

Utilización de los números complejos en el estudio de la flexión^(*)

Por FELIX SORIANO SANTANDREU
y ALFONSO SOLER GOMEZ

Profesores del Departamento de Física
de la ETS de Arquitectura de Madrid

En la exposición se estudian dos pequeños aspectos del problema de la flexión en vigas utilizando, en ambos casos, los números complejos y sus operaciones en base al conocido isomorfismo con los vectores planos.

En primer lugar se obtiene una cómoda fórmula para la flexión esviada y a continuación, y siempre en el uso de los complejos, se identifica al Núcleo Central de Inercia de secciones (muy utilizada en las enseñanzas de Física de la ETSAM) con el muy conocido Núcleo Central de las tensiones. (Lógicamente en la misma sección).

1. INTRODUCCION

El uso de los números complejos es posible, en fenómenos de flexión en los cuales no interviene simultáneamente ningún tipo de torsión, al quedar reducido el problema al trabajo con vectores en el plano de la sección analizada de por ejemplo una viga o en el peor de los casos en uno de los dos sentidos, o en ambos a la vez, de la dirección perpendicular al plano de la sección citada, que ya sabemos puede expresarse como un escalar afectado del signo adoptado por convenio. (Por ejemplo positivo si va de sección de la viga hacia el observador).

Con el objetivo de conseguir unas fórmulas válidas, con independencia de las direcciones de los ejes baricéntricos escogidos, indicaremos o en algún caso recordaremos la notación que se va a utilizar, comenzando por las operaciones:

$\bar{V} \cdot \bar{H}$ = Producto ordinario entre complejos (Giro-Homotecia entre vectores).

$\bar{V} \oplus \bar{H}$ = Producto tensorial (llamado diádico si se consideran vectores y no tensores de orden uno).

$\bar{T} \cdot \bar{V}$ = Producto escalar tensor por vector (o interno entre tensores).

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de julio de 1984.

Si denominamos $\bar{k}$ al unitario de la dirección perpendicular al plano de los complejos, los productos vectoriales en que él intervenga, junto con un vector del plano se pueden expresar:

$$\bar{r} \lambda \bar{a} \bar{k} = - (i\bar{r})a$$

Siendo $\bar{r}$ el vector de posición de un punto del plano de la sección con origen en el c. de g. de la misma.

Es también conveniente recordar la siguiente propiedad del producto diádico y escalar entre vectores:

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c} = (\bar{c} \oplus \bar{b}) \cdot (\bar{a} = (\bar{c} \oplus \bar{a}) \cdot \bar{b}$$

Vamos a pasar a desarrollar los casos citados.

2. FLEXION DESVIADA (O ESVIADA)

Es el caso en el cual el plano de actuación del momento, en la sección, no coincide con el plano de la deformada (ya hemos indicado que no tendremos en cuenta el problema de la torsión con lo cual admitimos deformada plana) o lo que es equivalente en el vector momento (que estará contenido en el plano de la sección) no es paralelo a la fibra neutra, en el plano de la sección, que pasará por el c. de g. por no considerar la existencia de esfuerzo axial.

