

Estudio de canales con dos corrientes superpuestas (*)

Por LUIS DEL CAÑIZO

Doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Un mar casi cerrado modifica su salinidad respecto al océano y en el estrecho que los une la diferencia de densidad genera una corriente profunda más salada y una contracorriente superficial. El régimen permanente se define por cuatro variables incógnitas, el espesor y el caudal de cada uno de los dos flujos, determinándose con cuatro ecuaciones, dos de Bernoulli y dos de máximo. Se estudian las influencias cuantitativas de la pendiente del canal, de la fricción, de la evaporación neta, de la rotación de la tierra, y de la forma del canal según su sección sea un triángulo o un rectángulo. Aplicado al estrecho de Gibraltar se demuestra la existencia de dos secciones que simultáneamente limitan el caudal, la más estrecha y la menos profunda, con mayor inestabilidad entre ellas.

INTRODUCCION

Al conectar dos recipientes con líquidos de diferente densidad mediante un canal, se genera un intercambio con una corriente densa inferior y una contracorriente superficial de líquido menos denso (fig. 1). Es sabido que este fenómeno se presenta entre mares antiguos con aguas de diferente densidad debido a su distinta salinidad o temperatura, y es uno de los problemas clásicos estudiados en oceanografía. El proceso es similar al del aliviadero de una presa. La determinación de las corrientes tienen interés en hidráulica, oceanografía, ecología, pesca, navegación de superficie o submarina, meteorología y construcción de obras marítimas, resultando útil un modelo matemático que contraste, guíe o disminuya la medición *in situ*, lenta y costosa.

Algunos autores [Lacombe (5), Conclusiones] llegan a considerar que un modelo matemático es «inaccesible», probablemente debido a que la superposición de diversos fenómenos da una gran complejidad al problema, con gran variabilidad en el espacio y en el tiempo de los resultados de las mediciones *in situ* y a la

inestabilidad matemática del sistema de ecuaciones que gobierna el problema físico, lo que hace que dichos resultados sean a veces desconcertantes o aparentemente contradictorios.

ECUACIONES DE ALTURA DE ENERGIA

Las cuatro variables incógnitas son:

Las alturas verticales de ambas corrientes superior e inferior r y y .

Las velocidades de ambas corrientes w , v , respectivamente, que se suponen uniformes en toda la altura. Conocidas las velocidades se deducen los caudales Q_v y Q_r multiplicando por las áreas mojadas A_v y A_r . Se suponen líneas de corriente paralelas y con curvatura despreciable. En general será $w < v$.

Las variables que generalmente serán datos conocidos son:

Densidad del mar menos denso, d_v , y del más denso, d_r . La diferencia de densidades relativas será $\Delta d = 1 - d = (d_r - d_v)/d_v$. Alturas de energía de la corriente inferior densa, h , y de la superior, H , tomadas como altura de agua con su densidad respectiva. Debido a la conservación de la sal puede ser un dato el cociente de los caudales Q_v/Q_r , siendo en cambio incógnita la diferencia de alturas $H-h$.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de agosto de 1984.

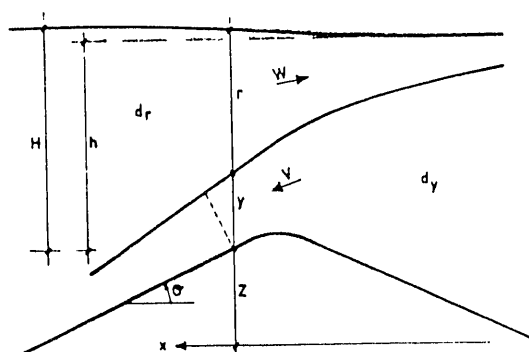


Fig. 1.—Doble corriente generada entre dos mares contiguos con densidades d_r , d_y .

Geometría variable del canal a lo largo de su longitud x , definida por la cota $z = z(x)$ de la solera y su anchura, $2b = 2b(x, y)$.

Se aplica la ecuación de Bernoulli, a ambas corrientes a lo largo de todo su recorrido. Para ello, en la ecuación de un canal de flujo único, a la presión atmosférica hay que sumarle la presión de la columna de agua del líquido superior de densidad d (fig. 1), para la corriente inferior, y para la superior hay que adoptar como cota de la solera $y + z$. En el lado del mar menos denso:

$$h = z + y \cos^2 \theta + d(r + y \sin^2 \theta) + h_1 + \alpha_r v^2 / 2g$$

$$H = (z + y) + r + H_1 + \alpha_w w^2 / 2g \quad [1]$$

$$v = Q_r / A_r \cos \theta; w = Q_y / A_y \cos (\theta/2) \quad [2]$$

Donde $\tan \theta$ es la pendiente de la solera y α es el coeficiente de energía de Coriolis debido a la distribución no uniforme de velocidades, y las pérdidas de altura son h_1 , H_1 .

