

El «momento flector» y el «esfuerzo cortante» en los distribuidores de energía eléctrica (distribuidores en c.c.) (1.ª Parte)(*)

Por **LUIS VEGA ARGÜELLES**

Doctor Ingeniero Industrial.
Profesor Titular de la Asignatura Sistemas Eléctricos
en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros
de Caminos, Canales y Puertos de Santander.

El cálculo de vigas en «Resistencia de materiales» y el estudio de los distribuidores de energía eléctrica presentan similitudes que permiten aprovechar en este último campo los numerosos resultados que han venido siendo empleados tradicionalmente en el primero.

1. INTRODUCCION

El presente estudio tiene por finalidad poner de manifiesto la gran similitud que existe entre el análisis del proceso de cálculo de vigas en «Resistencia de Materiales» con el estudio de los distribuidores de energía en el campo de la «Electrotecnia». Podemos afirmar que ambas cuestiones se pueden analizar aplicado los criterios de dualidad entre aquellos fenómenos que dan lugar a las mismas ecuaciones con un determinado rigor matemático.

En el análisis de vigas se puede decir que existe una bibliografía extensísima y que los problemas han sido resueltos en todos los casos imaginables, más en el caso de los distribuidores de energía eléctrica se puede afirmar todo lo contrario (**).

La gran ventaja que es posible deducir de este análisis sería el aplicar al estudio de determinados distribuidores los resultados y conclusiones de casos análogos ya conocidos en vigas.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En su aspecto más simple, el análisis de un distribuidor consiste en determinar la caída de tensión que una serie de cargas distribuidas a lo largo del mismo de la forma que el cliente de-

mande, en una línea de sección(es) y material determinado.

1er Caso: En la figura 1 representamos un distribuidor, ida y vuelta, alimentado por un extremo y con cargas a las distancias indicadas.

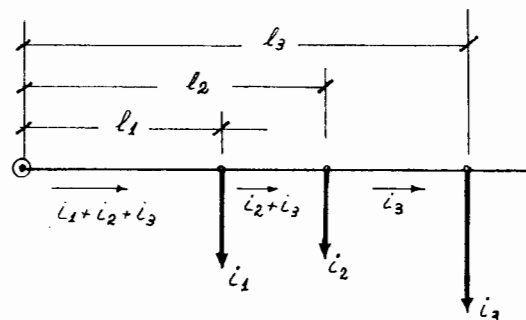


Figura 1.

Llamando ΔV a la caída de tensión total tendremos

$$(*) \Delta V = \frac{2\rho}{S} \{ (i_1 + i_2 + i_3) l_1 + (i_2 + i_3) (l_2 - l_1) + i_3 (l_3 - l_2) \} = \frac{2\rho}{S} (i_1 l_1 + i_2 l_2 + i_3 l_3) \quad [E.1]$$

expresión que generalizada es de la forma

$$\Delta V = \frac{2\rho}{S} \sum_{j=1}^n i_j l_j \quad [E.2]$$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 28 de febrero de 1986.

(**) Ver Bibliografía.

(*) L_j = Longitudes en (m); i_j = intensidades en (A);
 S = Sección (mm²).
 ρ = Coeficiente de resistividad ($\rho_{Cu} = \frac{1}{56} \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$;

$\rho_{Al} = \frac{1}{36} \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$).

se puede decir que: «La caída de tensión a lo largo de un distribuidor alimentado por un punto es directamente proporcional a la suma de los momentos de las intensidades respecto a dicho punto».

Este caso sería el dual de una viga en voladizo.

2.º Caso: Supongamos que este mismo distribuidor se alimenta por sus extremos con tensiones al mismo potencial y llamamos X e Y a las intensidades que salen de los puntos A y B de alimentación.

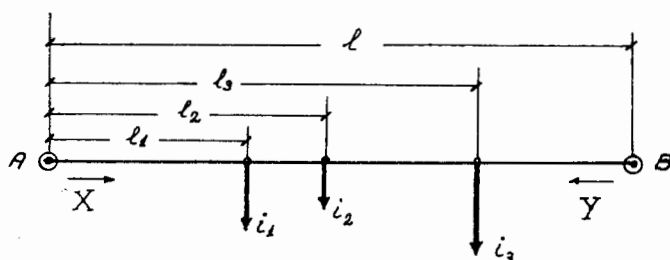


Figura 2.

