

# Revisión de métodos de análisis espectral. Aplicación al estudio y simulación de un registro sísmico(\*)

Por JUAN JOSE EGOZCUE  
y JUAN MIQUEL CANET

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos,  
Canales y Puertos de Barcelona

*La introducción progresiva en la última década de métodos de análisis espectral basados en modelos autorregresivos y de medias móviles ha demostrado su efectividad en diversos campos. No obstante es escasa la utilización de dichos métodos en ingeniería civil; por ello, parece conveniente una revisión comparativa de éstos con los métodos convencionales ampliamente utilizados.*

*Se hace especial énfasis en las bases del análisis espectral de máxima entropía, basado en un modelo autorregresivo.*

*También se exponen algunos rudimentos del tratamiento general de señales.*

*Finalmente se presenta el análisis de un registro de aceleraciones procedentes del sismo de Fiuli de 1976.*

## 1. INTRODUCCION

En las aplicaciones de la ingeniería aparecen frecuentemente ciertos tipos de acciones extraordinariamente variable con el tiempo, que al inducir respuestas esencialmente dinámicas, obligan a un estudio en profundidad de las mismas. Por otra parte, su naturaleza típicamente aleatoria hace que su tratamiento estadístico sea indispensable. Ejemplos de tales señales se encuentran en los oleajes marinos, presiones inducidas por el viento, sismos, etcétera.

En el campo concreto de la ingeniería sísmica Housner (1955), Rosenblueth et al. (1962), Bycroft (1960) y Thomson (1959) consideran ya en sus primeros estudios la posibilidad de modelar los terremotos como ruidos blancos de banda limitada. Kanai (1957) y Tajimi (1960) ofrecen una modelización más ajustada que ha sido ampliamente usada.

Para ello, las transformadas de Fourier (especialmente el algoritmo FFT) han sido corrientemente utilizadas en los llamados procedimientos convencionales para la obtención de las densidades espectrales de potencia (Blackman-Tukey, 1958, ...).

En la última década, ha sido necesario en diversos campos incrementar el nivel de resolución de las estimas espectrales. Para ello, se han diseñado una serie de algoritmos relacionados con los modelos estocásticos autorregresivos y de medias móviles, dando como resultado métodos de análisis que, además de ser comparables en su sencillez a los anteriores, permiten tener ventajas adicionales; un ejemplo de éstas se refiere a la facilidad de simulación del proceso modelado.

Se pretende en este artículo realizar una síntesis comparativa de los algoritmos más significativos y de los que, por otra parte, existe ya una experiencia contrastada en las aplicaciones. En particular se expone un resumen de los algoritmos convencionales basados en la transforma-

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de agosto de 1984.

da discreta de Fourier, junto con una breve descripción del algoritmo de máxima entropía de estimación espectral, referido al análisis de procesos autorregresivos. Por último, se aplican dichos algoritmos a la estima de las densidades espectrales de un caso concreto: la componente N.S. del sismo de Friuli ocurrido el 15 de septiembre de 1976.

## 2. ANALISIS DE FRECUENCIAS. ANALISIS DE PROCESOS ESTOCASTICOS.

Se presentan a continuación los elementos básicos del análisis convencional de frecuencias según el método del periodograma. Todo el planteamiento se fundamenta en el concepto de transformación de Fourier, del cual se parte para hacer una rápida aproximación a las técnicas de estimación.

### 2.1. Transformadas de Fourier

Dada una función  $f(t)$  de cuadrado integrable, es decir, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

es convergente, se define su transformada de Fourier como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad [1]$$

y se restituye la función original  $f(t)$  mediante la transformación inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad [2]$$

La teoría de las transformadas de Fourier de funciones de cuadrado integrable puede consultarse en Goldberg (1970), y sus aplicaciones en Papoulis (1962).

Entre las propiedades más importantes de la transformación de Fourier, destaca el comportamiento de la convolución de dos funciones, cuya transformada es el producto de las respectivas transformadas: si definimos la convolución de las funciones  $f$  y  $g$  como

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad [3]$$

entonces

$$H(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega) \quad [4]$$

donde las letras mayúsculas indican las transformadas de Fourier de las respectivas funciones en minúscula.

Por otra parte, en las aplicaciones las señales suelen presentarse muestreadas a intervalos de tiempos constante,  $T$ , para hacerlas manejables en un ordenador. En tal caso se obtiene una sucesión numérica producida por el muestreo de  $f(t)$ :

$$..., f_0 = f(0), f_1 = f(T), ..., f_n = f(nT), ...$$

Conviene en ese caso utilizar el concepto de transformada discreta de Fourier  $\tilde{F}(\omega)$ , definida de la siguiente forma:

$$\tilde{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega nT}, \quad \omega \in [-\omega_c, \omega_c], \quad \omega_c = \pi/T \quad [5]$$

y su transformación inversa

$$f_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega nT} d\omega \quad [6]$$

Las condiciones de existencia de tales transformaciones se establecen en el marco de la teoría de funciones analíticas (ver, por ejemplo, Markushevich, 1978).

Aunque se especifica que  $\tilde{F}$  está definida en  $[-\omega_c, \omega_c]$ , la fórmula [5] define una función periódica de período  $2\pi/T$ , hecho que será utilizado frecuentemente para el cálculo, que se realiza en el intervalo  $[0, 2\omega_c]$ .