Dichas ecuaciones sólo tienen sentido físico en el tramo

$$y > 0; r > 0; h > y + rd; H > y + r \quad [3]$$

Para cada canal rectangular, por unidad de anchura con $\tan \theta = 0$, $z = 0$, siendo

$$K = Q_r \sqrt{\alpha_r / Q_y} \sqrt{\alpha_y}$$

$$\frac{\alpha_r Q_r^2}{2g A^2} = G_r = y^2 (h - y - rd) \quad [4]$$

$$G_r = r^2 (H - y - r) = \frac{\alpha_r Q_r^2}{2g A^2} \quad [5]$$

$$K^2 G_y - G_r = K^2 y^2 (h - y - rd) - r^2 (H - y - r) = 0 \quad [6]$$

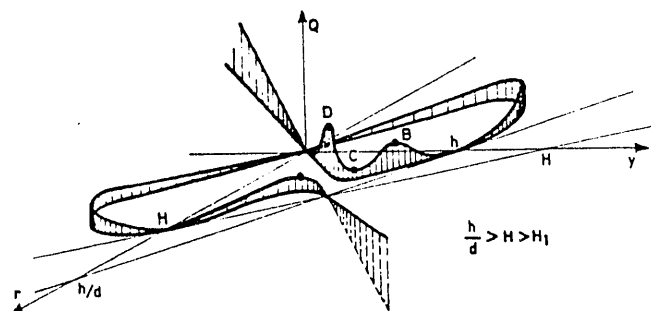


Fig. 2.—Curva intersección de las ecuaciones de Bernoulli [4] y [5].

Las ecuaciones [4, 5] son dos superficies regladas en el espacio (Q, y, r). La curva intersección [6] es unicursal (fig. 2) y se comprueba que degenera en el producto de una recta y una elipse, para H_1 definido por

$$(h - H_1, d)^2 K^2 h = H_1 (H_1 - h)^2 \quad [7]$$

DETERMINACION DE LOS CAUDALES

La sección del canal de área y altura mínimas limita el caudal de ambas corrientes. El régimen permanente se puede determinar obligando a que los caudales sean los máximos posibles, es decir, calculando los máximos de G_r en la función [4] condicionada por [6], tomando como variables independientes y, r, H , si los datos son h, K . Aplicando el método de Lagrange se obtienen dos condiciones de máximo que completan el sistema de cuatro ecuaciones:

$$(2h - 2dr - 3y)(2H - 3r - 2y) - dr = 0 \quad [8]$$

Dada la particularidad de que ambas superficies, [4] y [5], poseen una recta horizontal en la que todos los puntos son máximos o mínimos, la otra condición de máximo no conduce a resultados útiles, pero mediante [8] se puede eliminar H de [6], quedando

$$2K^2 y^2 (h - y - rd)(2h - 3y - 2rd) - r^3 - (2h - (3 - d)y - 2rd) = 0 \quad [9]$$

Pudiendo ahora obtener los máximos de [4] condicionados por [9] con variables independientes solamente y, r . Aplicando de nuevo el método de Lagrange se encuentra la segunda

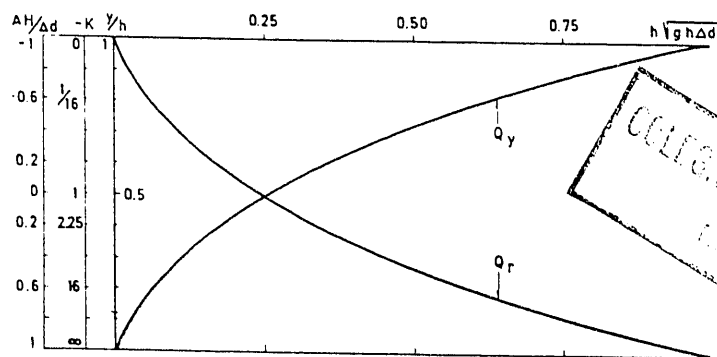


Fig. 3.—Caudales Q_v , Q_r , en función del cociente de caudales K , desnivel entre mares H , altura de la corriente inferior y/h , para canal rectangular.

condición de máximo, que es la ecuación cúbica.

$$(2h - 3y - 2rd)^2 [2h - (3 - d)y - 2rd] + 2d^2 ry (h - y - rd) = 0 \quad [10]$$

La condición [8] equivale también a obligar en el plano y a la tangencia de las curvas [4] y [5], o lo que es lo mismo, a que en el espacio (yrG) la recta tangente a la curva intersección de las superficies [4] y [5] sea paralela al plano $G = 0$. La condición [10] equivale a obtener el valor de H que hace máximo Q y hace tangentes a las curvas [6] y [8]. Para que se presente el máximo [10] es necesario que previamente se cumpla [8]. De [4, 5, 8] se deduce para $\Delta d \rightarrow 0$ la condición entre los números de Froude F :

$$\frac{A_v}{A} F_v^2 + \frac{A_r}{A} F_r^2 = \frac{\alpha_v v^2}{gy \Delta d} + \frac{\alpha_r w^2}{gr \Delta d} = 1 \quad [11]$$

que coincide con la condición de onda estacionaria. Si, además, se cumple [10] debe ser $F_v F_r = 1$.

El sistema de cuatro estaciones, válido para valores de K y d , no necesariamente pequeños, se puede resolver por tanteos.

En la práctica, la diferencia de densidades Δd suele ser pequeña. Tomando los dos primeros términos del desarrollo en serie mediante expresiones de la forma $y/h = e + e_1 \Delta d + e_2 \Delta d^2$, se obtienen las fórmulas aproximadas, válidas para Δd pequeño, con K cualquiera, positiva o negativa.

$$e = \frac{1}{1 + \sqrt{|K|}}$$

$$\begin{aligned} y/h &= e + 0,25 e (2 + e - 5e^2) \Delta d \\ r/h &= (1 - e) + 0,25 (1 - e) (4 - 2e - 5e^2) \Delta d \\ H/h &= 1 + (1,5 - 2e) \Delta d \\ Q_v/2b &= e^2 h \sqrt{gh \Delta d / \alpha_v} = v y \\ Q_r/2b &= -(1 - e)^2 h \sqrt{gh \Delta d / \alpha_r} = w r \\ v - w &= \sqrt{gh \Delta d / \alpha} \end{aligned} \quad [12]$$