La condición de equilibrio es que la suma de caídas de tensión a largo de todo el distribuidor es nula.

$$\begin{aligned} \Delta V &= 0 = \\ &= \frac{2\varrho}{S} \{ Xl_1 + (X - i_1)(l_2 - l_1) + (X - i_1 - i_2)(l_3 - l_2) + (X - i_1 - i_2 - i_3)(l - l_3) \} \end{aligned} \quad [E.3]$$

que simplificada nos queda

$$X = (i_1 + i_2 + i_3) - \frac{i_1 l_1 + i_2 l_2 + i_3 l_3}{l} \quad [E.4]$$

y generalizada es

$$X = \sum i_j - \frac{\sum i_j l_j}{l} \quad [E.5]$$

$$e \quad Y = \frac{\sum i_j l_j}{l} \quad [E.6]$$

expresiones idénticas a las de las reacciones en los apoyos de una viga apoyada en sus extremos.

3. RELACIONES ENTRE LA CAIDA DE TENSION Y LA INTENSIDAD

Supongamos un elemento de conductor que transporta una intensidad $i(x)$, la caída de tensión es

$$dV(x) = \frac{2\varrho}{S} dx \cdot i(x) \quad [E.7]$$

de donde se obtiene:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{2\varrho}{S} i(x) \quad [E.8]$$

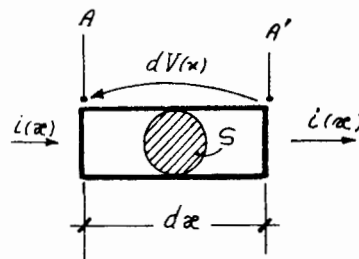


Figura 3.

«la derivada de la tensión respecto de la distancia en un punto es directamente proporcional a la intensidad en dicho punto».

Esta última expresión la podríamos denominar como el «Teorema de Zhuravski» para los distribuidores, por su analogía con el del referido nombre para las vigas (La derivada del momento flector respecto a la abscisa de la sección de la viga es igual al esfuerzo cortante).

Si sobre el elemento tenemos una intensidad uniformemente distribuida ($J(A/m)$) la caída de tensión sería

$$\begin{aligned} dV(x) &= \frac{2\varrho}{S} \{ i_1(x) \cdot dx + J(dx) \frac{dx}{2} \} = \\ &= \frac{2\varrho}{S} i_1(x) dx \end{aligned} \quad [E.9]$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{2\varrho}{S} i_1(x) \quad \text{igual que [E.8]}$$

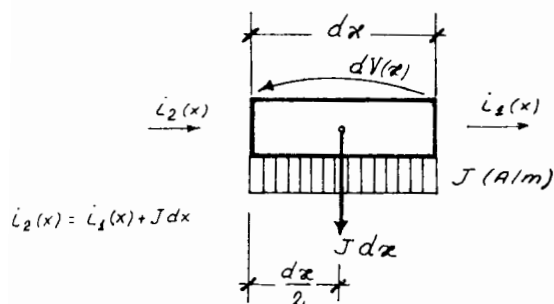


Figura 4.

al ser despreciable el 2.º sumando del paréntesis por ser infinitésimo de orden superior.

Otro supuesto lo tenemos cuando la intensidad que alimenta a una carga coincide con el elemento analizado.

Aquí resolveremos la ecuación diferencial tomando límites en el entorno de la intensidad ($+\epsilon$) por la derecha en donde la $i_1(x)$ está definida y en ($-\epsilon$) por la izquierda donde la $i_2(x)$ también es conocida y en el punto «exacto» donde se deriva la intensidad, la pendiente no está definida, es por tanto un punto anguloso.

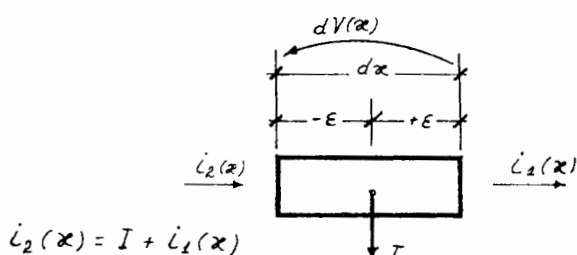


Figura 5.

