la frecuencia pasa de un valor de $\omega = 0,26915$ rad/seg. en playas de pendiente uniforme a un valor de $\omega = 0,29484$ rad/segundo en la batimetría inmediatamente anterior a la aparición del modelado rítmico, véase figura. la variación relativa es, por tanto, del 9,55 por 100.

6. RESONANCIA ENTRE EL OLEAJE INCIDENTE Y LAS OLAS DE ORILLA

La perturbación en forma de onda de orilla no sería relevante si no se produjera la excitación de éstas por el oleaje incidente. Esta excitación se lleva a cabo mediante la resonancia de las ondas de orilla estacionarias de frecuencia ω por el oleaje de frecuencia 2ω . Es decir, se genera un mecanismo de resonancia subarmónica. Se puede comprobar mediante el cálculo y se observa en la naturaleza que la transferencia de energía entre el oleaje y las ondas de orilla estacionarias es máxima cuando la frecuencia de estas últimas es exactamente mitad que la de oleaje incidente fuertemente reflejado en la playa. Naturalmente, también puede establecerse la resonancia sincrónica, que precisamente se señala como el mecanismo generador de las llamadas *rip-currents*; sin embargo, en

condiciones adecuadas, es más fácil establecer la resonancia subarmónica, teniendo en cuenta que los términos cuadráticos y cúbicos del desarrollo de la ecuación de aguas poco profundas dan origen a términos que «resuenan» con el primer armónico, ω , de las ondas de orilla.

Para un determinado estado de los fondos, las ondas de orilla tendrán una frecuencia propia que podemos calcular como hemos señalado en los apartados anteriores. Para el establecimiento de la resonancia subarmónica es necesario, por tanto, que el oleaje incidente tenga una frecuencia exactamente doble que la de las ondas de orilla. En este caso las ecuaciones de interacción las desarrollamos como sigue:

Sustituimos, en la ecuación [4], el potencial de velocidad ϕ por la suma de los potenciales correspondientes a las ondas de orilla ϕ_o y al oleaje incidente ϕ_i :

$$\phi = \phi_o + \phi_i \quad [15]$$

Simbólicamente, la ecuación [4] se escribirá:

$$\begin{aligned} L(\phi_o) + L(\phi_i) = & (\phi_o, \phi_o) + (\phi_i, \phi_i) + \\ & + (\phi_i, \phi_o) + (\phi_o, \phi_i, \phi_o) + \\ & (\phi_o, \phi_o, \phi_i) + (\phi_o, \phi_i, \phi_i) + (\phi_o, \phi_o, \phi_o) \end{aligned} \quad [16]$$

en donde los paréntesis de dos términos engloban a los términos cuadráticos del desarrollo y los de tres a los correspondientes términos cúbicos.

Experimentalmente se comprobó, en medidas de laboratorio, por Galvin (1965) y Bowen e Inman (1969) que las ondas de orilla de modo cero son las únicas fácilmente excitables, por lo que efectuamos los desarrollos solamente para este modo.

De todos los términos de la ecuación [16] los únicos en los que puede aparecer el primer armónico es ω ; por tanto, los susceptibles de resonar con ϕ_o son los siguientes:

1. (ϕ_i, ϕ_o)
 2. (ϕ_o, ϕ_o, ϕ_o)
 3. (ϕ_o, ϕ_i, ϕ_i)
- [17]

El orden de magnitud correspondiente a cada uno de ellos es el siguiente:

1. $a_i a_o$
 2. a_o^3
 3. $a_i^2 a_o$
- [18]

Para que el equilibrio sea posible es necesario que los órdenes de magnitud de los dos primeros términos sean idénticos, para lo que:

$$\begin{aligned} O(a_i a_o) &= O(a_o^3) \quad \text{ó} \\ O(a_i^2 a_o) &= O(a_o^3) \end{aligned} \quad [19]$$