Si la incógnita es K y el dato H , la relación entre el desnivel relativo ΔH y el coeficiente de caudales K es en el umbral, en primera aproximación (fig. 3).

$$\begin{aligned} \sqrt{|K|} &= \frac{\Delta d + \Delta H}{\Delta d - \Delta H} = \frac{r}{y} = \frac{w}{v} = \frac{1 - e}{e} = \\ &= \sqrt{-\frac{Q_r}{Q_v}} \sqrt{\frac{\alpha_r}{\alpha_v}} = F_r = \frac{1}{F_v} \end{aligned} \quad [13]$$

$$e = (\Delta d - \Delta H)/2 \Delta d; H h_0 = H_0 - h_0 (1 + 0,5 \Delta d)$$

El caso $K = -1$ es particularmente interesante, por corresponder a mares contiguos con diferencias de salinidad muy pequeñas, y suponiendo $\alpha_v = \alpha_r$, ha sido estudiado por Rouse (7, p. 763), Yih (11, p. 137), Whitehead y cols. (10), y Bryden y Stommel (2). Suponer $K = -1$, cuando realmente $K = -2$ conduce a un error superior al 30 % del caudal, y del 20 % en la profundidad de la interfaz. Por ejemplo, en el Bósforo $K = -2,2$.

CANAL DE SECCION TRIANGULAR

Con sección triangular, isósceles o no, a las ecuaciones de Bernouilli [4, 5, 6, 8 y 10], de sección rectangular, corresponden respectiva-

mente:

$$G_v = \frac{\alpha_v Q_v^2}{2g A^2} = y^4 (h - y - rd) \quad [14]$$

$$G_r = \frac{\alpha_r Q_r^2}{2g A^2} = r^2 (2y + r)^2 (H - y - r) \quad [15]$$

$$K^2 y^2 (h - y - rd) - r^2 (2y + r)^2 (H - y - r) = 0 \quad [16]$$

$$4 (H - y - r) [rJ + y (J - dy)] - r (2y + r) J = 0 \quad [17]$$

siendo $J = 4h - (5 - d)y - 4rd$

$$r (2y + r) [J^3 - d^2 y^2 (24h - (25 - d)y - 24rd)] = 6J [rJ + y (J - dy)]^2 \quad [18]$$

Para valores $y \rightarrow 0$, el área A_v es un infinitésimo de segundo orden y la solución pierde aproximación. La solución aproximada con los dos primeros términos del desarrollo en serie, para diferencia de densidad Δd pequeña y cualquier valor de K , resulta para valores de $y/h > 0,3$.

$$K^2 e^6 (1 + 5e^2) = 5 (1 - e^2)^4$$

$$y = eh; r = (1 - e)h$$

$$\frac{y + r}{h} = 1 + \left(1 - \frac{5e}{24} (5 + e^2)\right) \Delta d$$

$$\frac{H}{h} = 1 + \left(1 + \frac{5}{24} \frac{1 - 7e^2}{2}\right) \Delta d$$

$$G_v = \frac{h e^5 (1 - e^2)^4}{24} \Delta d \quad [19]$$

$$G_r = \frac{h 5 (1 - e^2)^4}{24 e} \Delta d$$

Para $K = -1$, $y/h = 0,6915 = e$. Debiendo resolverse la primera ecuación [19] para obtener e . De las fórmulas [12] y [19] se deduce que si una sección triangular se aproxima con un rectángulo de igual área, de igual altura y base mitad, el error para $K = -1$ es de un caudal 18,3 % mayor. Es más correcto ajustar un rectángulo, de altura y base $\sqrt{2}$ veces menores que las del triángulo, así se produce un error en el caudal de 0,55 % menor para $K = -1$, de 6 %

mayor para $K = -2$, y el error en la profundidad absoluta de la interfaz r respecto al nivel del mar, es de 14,6 % mayor para $K = -1$ y de 22,1 % menor para $K = -2$. El error de ajustar una sección triangular en los estrechos reales debe ser varias veces menor a las cifras anteriores, pues se aproxima mucho más a éstos que al rectángulo y a la parábola (Anati, 1).

INFLUENCIA DE LA ROTACION TERRESTRE

La aceleración de Coriolis debida al giro terrestre inclina la superficie interfaz transversalmente al canal (Seco, 8). La variación transversal de la interfaz y la velocidad siguen una ley lineal, con pendiente proporcional al parámetro $f = 2 \omega \sin \phi$ siendo ω la velocidad de rotación y ϕ la latitud; señalando con el subíndice c las variables afectadas por la rotación, su variación en función de la coordenada transversal B , con origen en el eje del canal, es:

$$v_c = v - fB; w_c = w - fB \quad [20]$$

$$y_c = y + f (v - w) B / g \Delta d = y (1 + B/b_c)$$

siendo $b_c = gy \Delta d / f (v - w)$. La velocidad media se obtiene integrando el área de cada corriente. Para sección rectangular de ancho y altura limitados de modo que la interfaz corte los lados del canal y no su fondo (fig. 4A).

$$\begin{aligned} Q_{vc} &= \int_{-b}^b (v - fB) y (1 + B/b_c) dB = \\ &= 2bv y - 2fyb^3/3b_c = Q_v \left(1 - \frac{fb^2}{3vb_c}\right) = \\ &= Q_v \psi_v = A_v v \psi_v \end{aligned} \quad [21]$$

$$\begin{aligned} Q_{rc} &= \int_{-b}^b (w - fB) dB \int_y^h dr = \\ &= Q_r \left(1 - \frac{b^2 f}{3wb_c}\right) = A_r w \psi_r \end{aligned}$$

Whitehead y cols. (10) determinaron las fórmulas [12, 21] para el caso particular $K = -1$.