La condición que imponemos es que $|\epsilon| \neq 0$ y $2\epsilon \geq dx$. Puntos a la derecha de I tendrán por ecuación:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{2\rho}{S} i_1(x) \quad [E.11]$$

y para los situados a la izquierda.

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{2\rho}{S} i_2(x) \quad [E.12]$$

4. CONSTRUCCIONES GRAFICAS DE LAS CAIDAS DE TENSION EN FUNCION DE LAS INTENSIDADES A LO LARGO DE UN DISTRIBUIDOR

Con objeto de conocer la ley de variación de la caída de tensión en todo el distribuidor y tener la seguridad de que su valor máximo está dentro de los límites admitidos en los reglamentos y que la intensidad máxima que puede soportar el conductor es inferior a la del límite térmico dado por el constructor sin que degenera el aislante, es interesante representar gráficamente tanto la $i(x)$ como la $V(x)$.

Analicemos estos gráficos mediante unos ejemplos concretos: E. 1. Sea un distribuidor alimentado por dos extremos al mismo potencial y con una carga cualquiera en un punto intermedio.

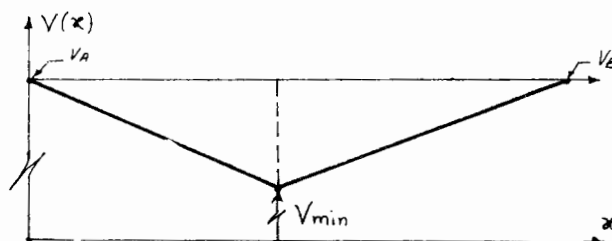
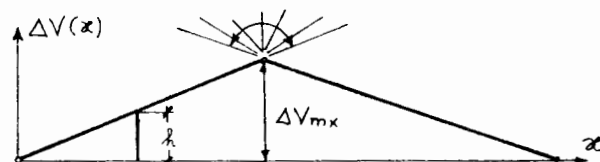
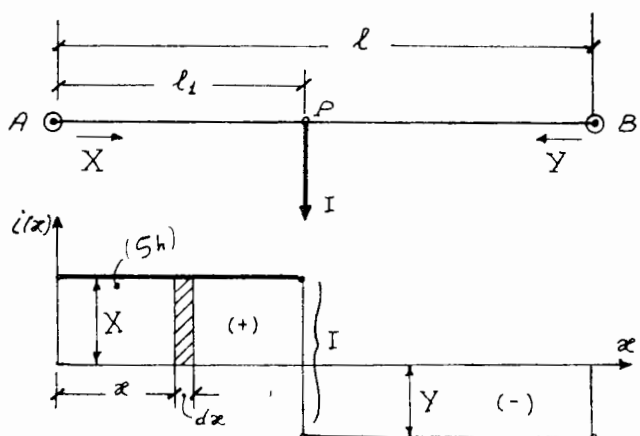


Figura 6.

$$X = I - \frac{I \cdot l_1}{l} = I \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) \quad [E.13]$$

$$Y = I \frac{l_1}{l} \quad [E.14]$$

para $0 \leq x < l_1$

$$\begin{aligned} \Delta V(x)_{AP} &= \frac{2\varrho}{S} \int_0^x i(x) dx = \frac{2\varrho}{S} X \cdot x = \\ &= \frac{2\varrho}{S} I \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) x + K_1 \end{aligned} \quad [E.15]$$

para $l_1 < x \leq l$

$$\begin{aligned} \Delta V(x)_{PB} &= \frac{2\varrho}{S} \int_x^{l_1} (-Y) dx = \\ &= \frac{2\varrho}{S} \left(-I \frac{l_1}{l} \right) (-x + l_1) + K_2 \end{aligned} \quad [E.16]$$

con

$$K_1 = 0 \text{ y } K_2 = \frac{2\varrho}{S} I \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) l_1 \quad [E.17]$$

al no tener ninguna fuente de tensión a la distancia l_1 , por tanto

$$\begin{aligned} (*) \Delta V(x)_{PB} &= \frac{2\varrho}{S} I \left\{ \frac{l_1}{l} (l_1 - x) + l_1 - \frac{l_1^2}{l} \right\} = \\ &= R_u I \left\{ l_1 - \frac{x}{l} \right\} \end{aligned} \quad [E.18]$$