En el caso más general (ver figuras 1 a, 1 b y

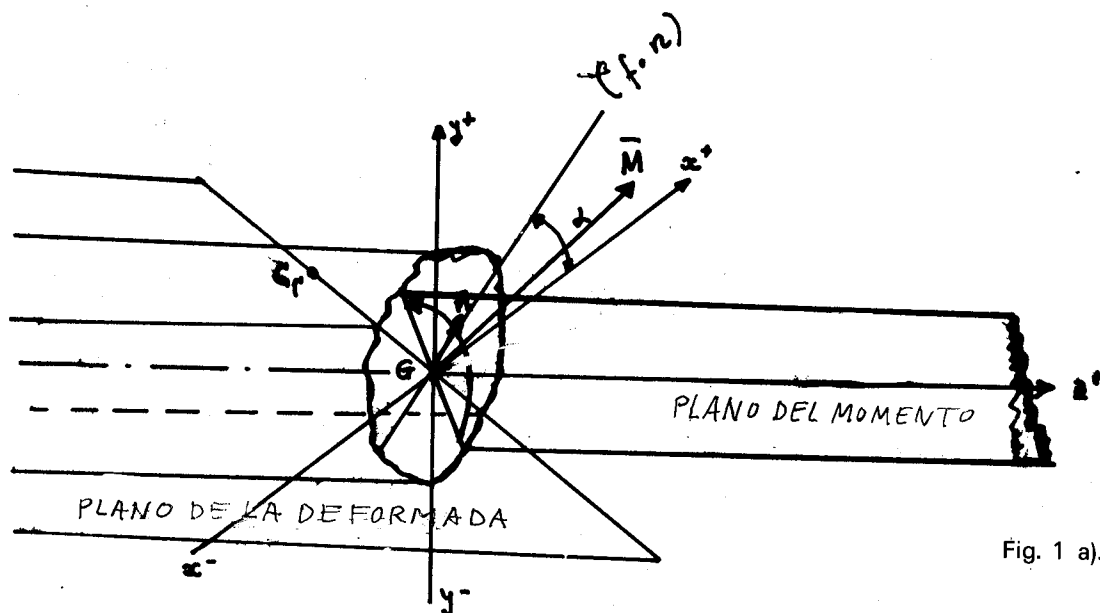


Fig. 1 a).

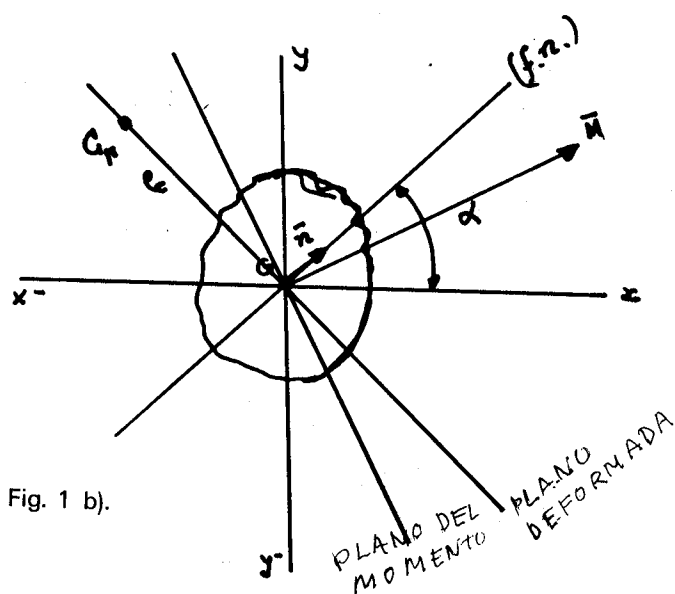


Fig. 1 b).

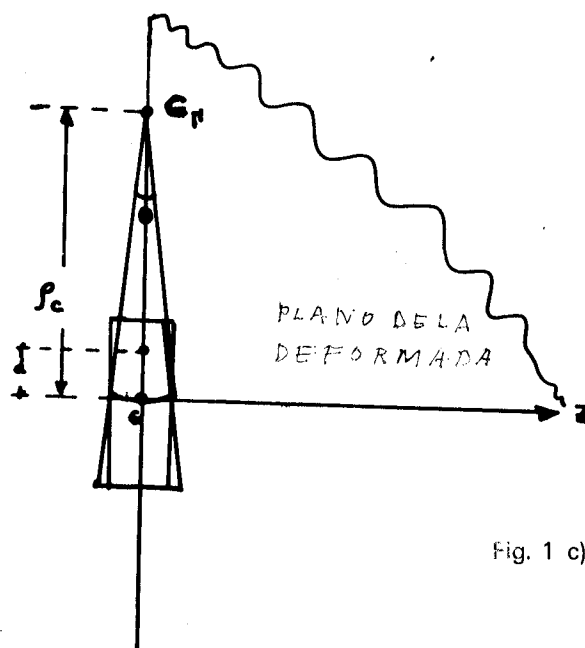


Fig. 1 c).

1 c) supongamos que la fibra neutra (f. n.) en el plano ya citado tiene una dirección marcada por el unitario $\bar{n}$ que como complejo podrá escribirse:

$$\bar{n} = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Donde los ejes x-y están dibujados con fines de comprobación con las expresiones ya conocidas de la flexión esviada.

En consecuencia la ecuación de la línea neu-

tra en la sección adoptará la forma:

$$i\bar{r} \cdot \bar{n} = 0 \text{ (notación compleja)}$$

Como es conocido de resistencia de materiales de deformación unitaria longitudinal de un punto cualquiera de la sección $M(x,y)$ es (valor absoluto):

$$\epsilon_z = \frac{d(x,y)}{\rho_c}; d(x,y) = i\bar{r} \cdot \bar{n} \quad (2-1)$$

Siendo $d(x, y)$ la distancia a la fibra neutra del punto M de la sección y ρ_c el radio de curvatura de la deformada en su intersección con el plano de estudio.