La distribución no uniforme de velocidades [20] interviene en las ecuaciones [1] a través del

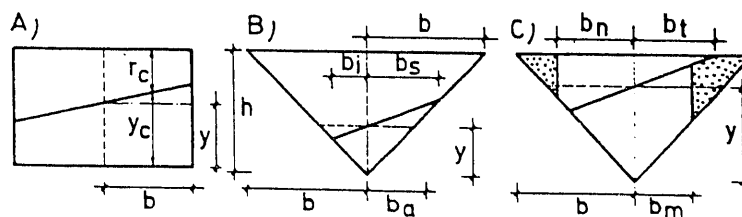


Fig. 4.—Inclinación transversal de la interfaz. A) Canal rectangular. B) Canal triangular. C) Caso de gran inclinación relativa.

coeficiente de cantidad de movimiento β_c

$$\beta_{cv} = \frac{\int (v - fb)^2 y (1 + B/b_c)^{dh}}{A_{vc} v^2 \psi_v^2} = 1 + \frac{F^2 b^2}{3 v^2} \quad [22]$$

$$\beta_{cr} = \frac{\int (w - fb)^2 dA}{A_{rc} w^2 \psi_r^2} = 1 + \frac{F^2 f}{3 v^2}$$

Dichos valores β_c deberían multiplicarse por los valores usuales de α que tienen en cuenta la distribución de velocidades no uniforme debida a la fricción. En el umbral $b_c = \alpha v/f$, quedando

$$\beta_c = 1 + \alpha - \alpha \psi$$

En un canal triangular, con origen de B en la mediana, se tienen los límites de integración (fig. 4B).

$$b_a = yb/h; \quad b_s = b_a b_c/(b_c - b_a);$$

$$b_i = b_a b_c/(b_c + b_a)$$

$$Q_{vc} = \int_{-b_i}^0 (v - fB) dB \int_{-hB/b_a}^y (1 + B/b_c) dy +$$

$$+ \int_0^{b_s} (v - fB) [y(1 + B/b_c) + hB/b] dB =$$

$$= v y \frac{b_s + b_i}{2} \left(1 - f \frac{b_s - b_i}{3v} \right) = v A_{vc} \psi_v$$

$$Q_{rc} = \int_{-b}^{-b_i} (w - fB) h \left(1 + \frac{B}{b} \right) dB +$$

$$+ \int_{b_i}^{b_s} (w - fB) \left(h - y \left(1 + \frac{B}{b_c} \right) \right) dB +$$

$$+ \int_{b_s}^b (w - fB) h \left(1 - \frac{B}{b} \right) dB =$$

$$= w \left(hb - y \frac{b_i + b_s}{2} \right) + \frac{fy}{6} (b_s^2 - b_i^2) = w A_{rc} \psi_r \quad [23]$$

Para canales muy anchos las velocidades definidas en [20] llegan a adquirir en las orillas valores exagerados, bien valores nulos o que cambian de signo o muy altos con mayor influencia de la fricción. Modificando adecuadamente los recintos de integración con el procedimiento aquí utilizado se pueden estudiar secciones de cualquier forma. Para el triángulo, cuando $f(v - w)b > rg \Delta d$, en que la interfaz corta la superficie del mar, cuando w_c llega a valores positivos al ser $-w < fb$, y cuando v_c llega a valores negativos al ser $v < fb$, suponiendo aguas muertas junto a la costa, los límites de integración serán (fig. 4C):

$$b_t = b_c r/y; \quad b_n = -w/f; \quad b_m = v/f$$

$$Q_{rc} = wh(b_n + b_i) - \frac{wy}{2} \left(b_i + \frac{b_n^2}{b_a} + 2b_t + \right.$$

$$\left. + \frac{b_i^2}{b_c} + \frac{f}{6} (3hb_n^2 - rb_i^2 - yb_t^2) \right)$$

$$Q_{vc} = \frac{vy}{2} b_i \left(1 + \frac{fb}{3v} \right) + vy b_m \left(1 - \frac{b_m}{2b_s} \right) +$$

$$+ y f b_m^2 \left(\frac{b_m}{3b_s} - \frac{1}{2} \right) \quad [24]$$

Si no se desea suprimir la zona de aguas muertas $w > 0$, basta hacer $b_n = b$ en la fórmula anterior. Para aplicar estas fórmulas deben evaluarse los coeficientes β_c con las integrales correspondientes, que se omiten aquí por su larga expresión y la variedad de condiciones de contorno que existen.

CANAL DE SECCION VARIABLE, CONTROL UNICO O DOBLE

Determinados los caudales Q_r , Q_v en la sección de control de área mínima, cualquiera

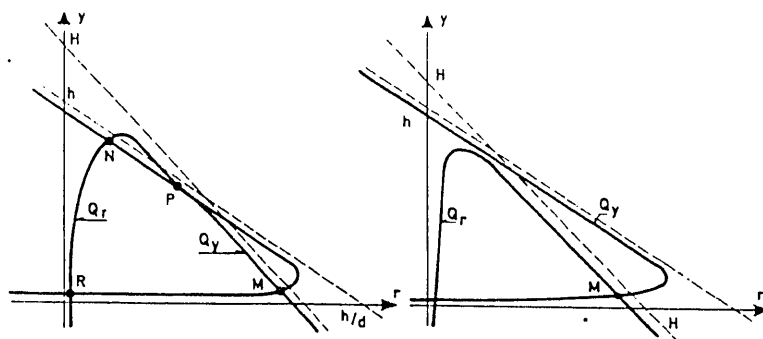


Fig. 5.—Intersección de las funciones [4, 5] de caudal con Q_r , Q , constantes. A) Caso de tres raíces válidas. B) Caso de dos raíces imaginarias. Aumentando $H - h$ se obtiene la tangencia.