La tensión en un punto cualquiera del distribuidor será igual a la de cualquiera de los puntos de alimentación (al ser $V_A = V_B$) menos la caída a largo del mismo.

$$V(x) = V_A - \Delta V(x) \quad [E.19]$$

En donde el punto de mínima tensión corresponde con el máximo de $\Delta V_{mx}(x)$ y tiene por valor.

$$V_{min} = V_A - R_u I \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) l_1 \quad [E.20]$$

$$(*) \left(-\frac{2\varrho}{S} \right) (1) = R_u (\Omega/m)$$

en el diseño de distribuidores este valor vendrá fijado por el reglamento correspondiente y por tanto de (E.20) se puede determinar R_u y consiguiendo definir el tipo de cable.

La ordenada en un punto cualquiera (h) del diagrama de caídas de tensión es igual al área subintegral (Sh) del diagrama de intensidades y el mismo área positivo (+) del diagrama de intensidades es por tanto igual al área (-) ya que la caída de tensión a lo largo del distribuidor es nula.

E.2. Si en lugar de una carga, tenemos varias su análisis sería similar.

$$\Delta V_1 = X l_1 R_u \quad [E.21]$$

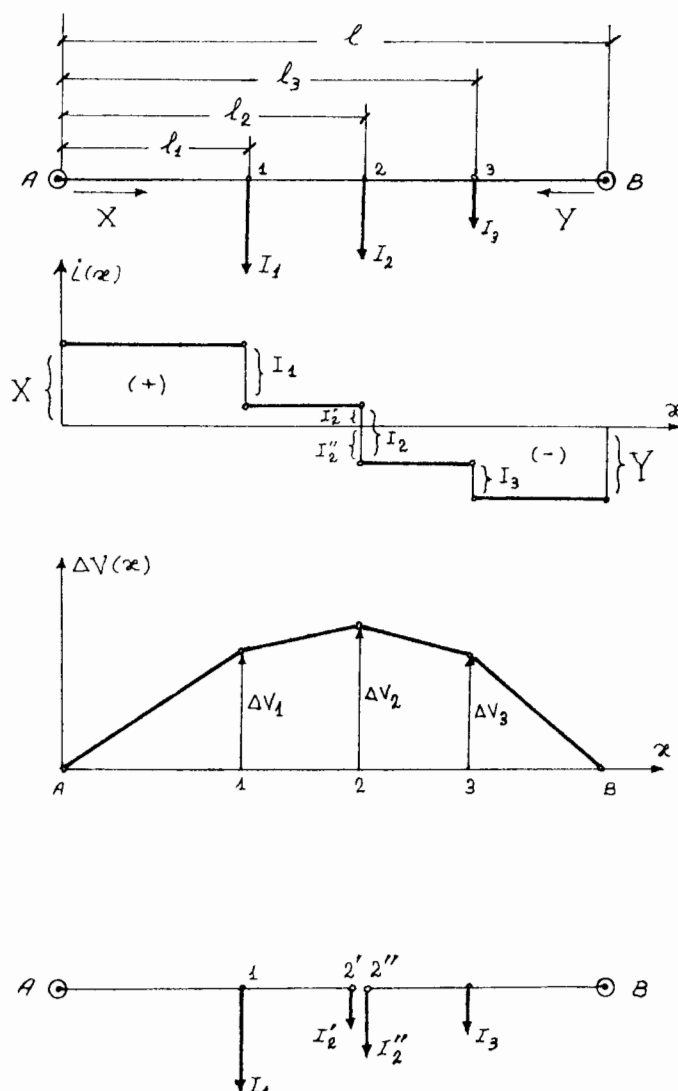


Figura 7.