A su vez ha de cumplirse la hipótesis de Hooke:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = \frac{E}{\rho_c} (i \bar{r} \cdot \bar{n}) \quad (2-2)$$

El momento de las tensiones normales a la sección en el c. de g. ha de ser igual al momento externo que corresponde a la sección; $\bar{M}$ (ver figuras citadas). Es decir:

$$\bar{M}^G = \bar{M} = \int_A \bar{r} \lambda \sigma_z (-\bar{k}) dA = \int_A i \bar{r} \sigma_z dA = \int_A i \bar{r} \frac{E}{\rho_c} (i \bar{r} \cdot \bar{n}) dA$$

Por tanto:

$$\bar{M} = \int_A \frac{E}{\rho_c} [i \bar{r} \cdot \bar{n}] i \bar{r} dA = \int_A [i \bar{r} \oplus i \bar{r}] \cdot \bar{n} dA$$

Donde:

$$i \bar{r} \oplus i \bar{r}$$

En unas cartesianas se escribe:

$$(-y \ x) \oplus (-y \ x) = \begin{vmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{vmatrix} \quad (\text{matricial})$$

y en consecuencia la integral:

$$I(G) = \begin{vmatrix} \int_A y^2 dA & -\int_A xy dA \\ -\int_A xy dA & \int_A x^2 dA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{vmatrix}$$

es el tensor de inercia del centro de gravedad correspondiente a la sección estudiada en el área A en su expresión matricial cartesiana.

Por tanto en forma intrínseca:

$$\int_A (i \bar{r} \oplus i \bar{r}) dA = \bar{I}(G) = \text{Tensor de inercia central de la sección.}$$

Y, en definitiva:

$$\bar{M} = \frac{E}{\rho_c} \bar{I}(G) \cdot \bar{n} \quad (2-3)$$

Nos proporciona el momento intermedio de la inercia y del unitario de la recta neutra.

Si despejamos $\bar{n}$ en (2-3) y lo llevamos a (2-2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_z (-\bar{k}) &= \frac{E}{\rho_c} \left[\frac{\rho_c}{E} \bar{I}^{-1}(G) \cdot \bar{M} \right] i \bar{r} = \\ &= (i \bar{r}) \cdot \bar{I}^{-1}(G) \cdot \bar{M} \end{aligned} \quad (2-4)$$

Donde $\bar{I}^{-1}(G)$, representa el tensor de transformación inversa correspondiente al central de inercia.

Como comprobación de la bondad de la solución expresada por (2-4) desarrollaremos en forma matricial y en una base cualquiera ortogonal y cartesiana tal como:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -(i \bar{r}) \cdot \bar{I}^{-1}(G) \cdot \bar{M} = \begin{vmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{vmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} \frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2} \\ &\quad (2-5) \end{aligned}$$

y totalmente desarrollada por:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2} [(y I_y - x I_{xy}) M_x + \\ &\quad + (y I_{xy} - x I_x) M_y] \end{aligned} \quad (2-6)$$

Podemos, pues, cotejar, con los libros de resistencia usuales, la gran simpleza y generalidad del procedimiento aquí expuesto y que se plasma en la ecuación (2-4). La ecuación vectorial-compleja de la recta que representa la línea neutra en la sección vendría dada por:

$$\sigma_z = -(i \bar{r}) \cdot \bar{I}^{-1}(G) \cdot \bar{M} = 0$$

(al no ser $\bar{n}$, en general, conocido)

3. FLEXION COMPUESTA: NUCLEO CENTRAL DE TENSIONES Y NUCLEO CENTRAL DE INERCIA

Conocemos por medio de (2-4) la distribución de tensiones normales en flexión pura, aún en el caso de que ésta sea esviada, cuya forma

era (teniendo en cuenta el signo negativo impuesto por el convenio):

$$\sigma_z = -(i \bar{r}) \cdot \bar{I}^{-1} (G) \cdot \bar{M}$$

Si llamamos σ'_z a la tensión de compresión (que es la que hace a nuestro caso, de búsqueda del núcleo central) que provoca en la sección una fuerza axial excéntrica, que a su vez da lugar al momento externo $\bar{M}$ sobre la sección, el valor de esta tensión de compresión será:

$$\sigma'_z = \frac{N}{A} \quad (3-1)$$

Con lo cual la tensión total en cada elemento superficial de la sección vendrá dado por:

$$\sigma'_z (\bar{r}) = -(i \bar{r}) \cdot \bar{I}^{-1} (G) \cdot \bar{M} - \frac{N}{A} \quad (3-2)$$