que sea su forma, se pueden calcular las incógnitas y , r en otra sección particular a partir del sistema de ecuaciones [1]. Para sección rectangular, eliminando y se obtiene la expresión analítica de las diferentes líneas interfaz posibles a lo largo de todo el canal, cuando varía su profundidad z .

$$[(H - r - z) r^2 - G_r]^2 [G_r + (h - H - r \Delta d) r^2] - r^6 G_y = 0 \quad [25]$$

La ecuación [25] y el sistema de ecuaciones [1] tienen cinco raíces no válidas (Yih, 11, p. 131) fuera del intervalo [3] y sólo tienen sentido físico tres raíces (fig. 5A, puntos MNP). El punto M con y pequeño se sitúa en el lado del mar de menos densidad (fig. 6), el punto N con r pequeño en el lado del mar denso. El tercer punto, olvidado por varios autores es el P, del mismo lado del mar denso, cuando existe sobre el líquido más denso una capa superficial flotando de líquido ligero de espesor $r_d = (H - h)/\Delta d$.

La transición entre dichos puntos a lo largo del canal se consigue al pasar por una sección en la que $H(x)$ posee el valor H_1 determinado por [7] en que se unen ambas ramas de la curva de la figura 2. A partir de esta sección se produce una bifurcación y el problema físico puede ser inestable, dudando en régimen no permanente entre seguir la rama del punto N o del punto P. Para $K = -1$ el valor H_1 coincide con el valor H_0 del umbral.

Para canal de ancho constante y profundidad $h(x)$ creciente, es decir, con valor adimensional $H(x)/h(x)$ decreciente, se comprueba que a partir de cierta profundidad ya no se encuentran las raíces NP del sistema de ecuaciones [2] que pasan a ser imaginarias (fig. 5B). El fenómeno físico que ocurre si de lado del mar denso aumenta h a la vez que disminuye el ancho $2b$ es que aunque el caudal Q_r puede pasar fácilmente, no ocurre lo mismo con Q_y y se produce un efecto de represamiento (Rouse, 7, p. 69;

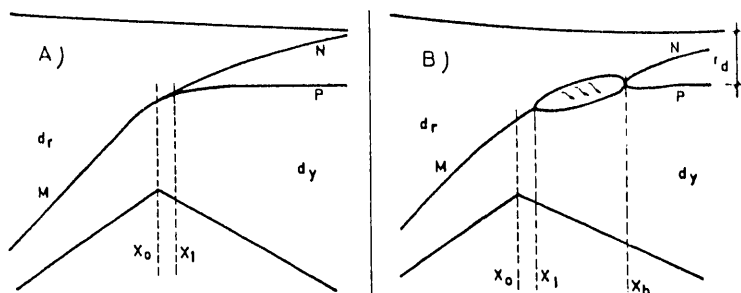


Fig. 6.—Interfaz a lo largo del canal (ecuación 25), con profundidad variable. A) Caso de una sección de control. B) Caso de doble sección de control, con zona intermedia más inestable.

Osuna, 6, p. 211), que obliga a que aumente el valor de H hasta que las curvas [4, 5] se hacen tangentes y puede pasar Q_r , aunque esa variación de H provoca a su vez una modificación de los valores Q_r , Q calculados en el umbral x_0 .

En este tipo de geometría de canal existen, por lo tanto, simultáneamente dos secciones de control, presentando necesariamente ambas un mínimo relativo del área (Osuna, 6, p. 216): la sección x_0 de mínimos absolutos del área y del calado que limita principalmente el caudal inferior Q_r , y la sección x_b de mínimo relativo del área y mínimos absolutos de la anchura y de la relación b/h , situada en el lado del mar denso, que al limitar el caudal superior Q , obliga a un aumento de desnivel $H - h = H_0 - h_0$. Las incógnitas son ahora seis: $y_0, r_0, H_0, Q_r, Y_b, r_b$. El sistema está formado ahora por seis ecuaciones: [4, 5, 8] aplicadas simultáneamente en ambas secciones x_b, x_0 .

La existencia de una segunda sección de control depende no sólo de su geometría, sino del cociente de caudales K . En ambas secciones se cumple [11]. Ya no se utiliza como condición de máximo la segunda ecuación de máximo [10] en el umbral x_0 , pues ha quedado sustituida por la primera ecuación de máximo [8] aplicada a la sección x_b de ancho mínimo, no siendo aplicable las fórmulas aproximadas [12] y [19]. El sistema de seis ecuaciones se puede resolver por iteración, disminuyendo paulatina y proporcionalmente el caudal calculado inicialmente en el umbral, considerándolo dato, y calculando por separado en cada sección con las tres ecuaciones [4, 5, 8] los valores r, y, H , hasta que coinciden en ambas secciones los valores deducidos del desnivel $H_b - h_b = H_0 - h_0$. El efecto de la rotación terrestre se tiene en cuenta en las ecuaciones anteriores a través del coeficiente β_c obligando a una nueva iteración dentro de cada etapa de cálculo.

El problema físico es muy inestable, pues está gobernado por una diferencia de densidades y de alturas $H - h$ muy pequeñas. El intervalo entre ambas secciones de control, x_0, x_b , está aislado de las condiciones de contorno de alta mar a ambos lados, por lo cual es previsible ahí una mayor inestabilidad con fluctuaciones de la interfaz y resaltos entre ambas masas M y N (fig. 6B).