$$\begin{aligned}\Delta V_2 &= \Delta V_1 + (X - I_1) (l_2 - l_1) R_u = \\ &= X I_1 \cdot R_u + X I_2 R_u - X I_1 \cdot R_u - I_1 R_u I_2 + I_1 I_1 R_u = \\ &= X I_2 R_u - I_1 R_u (l_2 - l_1) \quad [E.22]\end{aligned}$$

$$\Delta V_3 = Y R_u (l - l_3) \quad [E.23]$$

En algunos casos puede ser necesario solamente el determinar la máxima caída de tensión es decir, el punto de mínima tensión.

$$\Delta V_{mx} = R_u (I_1 l_1 + I_2 l_2) \quad [E.24]$$

Como veremos este valor se puede deducir sin necesidad de desarrollar todo el cálculo, para ello se busca el punto en el cual la intensidad cambia de sentido y se separa el distribuidor en dos «rompiendo» el punto (para este supuesto) en 2' y 2''. Esta rotura no modifica para nada la distribución de las intensidades, si cargamos en 2' la I_2' y en 2'' la I_2'' de valores.

$$I_2' = X - I_1 \quad [E.25]$$

$$I_2'' = I_2 - I_2' = Y - I_3 \quad [E.26]$$

Evidentemente esta caída de tensión se puede hacer indistintamente alimentando por A (E.24) o alimentado por B (E.27).

$$\Delta V_{mx} = R_u \{ I_3 (l - l_3) + I_2' (l - l_2) \} \quad [E.27]$$

E.3. Distribuidor con carga uniforme alimentado por dos puntos, al mismo potencial.

Por simetría las intensidades X e Y serán iguales y de sentido contrario.

$$X = -Y = \frac{Jl}{2} \quad [E.28]$$

$$i(x) = J \left(\frac{1}{2} - x \right) \quad [E.29]$$

$$\Delta V(x) = R_u \int_0^x J \left(\frac{1}{2} - x \right) = R_u \frac{Jx}{2} (l - x) \quad [E.30]$$

que es la ecuación de una parábola que tiene su máximo en $X = l/2$ y toma por valor.

$$\Delta V_{mx} = R_u \frac{Jl^2}{8} \quad [E.31]$$

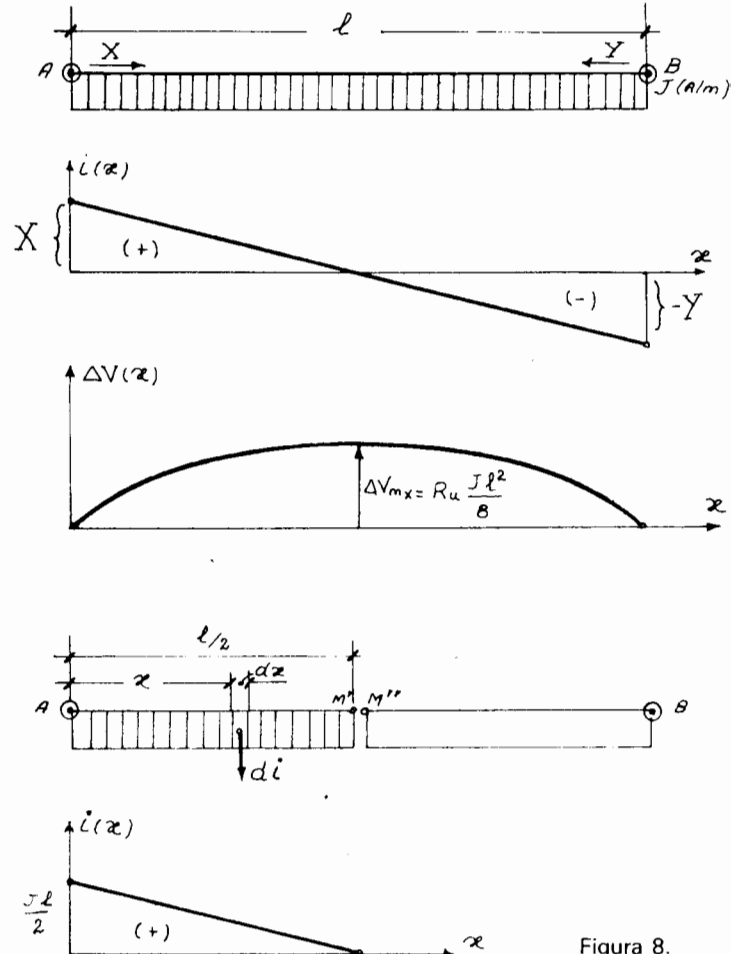


Figura 8.