Y como la naturaleza del momento, en este caso, es tal que proviene de tomar en G momentos estáticos de la fuerza $\bar{N}$ normal (en compresión) a la sección considerada, tendremos (ver figura 2).

$$\bar{M} = \bar{r}_c \lambda N (-\bar{k}) = (i \bar{r}_c) N$$

Donde $\bar{r}_c$ es el vector de posición del punto C de aplicación de $\bar{N}$ en el plano de la sección.

Luego:

$$\sigma'_z (\bar{r}) = -(i \bar{r}) \cdot \bar{I}^{-1} (G) \cdot (i \bar{r}_c) N - \frac{N}{A} \quad (3-3)$$

Si, con el fin de conseguir que en toda la sección no aparezcan tracciones, obligamos a que en el punto del contorno P ($\bar{r}_p$) más desfavorable a ello, como caso mínimo, la tensión total sea cero, se verificará:

$$\sigma'_z (\bar{r}_p) = - \left[(i \bar{r}_p) \cdot \bar{I}^{-1} (G) \cdot (i \bar{r}_c) + \frac{1}{A} \right] N = 0 \quad (3-4)$$

Lo cual al dividir por $\bar{N}$ nos lleva a:

$$A (i \bar{r}_p) \cdot \bar{I}^{-1} (G) \cdot (i \bar{r}_c) + 1 = 0 \quad (3-5)$$

Que es una antipolaridad recíproca entre los puntos P, del contorno de la figura sección, y los puntos C, de aplicación de la fuerza excéntrica $\bar{N}$, respecto de la elipse central de los radios de giro (vista en la asignatura «Ampliación de física» de la carrera de Arquitectura).

Para comprobar lo últimamente afirmado expresaremos la relación (3-5) en coordenadas