EVALUACION DE LA SALINIDAD

Si un oceano con salinidad S_r invade una cuenca seca y cerrada, como ocurrió en el Mediterráneo hace seis millones de años, el nuevo mar tendrá al principio esa misma salinidad S_r . Si en dicho mar la evaporación es mayor a la aportación de lluvias y ríos, con saldo promedio E por unidad de tiempo, se establecerá una corriente de caudal E desde el océano, con un incremento paulatino de la cantidad de sal existente en el mar, hasta un valor S_v (expresado en tanto por uno), creando la diferencia de densidades [26]. Cumpliéndose la ecuación de conservación de masa [27] y llegando al régimen permanente al alcanzar la ecuación de conservación de la sal:

$$\Delta d = 0,8 (S_v - S_r) \quad [26]$$

$$Q_r + Q_v + E = 0 \quad [27]$$

$$Q_r S_r + Q_v S_v = 0 \quad [28]$$

$$- \sqrt{\frac{\alpha_v}{\alpha_r}} K = \frac{S_v}{S_r} = 1 + \Delta S > 1$$

Midiendo las salinidades medias en la proximidad del umbral para calcular K con [28], se evalúa la evaporación neta E con [12] y [27] en lugar de evaluarla a partir de numerosas medidas de velocidad *in situ* en distintos puntos y profundidades a lo largo del año, o a partir de estimaciones hidrológicas.

Si bien por causas geológicas, climáticas, o por construcciones humanas variase la sección mínima del estrecho, o bien si cambiase la evaporación E , dejaría de ser válida la igualdad [27], se iniciaría un nuevo proceso de aumento de S_v hasta que se vuelve a alcanzar otra vez el equilibrio. El problema viene definido por el sistema de ecuaciones [26, 27, 28] y las dos últimas ecuaciones de [12] o de [19], con las cinco incógnitas Q_r, Q_v, S_v, d, K , siendo datos E, S_r, h_0, A_0 . Si se supone $\alpha_r = \alpha_v$, que la sección de control es única y se desprecia la rotación, se puede resolver el sistema de ecuaciones. Para sección triangular:

$$-E = -A_0 \sqrt{gh_0 \Delta d / \alpha} 0,21137 \Delta S$$

$$\Delta S^3 = \frac{22.382 E^2}{A_0^2 h_0 g S_r 0,8}$$

$$\frac{-E}{1+K} = Q_v = \sqrt[3]{\frac{0,8 E_g S_r A_c^2 h_o}{22.382 \alpha}}$$

El desnivel H-h resulta proporcional a la raíz cúbica de $\alpha E^2 S^2/b_o^2 g$, independiente de h_o . La pendiente de la interfaz y/b_o en el umbral resulta proporcional a la raíz cúbica de $Ah^2/g ES$, α^2 .

Bryden y Stommel (2) llegan a la fórmula anterior para el rectángulo, aunque al tomar una profundidad h_o en lugar de $h_o/\sqrt{2}$, se obtiene un caudal 5,4 % menor.

APLICACION AL ESTRECHO DE GIBRALTAR

El umbral o sección de control se sitúa entre Punta Malabata y Punta Paloma. La línea de mínimo calado describe en planta una curva en S, con una profundidad de 285 m. y un área de 3,45 km.², pero para el cálculo de caudales debe considerarse una sección perpendicular a las líneas de corriente, la cual corta oblicuamente al umbral en S, y por ello alcanza calados del orden de 340 m. y un área de 3,8 km.², aproximadamente (fig. 7, 8 y 9). La salinidad del agua mediterránea en su proximidad es $S_y = 0,03825$ y la atlántica $S_r = 0,03605$ [Lacombe (5), fig. 1]; a partir de [26 y 28] se deduce una densidad relativa $d = 0,9982$ y un conciente de caudales $Q_r/Q_y = 1,061$. Se supone $\alpha_r = 1,15$, $\alpha_y = 1,20$ [Ven Te Chow (9), p. 28], $f = 8,55 \times 10^{-5}$.

Suponiendo sección triangular de $2 b_o = 22.352$ m., $h_o = 340$ m. con las fórmulas [19]

$$e = 0,6879; \quad r = 0,3122 \quad h = 160,17 \text{ m.}$$

$$Q_r = 1.904.000 \text{ m}^3/\text{sg.}; \quad Q_y = 1.794.500 \text{ m}^3/\text{sg.}$$

$$H = 1.0004891 \quad h = 340.184 \text{ m.}$$

$$w = -0,963 \text{ m/sg.}; \quad v = 1,01 \text{ m/seg.}$$

Para tener en cuenta la influencia de la rotación, aplicando las fórmulas [24], calculando por un método iterativo, con $K_c = K \sqrt{\beta_{cr}/\beta_{cy}}$ resulta aproximadamente:

$$K_c = -1.346; \quad e = 0,663; \quad b_c = 22.456 \text{ m.};$$

$$b_i = 5.853 \text{ m.};$$

$$b_s = 11.430 \text{ m.}; \quad Q_{rc} = 0,795 Q_r = 1.480.000 \text{ m}^3/\text{sg.}$$

$$Q_{yc} = 1.395.000 \text{ m}^3/\text{sg.} \quad y = 225 + B/101 \text{ m.};$$

$$r = 115 - B/101 \text{ m.}$$

$$H = 340,21 \text{ m.}; \quad v = 0,93 - fB \text{ m/sg.};$$

$$w = -0,99 - fB \text{ m/sg.}$$

En Punta Cires se encuentra una sección (fig. 9B) que es la más estrecha, a la vez que es mínima la relación b/h , y hay un mínimo relativo del área (fig. 8). Se asimila a un triángulo de ancho $2b = 14.400$ m.; altura, $h = 870$ m.; área, $A = 6,264 \text{ km}^2$.