El potencial de velocidades total se puede expresar mediante el desarrollo siguiente, según órdenes de magnitud,

$$\begin{aligned} \phi = \phi_o + \phi_i = & a_i^{1/2} \phi_{o0} + a_i^{3/2} \phi_{o1} + a_i \phi_{i0} + \\ & + a_i^2 \phi_{i1} + \dots \end{aligned} \quad [20]$$

En el orden de magnitud $O(a_i^{1/2})$ tendremos:

$$L(\phi_{o0}) = 0 \quad [21]$$

La solución detallada para cada estado de fondos la hemos obtenido con anterioridad.

En el orden de magnitud ($O(a_i)$), la ecuación se expresa simbólicamente como:

$$L(\phi_{i0}) = (\phi_{o0}, \phi_{o0})$$

En el orden de magnitud $O(a_i^{3/2})$ es donde se presenta la resonancia subarmónica de las ondas de orilla por el oleaje incidente. La ecuación resultante la escribimos como:

$$L(\phi_{o1}) = (\phi_{i0}, \phi_{o0}) + (\phi_{o0}, \phi_{o0}, \phi_{o0}) \quad [23]$$

Como corresponde a un problema de resonancia, para que la ecuación [23] tenga solución, es necesario que la amplitud de la onda de orilla sea ligeramente variable con el tiempo, ya que de otra forma no podría expresarse su crecimiento mediante transferencia de energía del oleaje. Esta variación con el tiempo de a_o la escribimos como $a_o(T)$, siendo $T = at$, lo cual indica que la variación de a_o con respecto al tiempo da_o/dt se corresponde con el orden de magnitud $O(a_i a_o)$ o, lo que es lo mismo, $O(a_i^{3/2})$, siendo coherente con [23].

Los términos del segundo miembro de [23] son muy complicados, aun para el caso de playa de pendiente uniforme, si

$$\phi_{o1} = \phi_1(x) \cos kt \cos \omega t \quad [24]$$

La ecuación [23] podemos escribirla en la forma:

$$g \cos ky(h\varphi_{1,x} - hk^2\varphi_1 + \omega^2\varphi_1) = \\ = 2gi \frac{da_e}{dT} \cos ky\varphi_0 + ia_e a_e^* F(x) \cos ky + \\ + a_e a_e^* G(x) \cos ky \quad [25]$$

donde el asterisco significa complejo conjugado.

Como el primer miembro de [25] tiene la solución no trivial:

$$\varphi_0 = e^{-kx} + be^{-2kx}$$

es de aplicación la condición de ortogonalidad o alternativa de Fredholm, que expresa que para que φ_1 sea acotada ha de ser idénticamente nula la integral entre 0 e ∞ del segundo miembro multiplicado por la solución φ_0 de la ecuación homogénea:

$$\int_0^\infty \varphi_0 \left(2g \frac{da_e}{dT} \varphi_0 + a_e a_e^* F(x) + a_e a_e^* G(x) \right) dx = 0 \quad [26]$$

Resolviendo la integral [26] se llega a una ecuación diferencial que nos da $a_e(T)$. En el primer momento del proceso de interacción a_e es pequeño y a_e^* es mucho mayor, por lo que es despreciable el segundo miembro de la integral [26]. En nuestro caso, después de los oportunos

cálculos, tendremos:

$$\frac{da_e}{dT} = \frac{\varepsilon \omega}{16} a_e^* \frac{4e^{-2} + 12be^{-4/3} + 3b^2e^{-1}}{1 + \frac{4b}{3} + \frac{b^2}{2}} \quad [27]$$

en donde:

$$\varepsilon = \frac{a_e(2\omega)^2}{g \operatorname{tg}^2 \beta} \quad [28]$$

es el parámetro que representa la no linealidad del oleaje, que tiene una importancia decisiva en el proceso.