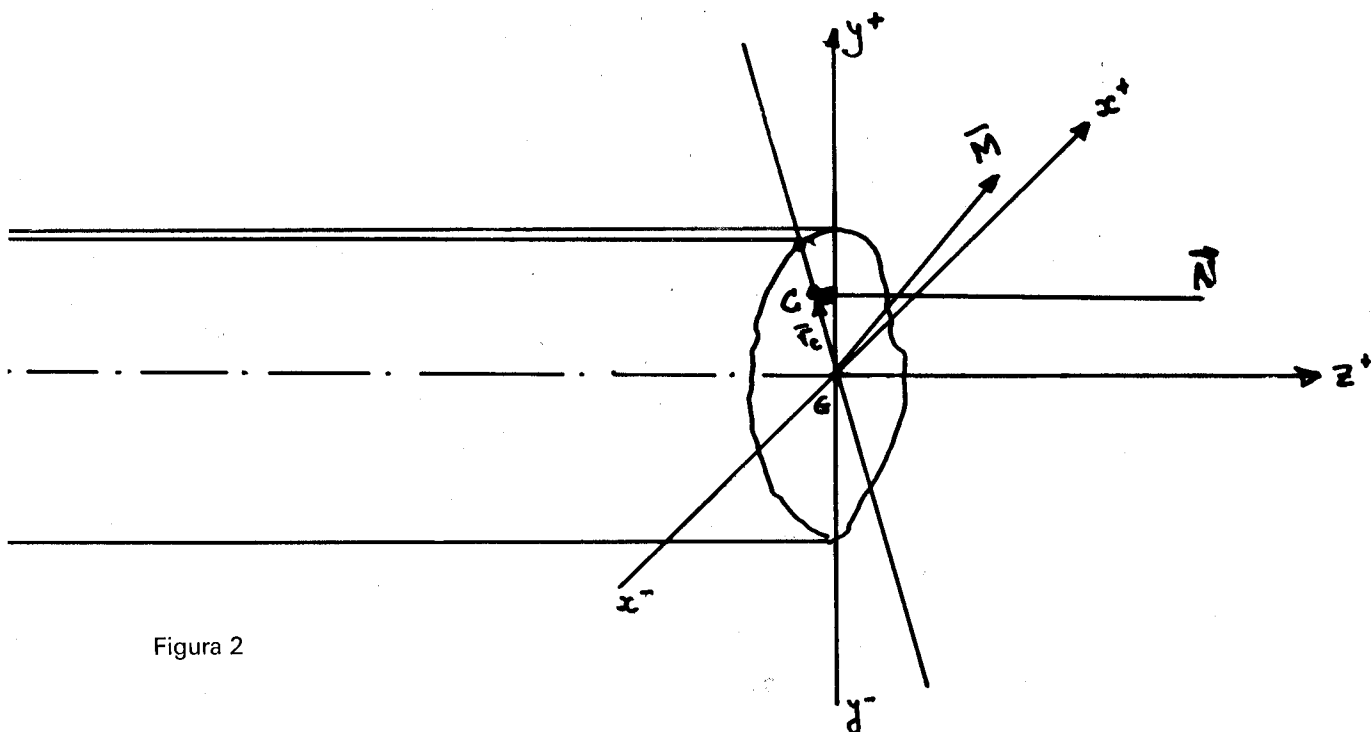


Figura 2

cartesianas coincidentes con los ejes principales del tensor central de inercia de la sección, que ya sabemos coincide con los ejes de la elipse central de los radios de giro.

En efecto, sean estos ejes x^o e y^o y los momentos de inercia respecto a ellos I_x^o e I_y^o , con lo que al desarrollar matricialmente (3-5) tendremos:

$$A \begin{vmatrix} -y_p^o & x_p^o \\ I_y^o & 0 \\ 0 & I_x^o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -y_c^o \\ x_c^o \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{I_x^o I_y^o} + 1 = 0 \quad (3-6)$$

Que simplificado quedará (como $I_x^o = A r_x^2$ e $I_y^o = A r_y^2$):

$$A \begin{vmatrix} -y_p^o & x_p^o \\ A r_y^2 & 0 \\ 0 & A r_x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -y_c^o \\ x_c^o \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{A^2 r_x^2 r_y^2} + 1 = 0 \quad (3-7)$$

Y que a su vez puede ser puesto en la forma:

$$\frac{1}{r_x^o r_y^o} \begin{vmatrix} -y_p^o & x_p^o \\ r_y^2 & 0 \\ 0 & r_x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -y_c^o \\ x_c^o \end{vmatrix} + 1 = 0$$

o bien:

$$\frac{x_p^o x_c^o}{r_y^o} + \frac{y_p^o x_c^o}{r_x^o} + 1 = 0 \quad (3-8)$$

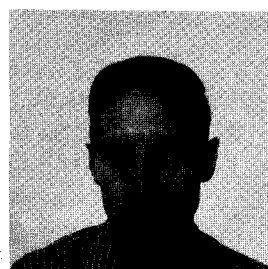
De manera que al elegir P o C alternativamente como variable originan antipolares de C o P, respectivamente, teniendo como cónica la elipse central de los radios de giro.

Queda, por tanto, identificado, como es sabido, el concepto de «núcleo central» de tensiones con el estudiado en Física como «núcleo central» de inercia.

Queda como expresión más general, en notación compleja, de esta antipolaridad la dada por (2-5), es decir:

$$A (i \bar{r}_p) \cdot \bar{I}^{-1} (G) \cdot (i \bar{r}_c) + 1 = 0$$

Félix Soriano Santandreu



Ingeniero de Caminos por la Escuela de Madrid. Doctor por la misma Escuela desde 1979.

Se ha dedicado fundamentalmente a la enseñanza habiéndola ejercido en la Universidad Complutense durante siete años llegando a ser por tres años profesor adjunto contratado de Física Médica.

En la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, ha desempeñado funciones durante ocho años, siendo encargado de curso, hasta 1981, adjunto contratado en 1982, y actualmente es adjunto numerario en la disciplina Grupo III «Física».

Ha sido secretario y es en la actualidad subdirector de la mencionada ETS de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid.

Alfonso Soler Gómez



Licenciado en Física por la Universidad Complutense, Máster of Sciences en Física por la Universidad de Manitoba (Canadá), doctor en Ciencias Físicas por la Universidad Autónoma (Física aplicada), diplomado en Óptica (Universidad Complutense). Actualmente profesor de la Cátedra de Física de la ETS de Arquitectura de Madrid. Ha publicado trabajos en Física del estado sólido y energía solar.