La altura de energía es ahora $H = 840,21 \text{ m.}$
 $= h 1,000 2262$. Se suponen los mismos valores α_r , α_y que antes. Las ecuaciones a resolver [14, 15] son, con valores adimensionales de y , r , H :

$$r^2 (2y + r)^2 (H - y - r) =$$

$$\frac{1,15 \times 1480 000^2}{19,6 \times 6264 000^2 \times 870}$$

$$y^4 (h - y - rd) = \frac{1,20 \times 1395 000^2}{19,6 \times 6264 000^2 \times 870}$$

El sistema de ecuaciones no tiene raíces reales para valores $y > 0,69 h$; luego se presenta el caso de dos secciones de control simultáneas, en que se remansa el agua obligando a aumentar el desnivel H-h. Las raíces imaginarias del sistema se obtendrían no sólo en Punta Cires, sino desde la sección 5 a la 9 (fig. 7), es decir, en secciones muy anchas como Gibraltar-Ceuta, pero profundas. Debe resolverse el sistema de seis ecuaciones [14, 15, 17] simultáneamente en ambas secciones, en el umbral y en Punta Cires, teniendo en cuenta la rotación terrestre a

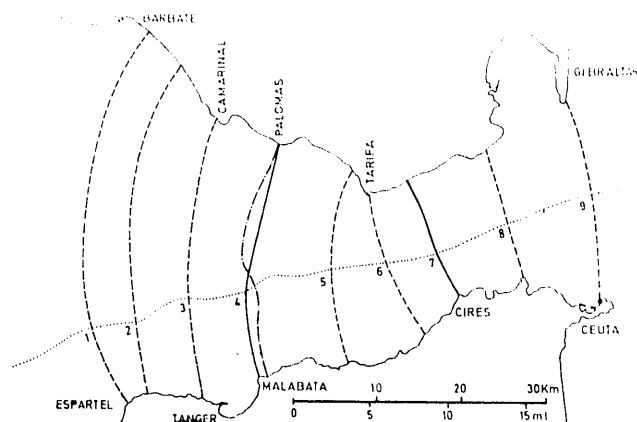


Fig. 7.—Plano del estrecho de Gibraltar. Línea de puntos: eje longitudinal x de profundidades máximas. Línea de trazos: equipotenciales aproximadas. Líneas llenas: dos secciones de control. Línea de punto y trazos: umbral de calados mínimos.

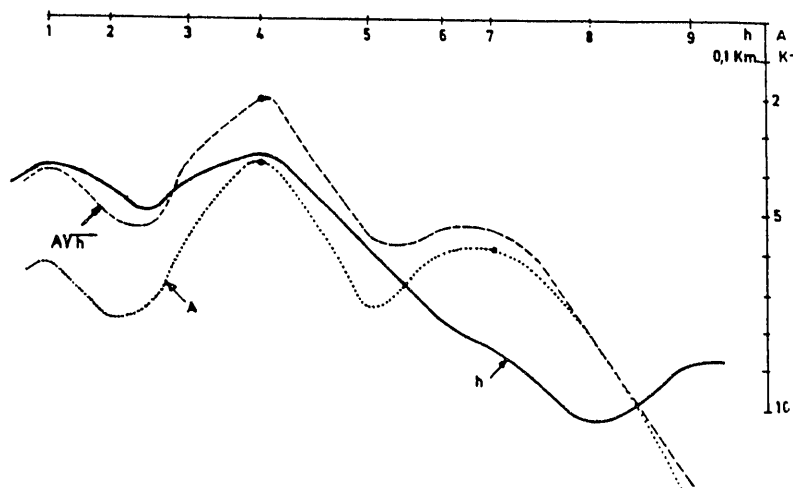
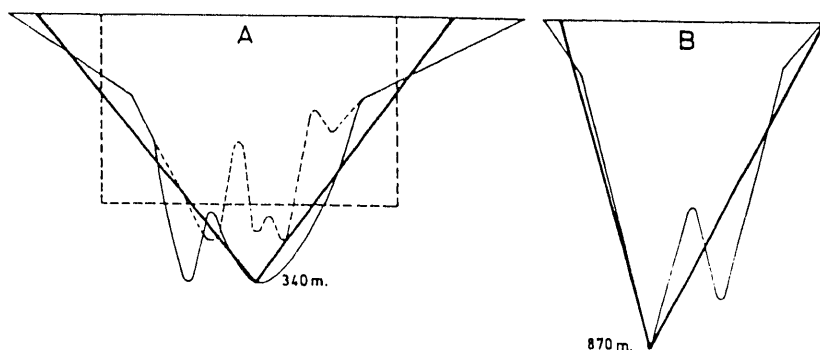


Fig. 8.—Perfil longitudinal del estrecho de Gibraltar. Línea llena: profundidad h del Canal. Línea de puntos: variación de áreas
A. Línea de trazos: variación de $A\sqrt{h}$.

Fig. 9.—Secciones de control del estrecho de Gibraltar y su aproximación con un triángulo o rectángulo. A) Umbral Punta Paloma-Punta Malabata, de puntos de perfil de calados mínimos. B) Sección estrecha de Punta Cires.



través de los coeficientes β_c , con un resultado aproximado

$$Q_c = 1.208.000 \text{ m}^3/\text{sg.}; Q_c = 1.281.600 \text{ m}^3/\text{seg.};$$

En el umbral: $r = 163 - B/128 \text{ m.}; w = -0,51 \text{ m/sg.}; v = 1,1 \text{ m/sg.}; b_c/\gamma = 126$.