Como vemos por [27], en estas condiciones el crecimiento de la amplitud de la onda de orilla es exponencial, como corresponde a los fenómenos donde aparece la resonancia. El crecimiento no puede ser ilimitado, ya que cobraría cada vez más importancia el segundo término de [26] que lo impediría y, además —en suelos erosionables—, variaría gradualmente la batimetría de los fondos, con las consecuencias que veremos a continuación.

7. PROCESO DE EQUILIBRIO. RESONANCIA IMPERFECTA

Hasta aquí hemos considerado que si la frecuencia propia de las ondas de orilla era ω , la

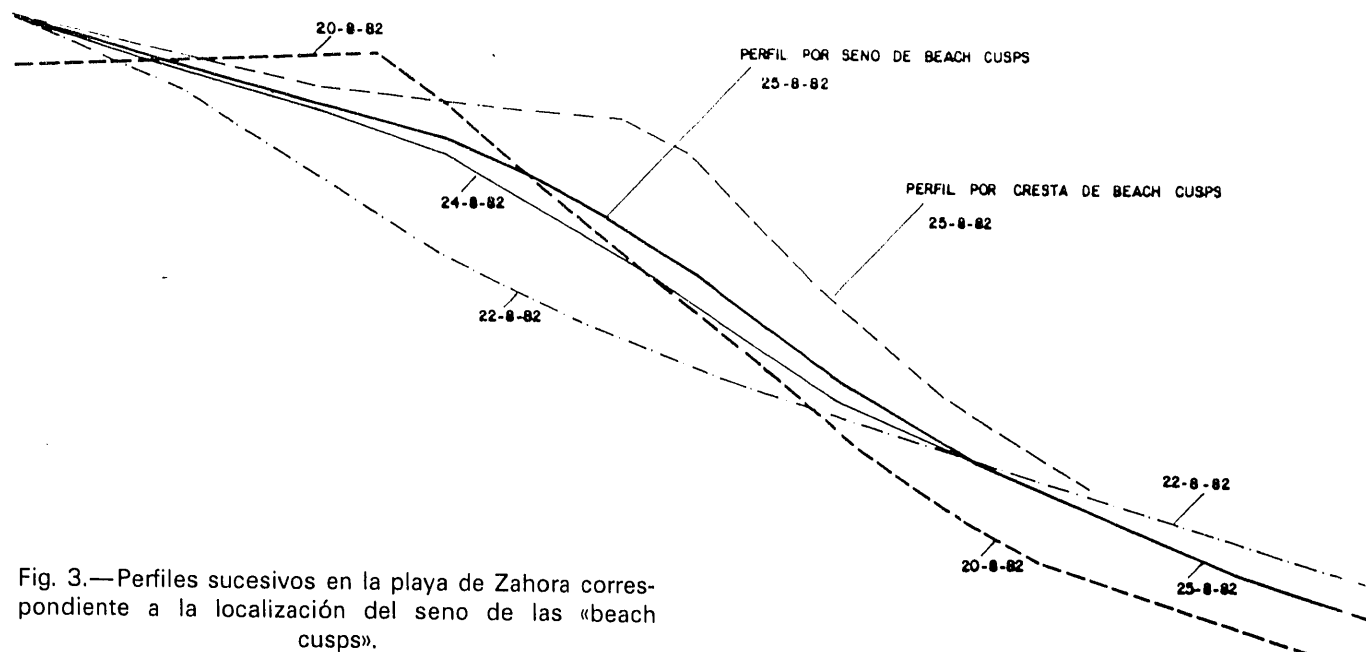


Fig. 3.—Perfiles sucesivos en la playa de Zahora correspondiente a la localización del seno de las «beach cusps».