Por supuesto que a este resultado debemos llegar separando el distribuidor por la mitad y resolviendo una cualquiera de ellas. Veamos:

Para una intensidad infinitesimal $di = J \cdot dx$ a una distancia (x) de A originará una caída de tensión, que tomando momentos es:

$$d \cdot \Delta V(x) = R_u \cdot di \cdot x = R_u \cdot J \cdot dx \cdot x \quad [E.32]$$

que integrada

$$\begin{aligned}\Delta V(x) &= \int_0^{1/2} R_u \cdot J \cdot x \cdot dx = \\ &= R_u \cdot J \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^{1/2} = R_u \frac{Jl^2}{8} \quad [E.33]\end{aligned}$$

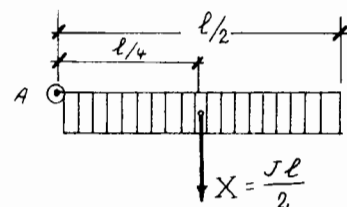


Figura 9.

Si se sustituye toda la carga de este distribuidor por su resultante (X) aplicada en su centro de gravedad nos proporciona una caída de tensión

$$\Delta V_R(x) = R_u \cdot X \cdot \frac{1}{4} = \frac{Jl}{2} \cdot \frac{1}{4} = R_u \frac{Jl^2}{8} \quad [E.34]$$

que es análoga a la de la «carga» uniformemente distribuida de vigas. Esta simplificación es utilizada con ventajas en múltiples aplicaciones.

E.4. Carga uniformemente distribuida que no cubre todo el distribuidor alimentada por dos puntos al mismo potencial.

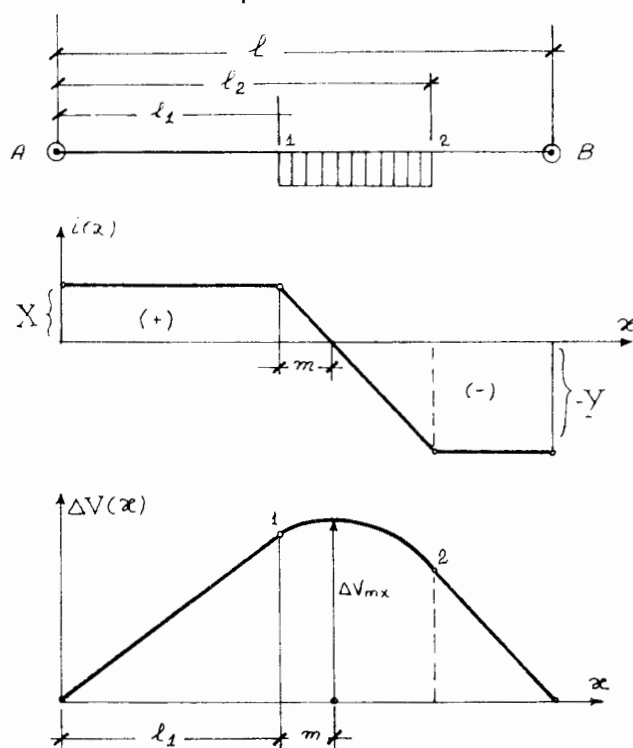


Figura 10.

$$X = I(l_2 - l_1) - \frac{I(l_2 - l_1) \left(\frac{l_1 + l_2}{2} \right)}{l} \quad [E.35]$$

$$Y = \frac{J(l_2 - l_1) \left(\frac{l_1 + l_2}{2} \right)}{l} \quad [E.36]$$

$$\frac{X}{m} = \frac{Y}{l_2 - l_1 - m} \Rightarrow Xl_2 - Xl_1 - Xm = my$$

$$m = \frac{X(l_2 - l_1)}{Y + X} \quad [E.37]$$

$$m = \frac{X(l_2 - l_1)}{J(l_2 - l_1)} = \frac{X}{J} = \left(l_2 - l_1 - \frac{l_2^2 - l_1^2}{2l} \right) \quad [E.38]$$