En Punta Cires: $r = 88 - B/145 \text{ m.}; w = -1,18 \text{ m/sg.}; v = 0,24 \text{ m/sg.}$

Estos valores concuerdan mejor con los observados (Lacombe y Richez, 5) que los que se deducen de una sola sección de control.

Para tener en cuenta la fricción, se podría calcular la pérdida de carga aproximada, sumando los tramos entre distintas secciones calculadas, alcanzando 4 cm:

$$h_f = \sum [0,008 v^2 + 0,005 (v - w)^2] \Delta x / \gamma 8g$$

$$H_f = \sum 0,005 \Delta x (v - w)^2 / r 8g.$$

La reducción en los caudales sería proporcional a la raíz de $(H - H_f - h)/(H - h)$.

Otros autores dan caudales superiores a los aquí calculados, debido a que realizan ocho

simplificaciones cuyos errores acumulados no son despreciables, pues sólo se compensan en parte. En opinión de este autor las siete hipótesis que sobrevaloran el caudal son:

1. Suponer sección rectangular con altura total, con error del 19 %.
2. Suponer $K = -1$, es decir $E/Q \rightarrow 0$, con error del 3 %.
3. Despreciar la fricción, con error del orden del 3 al 5 %.
4. Olvidar el coeficiente de energía α , con error del 5 % al 10 %. En este coeficiente puede incluirse parte de la influencia de la capa de transición o de mezcla de aguas, con densidades intermedias.
5. Despreciar el efecto de la rotación, que supera el 15 % en el umbral, o evaluarlo con un ancho del rectángulo inferior al real.
6. No considerar la segunda sección de control simultánea, con error del orden del 14 %.
7. Tomar una diferencia de densidades entre puntos alejados del umbral, en lugar de la

diferencia entre dos puntos de la misma vertical entre las secciones de control.

Por otro lado, suponen un área y un calado del umbral parecidos a los del perfil de calados mínimos (fig. 8, línea de puntos), en lugar de los valores superiores que en la realidad actúan, con lo que se infravalora el caudal del orden de un 20 %.

La carrera de marea atlántica es muy superior al valor $H - h = 24$ cm. estimado, pero como la marea no transporta agua en su ciclo completo, los valores calculados en régimen permanente son válidos para una escala mayor de tiempos. En el intervalo de horas el fenómeno que predomina es el de las mareas, pues H sigue un complejo ciclo senoidal de período semidiario. La evaporación E sigue un ciclo anual de amplitud máxima del orden de $73.000 \text{ m}^3/\text{sg.}$, haciendo variar de primavera a otoño el cociente Q_1/Q_2 de 1,0 a 1,12, además del ciclo hiperanual de las manchas solares.

BIBLIOGRAFIA

1. ANATI, D. A.: «A parametrization of the geometry of sea Straits», *Oceanológica Acta*, 3 (4): 395-397, 1980.
2. BRYDEN, H. L., y STOMMEL, H. M.: «Limiting processes that determine basic features of the circulation in the Mediterranean sea», *Oceanol. Acta*. Enviado 1984.
3. CAÑIZO, L.: «Corrientes entre mares contiguos», estudio monográfico, SECEG, marzo, 1984.
4. GOMEZ GALLEGU, J.; GARCIA MORON, J., y PARRILLA, G.: «Estado actual de los estudios de corrientes en el estrecho de Gibraltar. Estudio monográfico sobre corrientes y mareas», Madrid, Sociedad Española de estudios para la comunicación fija del estrecho de Gibraltar, SECEG, 1981.

5. LACOMBE, H., y RICHEL, C.: «The regime of the strait of Gibraltar», «Hydrodynamics of semi enclosed seas», J.C.J. Nihoul Ed. p. 13-74, Amsterdam, Reprinted Coloquio de Madrid 1982, SECEG, 1982.
6. OSUNA, A.: «Hidráulica. Mecánica de fluidos e hidráulica técnica», Madrid, Publi Esc. TS. Ing. Caminos.
7. ROUSE, H.: «Engineering hydraulics», John Wiley, 1949.
8. SECO, E.: «Aplicación de la ecuación de Margules al estrecho de Gibraltar», *Bol. Inst. Esp. Oceanografía*, 132, Madrid, octubre, 1967.
9. VEN TE CHOW: «Open channel hydraulics», McGraw Hill, caps. 2, 3, 18, 1968.
10. WHITEHEAD, J. A.; LEETMAA, A., y KNOX, R. A.: «Rotating hydraulics of strait and sill flows», *Geophys Fluid Dyn.*, 6, 101-125, 1974.
11. YIH, C. S.: «Dynamics of nonhomogeneous fluids», Mac Millan, NY, 1965.

Luis del Cañizo Perate.



Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (1965), doctor (1971), profesor adjunto de Geotecnia y Cimientos (1980), Premio Nacional Fin de Carrera. Especializado en Mecánica de Suelos, ha trabajado en Entrecanales y Távora, S. A., en Kronsa como director técnico, y actualmente en COTAS Internacional. Fue director general de Infraestructura del Transporte y vicepresidente de SECEGSA. Ha publicado diversos artículos técnicos relativos a mecánica de suelos y cimentaciones. Ha realizado una interpretación de diferentes fenómenos de las corrientes del estrecho de Gibraltar en régimen variable.