frecuencia del oleaje que incide en la playa es exactamente 2ω . Sin embargo, al ir creciendo las ondas de orilla, estacionarias, el transporte de material sólido asociado a ellas, debido al gradiente del nivel entre puntos próximos, hace que se reproduzca en los fondos la estructura rítmica longitudinal de éstas, iniciándose la formación de las llamadas *beach cusps*, cuyo aspecto puede observarse en la fotografía de la playa de Guadalmanza (Málaga, véase fig. 4). Conforme va apareciendo este modelado va cambiando la frecuencia propia de las ondas de orilla, por lo que, ante un oleaje dado dejan de cumplirse exactamente la relación [1] y nos encontramos ante un caso de resonancia imperfecta. En el límite, la diferencia de frecuencias será tal que se caiga fuera de la banda admisible de resonancia. En este momento de proceso se detiene y el equilibrio se ha conseguido. Todo lo anterior, que se ha descrito fenomenológica-

mente, se puede desarrollar mediante las ecuaciones de interacción tal y como sintetizamos aquí.

En primer lugar hay que resolver las ecuaciones de las ondas de orilla en el caso de que los fondos tengan una perturbación rítmica longitudinal, para ello hacemos:

$$\begin{aligned} h &= h_0 + h_1 \cos 2ky \\ \phi &= \phi_0 + \phi_1 \\ \omega &= \omega_0 + \omega_1 \end{aligned}$$

viendo h_0 , ϕ_0 y ω_0 la solución en el caso de playa de pendiente no uniforme sin modelado rítmico y ϕ_1 y ω_1 los términos adicionales provocados por la perturbación rítmica h_1 . La ecuación a resolver se puede esquematizar como:

$$L(\phi_1) = -(h_1 \cos 2ky \phi_{0,y}) - (h_1 \cos 2ky \phi_{0,y}) - \frac{2\omega_0 \omega_1}{g} \phi_0 \quad [30]$$

Análogamente a como procedimos en el apartado 5, se dota a ϕ_1 de una estructura exponencial en los términos que multiplican al primer armónico en ky :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1(x) \cos ky + \phi_{1,3}(x) \cos 3ky \\ \phi_1(x) &= ce^{-3kx} + \text{t.o.s.} \end{aligned} \quad [31]$$

donde t.o.s. significa términos de orden superior a x .

La perturbación topográfica h_1 es función de h_0 y directamente proporcional al parámetro c , calculándose numéricamente el valor de:

$$\frac{gk^2}{\omega_0^2} h_1 \text{ en función de } kx$$

El cambio de frecuencia ω_1 se obtiene por la condición de ortogonalidad aplicada a [30]. El valor de:

$$\omega_1 \frac{(3b^2 + 8b + 6)}{48c\omega_0}$$

se calcula numéricamente en función de b .

Las ecuaciones de interacción en el caso de aparición de modelado rítmico es análoga a la [23] y [25], solo que en este caso $h = h_0 + h_1 \cos 2ky$, y se puede escribir como:

$$L(\phi_{e2}) = (\phi_{1,1}, \phi_{e1}) + (\phi_{e1}, \phi_{e1}, \phi_{e1}) \quad [32]$$



Fig. 4.—«Beach cusps» en la playa de Guadalmanza, Málaga. Sobre el perfil arenoso se disponen las rítmicas crestas de cantos (Fotografía del autor).

Fig. 5.—Rítmicas barras de arena conectadas a la costa. Su espaciamiento es de cientos de metros. Cape Cod, Massachusetts (Fotografía de David. S. Aubrey. Cortesía del autor).

Suponemos ahora que las ondas de orilla se encuentran ligeramente fuera de resonancia, con lo cual en el primer miembro de [32] aparecería, en vez de ω^2 , $(\omega + \Delta\omega)^2$, con lo cual el término análogo al segundo miembro de [25] se escribiría:

$$2gi \frac{da_{\omega}}{dT} \varphi_1 - 2g\varphi_1 \Delta\omega a_{\omega} + ia_{\omega} F_1(x) + [33] \\ + ia_{\omega} G_1(x) \cos ky$$