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= R_u \{ X \cdot x - J(x - l_1)(x - l_1)/2 \} = \\ &= \{ X \cdot x - J(x^2 + l_1^2 - 2lx) \} R_u \quad [E.39] \end{aligned}$$

derivando parcialmente respecto a x obtendremos el máximo

$$\frac{\partial \Delta V(x)}{\partial x} = 0 = X - J(x - l_1) \quad [E.39.1]$$

$$x = (X/J + l_1) \quad [E.39.2]$$

es decir igual a $m + l_1$, como tenía que suceder ya que el máximo de la caída de tensión se tiene que verificar en el punto para el cual se anula la intensidad.

Las pendientes de la parábola en los puntos 1 y 2 deben coincidir con las pendientes de las rectas ya que no existe cambio brusco en la distribución de la intensidad en dichos puntos.

$$\begin{aligned} \Delta V_{mx} &= R_u \left\{ X \left(\frac{X}{J} + l_1 \right) - J \left(\frac{X}{J} + l_1 - l_1 \right) \cdot \right. \\ &\cdot (X/J + l_1 - l_1)/2 \left. \right\} = R_u \left\{ \frac{X^2}{J} + Xl_1 - \frac{X^2}{2J} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{X^2}{2J} - Xl_1 \right\} R_u = \{ X(X/2J - l_1) \} R_u \quad [E.40] \end{aligned}$$

E.4. Caso de un distribuidor alimentado por dos puntos a distinto potencial ($V_A \neq V_B$).

Supongamos que $V_A > V_B$ y llamamos ΔV a la diferencia entre ambas tensiones. Aplicando el Teorema de Superposición a la descomposición del distribuidor original en los indicados b) y c) tendremos:

$$X = X' + X'' \quad [E.41]$$

$$Y = Y' + Y'' \quad [E.42]$$

Ecuaciones en las que X' e Y' ya han sido analizadas anteriormente y la $X'' = -Y''$ es

$$X'' = \frac{\Delta V}{R_u \cdot l} \quad [E.43]$$

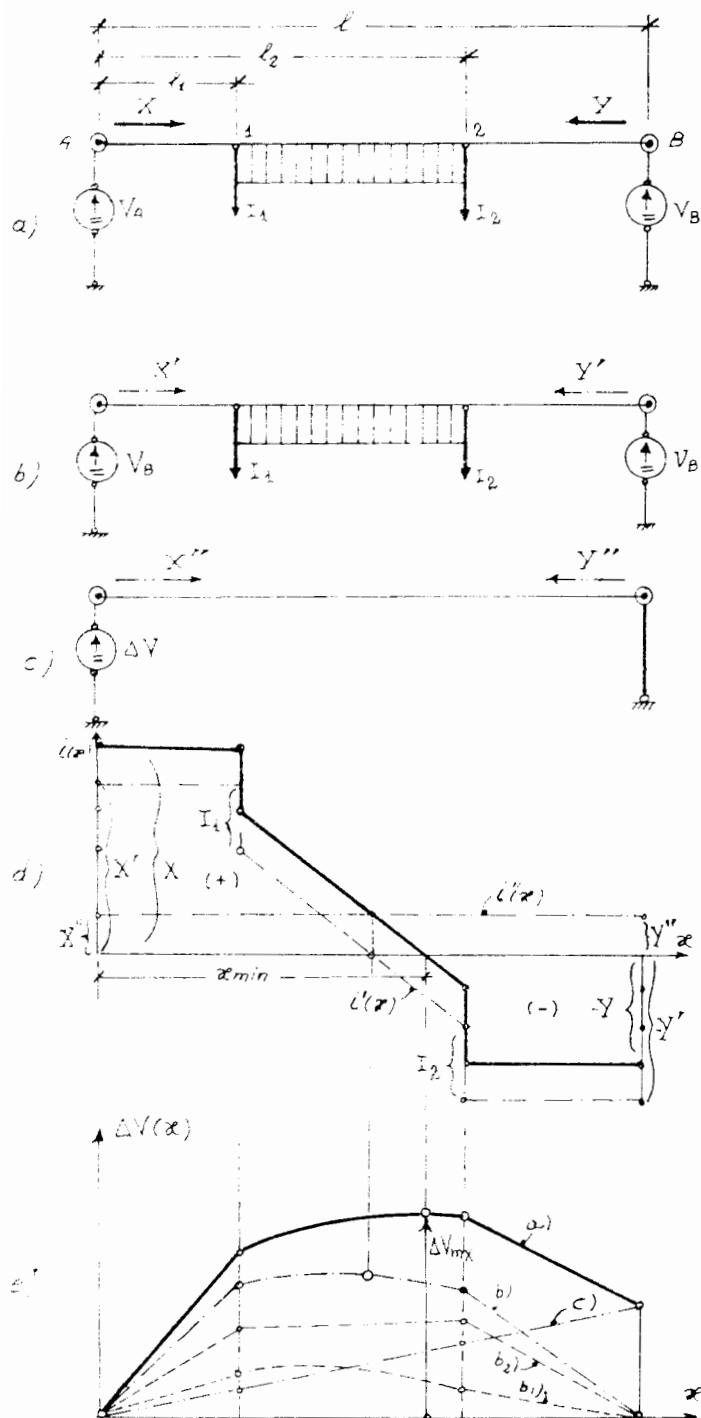


Figura 11.

Para determinar el punto de mínima tensión se calculará previamente la abscisa x_{min} que tiene por valor

$$(X_{min} - I_1) J = X' + X'' - I_1 \quad [E.44]$$

$$X_{min} = (X' + X'' - I_1)/J + I_1 \quad [E.45]$$

por lo que

$$\Delta V_{mx} = R_u \{ (x' + x'') I_1 + [(x' + x'' - I_1)/J] (x' + x'' - I_1) 1/2 \} \quad [E.46]$$

La suma de las respuestas de la carga uniformemente distribuida (b_1) y cargas concentradas (b_2) para un distribuidor alimentado por dos puntos al mismo potencial nos suministra la respuesta (b); a la cual le sumamos la caída de tensión originada por X'' , recta (c), para obtener la caída de tensión a lo largo del distribuidor en función de la distancia, gráfico (a).

El valor de la tensión $V(x)$ lo obtendremos

$$V(x) = V_A - \Delta V(x) \quad [E.47]$$

restando punto a punto al potencial de V_A la caída correspondiente (ver figura 12) en donde el punto de mínima tensión se corresponde con el de máxima caída ΔV_{mx} . Para determinar este valor no tendremos más que calcular el área subintegral del gráfico de $i(x)$ hasta el punto de cambio de signo, punto definido por x_{min} en (E.45). El valor absoluto de esta máxima caída de tensión esta dado por (E.46).

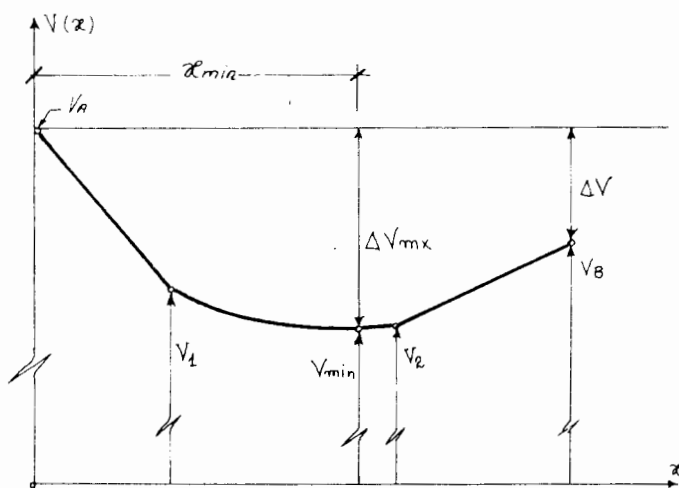


Figura 12.

por lo que

$$V_{min} = V_A - R_u \{ (x' + x'') I_1 + \left(\frac{x' + x'' - I_1}{J} \right) (x' + x'' - I_1) \frac{1}{2} \} \quad [E.48]$$

(Conclusiones y bibliografía en la 2.ª parte).