Aplicando la condición de ortogonalidad, y suponiendo que se llega a una situación de equilibrio, es decir que:

$$\frac{da_{\omega}}{dT} = 0$$

se obtiene el valor de $\Delta\omega$, que representa el ancho de banda admisible para que se dé resonancia. Una vez efectuados los cálculos se obtiene que:

$$\Delta\omega = \frac{\varepsilon\omega}{16} \frac{4e^{-2} + 12be^{-4/3} + (8b^2 + 16c)e^{-1} + 20bce^{-4/5} + 12c^2e^{-2/3}}{1 + \frac{4}{2}b + \frac{b^2}{3} + c + \frac{4}{5}bc + \frac{c^2}{3}} [34]$$

Igualando el cambio de la frecuencia ω_1 al valor del ancho de banda $\Delta\omega$ obtenemos una ecuación que nos permite obtener el valor de c para cada valor de b en la situación de equilibrio. Una vez obtenido c , tenemos todas las características de la perturbación topográfica h_1 , y en particular la amplitud máxima del modelado rítmico o *beach cusps*.

A continuación efectuamos la aplicación de este desarrollo a un caso real observado en la playa de Zahora, al Norte del cabo de Trafalgar, en la provincia de Cádiz. La sucesión de batimetrías con el modelado rítmico, y en los días inmediatamente anteriores, se esquematiza en la figura 3. En esta caso $k = 0,1231999712$ rad/m., obtenido directamente de la longitud de onda del modelado. El valor de b que mejor se ajusta es $b = 0,4$; el cálculo de $\omega_0 = 0,280665153$



rad/sg., que corresponde a un período de oleaje incidente de once segundo aproximadamente. El valor de c , obtenido por interacción de $\Delta\omega = \omega_1$, es $c = 0,7770$. La amplitud máxima de la perturbación topográfica:

$$h_{1,\max} = 0,487 \frac{\omega_0^2 c}{gk^2} = 0,20039 \text{ m.}$$

siendo la distancia entre cresta y seno, a_r , el doble de este valor; es decir:

$$a_r = 0,40079 \text{ m.} [35]$$

muy aproximado, al obtenido directamente por medición, que es de 0,44 m. Como vemos, la concordancia, a pesar de las idealizaciones empleadas en los cálculos, es francamente buena.

8. CONCLUSIONES

Entre las conclusiones más importantes que pueden extraerse de este trabajo figuran las siguientes:

- Importancia creciente en la consideración de las ondas de orilla en el modelado de la línea de costa. En efecto, las ondas de orilla no solamente son responsables de la aparición de formas rítmicas, tal y como hemos visto, sino que tienen relación con las *rip-currents*, con la circulación en «células» en las playas, etc., siempre que la pendiente de la playa y los períodos del oleaje induzcan la oportuna resonancia. En particular, explican convenientemente la generación de las formaciones que se muestran en la figura número 5, cedida amablemente por el doctor D. S. Aubrey. Según diversos autores, algunos tipos de costas en formaciones fácilmente erosionables se configuran debido a la interacción que hemos señalado.
- El desarrollo del proceso que lleva al equilibrio en la topografía de los fondos creemos que se encuentra suficientemente fundamentado, tanto teórica como prácticamente, mediante la consideración de la resonancia imperfecta debido al cambio gradual en la frecuencia propia de las ondas de orilla producido por la propia perturbación rítmica que se va formando. El ejemplo aducido en la playa de Zahora, al Norte de cabo Trafalgar (Cádiz), concuerda razonablemente con lo expuesto.
- En estos fenómenos resonantes es importante la condición de incidencia normal del oleaje. Fundamental, de igual forma, es la poca variabilidad del período del mismo, ya que de esto depende todo el «mecanismo». La pendiente de la playa es otra consideración esencial en este fenómeno por varias razones. En primer lugar, porque de ella depende el parámetro ε , que además de la no linealidad nos indica la reflexión del oleaje, que será tanto mayor cuanto más pequeño sea éste. En segundo lugar, porque la pendiente de la playa

forma parte de todas las formulaciones del problema, en especial en la relación de dispersión de la frecuencia de las ondas de orilla.

Ligado a lo anterior se encuentra el hecho de que los inicios de modelado más o menos rítmico en las playas suelen ser representación de una situación evolutiva erosiva. No en aquellas playas que las presentan frecuentemente debido a su configuración particular, como puede ser la playa de las Canteras, en las Palmas de Gran Canaria, sino en otras donde con anterioridad este fenómeno no se presentaba y donde las crestas de modelado suelen ser de granulometría mayor que el resto del perfil, como es el caso de la playa de Pinedo, en Valencia, y Santa María del Mar y Victoria, en Cádiz, o muchas otras de características análogas. Como vemos, esto puede ser interesante a la hora de estudiar la evolución de nuestras costas.

BIBLIOGRAFIA

- BOWEN, A. J.: «Edge waves and the littoral environment». Proceeding of the 14th Coastal Engineering Conference, 1972.
- BOWEN, A. J., y GUZA, R. T.: «Edge waves and surf beat», J. Geoph. Res., 83, 1978.
- FODA, M. A., y MEI, C. C.: «Non lineal excitations of long-trapped waves by a group of short swells», J. Fluid Mech., 11, 1981.
- GUZA, R. T., y DAVIS, R. E.: «Excitation of Edge Waves by waves incident on a beach», J. Geoph. Res., 79, 1974.
- GUZA, R. T., e INMAN, D. L.: «Edge waves and beach cusps», J. Geoph. Res., 80, 1975.
- GUZA, R. T., y BOWEN, A. J.: «On the amplitudes of beach cusps», J. Geoph. Res., 86, 1981.
- HOLMAN, R. A., y BOWEN, A. J.: «Bars, bumps, and holes. Models for the generation of complex beach topography», J. Geoph. Res., 87, 1982.
- HUNTLEY, D. A.; GUZA, R. T., y THORNTON, E. B.: «Field observations of surf beat. I. Progressive edge waves», J. Geoph. Res., 86, 1981.
- INMAN, D. L., y GUZA, R. T.: «The origin of swash cusp on beaches», Marine Geology, 49, 1982.

KOMAR, P. D.: «Beach Proceses and sedimentation. Prentice Hall». Engleewoods Cliffs, New Yersey, 1976.

LECHUGA ALVARO, A.: «Formas rítmicas en playas», Revista de Obras Públicas, mayo 1983.

LECHUGA ALVARO, A.: «Formas rítmicas en playas: su relación con la evolución costera», tesis doctoral, 1984 (en prensa).

MINZONI, A. A.: «Nonlinear edge waves and Shallow-water theory», J. Fluid. Mech., 1976.

MINZONI, A. A., y WHITAM, G. B.: «On excitation of edge waves on beaches», J. Fluid Mech., 1977.

ROCKLIFF, N.: «Finite amplitude effects in free and forced edge waves», Mech. Proc. Camb. Phil. Soc., 1978.

WHITMAN, G. B.: «Nonlinear effects in edge waves», J. Fluid Mech., 1976.

Antonio Lechuga Alvaro



Doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Terminó la carrera en 1971. Es doctor desde 1984 con la calificación de sobresaliente *Cum Laude*.

Funcionario del Centro de Estudios y Experimentación de Puertos y Costas, es jefe del Area de Estudios Litorales y vocal de la Comisión Científica del CEDEX.

Ha realizado numerosos trabajos sobre procesos costeros y estabilidad de playas entre los que destaca el «Estudio de dinámica litoral de la costa atlántica peninsular e Islas Canarias». Profesor de diversos cursos sobre ingeniería de costas, y publicaciones diversas sobre estos temas. En la actualidad trabaja sobre modelos matemáticos de evolución de playas.