La propiedad de la convolución es análoga a la de la transformación de Fourier (ver, por ejemplo, Tretter, 1976). Si utilizamos nuevamente las mayúsculas con tilde para designar las transformadas discretas de Fourier, tenemos que la convolución  $\{h_n\}$  de las sucesiones  $\{f_n\}$ ,  $\{g_n\}$

$$h_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j g_{n-j} \quad [7]$$

tiene como transformada

$$\tilde{H}(\omega) = \tilde{F}(\omega) \tilde{G}(\omega) \quad [8]$$

También la llamada convolución circular de las transformadas goza de la siguiente propiedad:

si definimos

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \tilde{F}(\omega_1) \tilde{G}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad [9]$$

entonces

$$h_n = f_n g_n \quad [10]$$

En [9] se han considerado  $\tilde{F}(\omega)$  y  $\tilde{G}(\omega)$  periódicas, de período  $2\omega_c$ .

No obstante, la transformada discreta de Fourier [5] es impracticable generalmente, ya que sólo se conocerán un número  $N$ , limitado, de puntos de sucesión  $\{f_n\}$ .

Supongamos que conocemos los puntos  $f_0, \dots, f_{N-1}$ , y construimos una nueva sucesión  $\{x_n\}$  dada por

$$x_n = v_n f_n$$

donde  $\{v_n\}$ , conocida con el nombre de ventana temporal, cumple

$$v_n = 0 \quad \text{si } n < 0 \quad \text{ó} \quad n \gg N \quad [11]$$

Si  $v_n = 1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  se dice que  $\{v_n\}$  es una ventana rectangular.

Definimos transformada limitada de Fourier de  $\{f_n\}$  a la transformada discreta  $\{x_n\}$  cuando  $\{v_n\}$  es la ventana rectangular y se muestrea a intervalos fijos de frecuencia  $\Omega = 2\pi/NT$ .

Se obtiene, entonces, el par de transformadas limitadas:

$$F_N(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\Omega T n k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad [12]$$

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_N(n\Omega) e^{i\Omega T n k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Debe observarse que  $F_N(k\Omega) = F_N[(k + Nj)\Omega]$  con  $j$  un entero cualquiera.

Por ello, cuando  $k\Omega$  supera  $\omega_c$ , es decir,  $k$  es mayor que  $N/2$ , los valores de  $F_N$  corresponden a las frecuencias negativas dadas por  $(k - N)\Omega$ . En lo que sigue, adoptamos la notación de [12] sin mencionar este hecho.

La transformación limitada [12] tiene la propiedad de convolución:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k g_{n-k} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_N(j\Omega) G_N(j\Omega) e^{i\Omega T j n} \quad [13]$$

es decir, la transformada limitada de la convolución de dos sucesiones (limitadas), es el producto de las respectivas transformadas limitadas.

Es muy importante observar que el cálculo de la transformada limitada de  $\{f_n\}$  equivale a la transformada discreta del producto de  $\{f_n\}$  por la ventana  $\{v_n\}$ , por lo que las propiedades [9] y [10] nos indican que la transformada limitada es la convolución circular de la transformada discreta de  $\{f_n\}$  con la de la ventana, circunstancia que es aprovechada en el cálculo para mejorar la precisión de las estimas.

## 2.2. Relación entre la transformada de Fourier y la transformada discreta de Fourier. Solapamiento

Puede demostrarse fácilmente (Papoulis, 1978) que la relación entre  $F(\omega)$  y  $\tilde{F}(\omega)$  es

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - 2k\omega_c) \quad \omega_c = \pi/T \quad [14]$$

por lo que, a menos que  $F(\omega)$  sea nula para  $|\omega| > \omega_c$ , se producirá solapamiento espectral (figura 1).

Las funciones  $f(t)$  que tienen la propiedad de que  $F(\omega) = 0$  si  $|\omega| > \omega_c$  se llaman funciones limitadas en banda de frecuencias, y pueden ser muestreadas con intervalo  $T = \pi/\omega_c$  sin pérdida de información (Shannon, 1948).

Cuando se trata de analizar señales que han sido obtenidas mediante algún sistema de registro, es corriente hacer la hipótesis de que frecuencias superiores a una cierta  $\omega_c$  no han sido

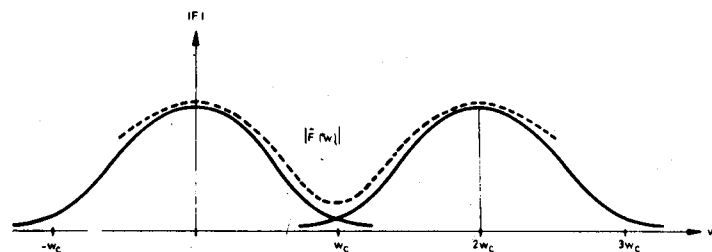


Fig. 1.—La transformada discreta de Fourier, se obtiene por traslación y suma de la transformada de Fourier según (14). Si  $\tilde{F}(\omega)$  no es nula fuera del intervalo  $(-\omega_c, \omega_c)$  se produce solapamiento espectral por suma de las transformadas desplazadas.

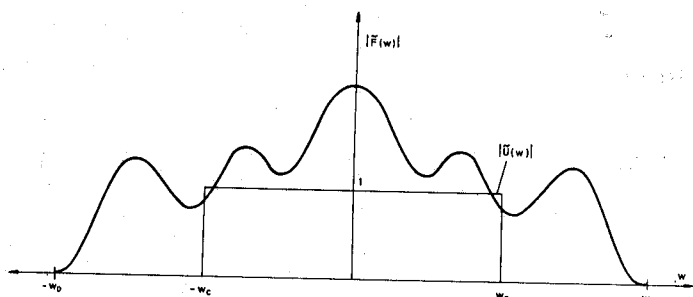


Fig. 2.—La operación de filtrado para prevenir el solapamiento espectral en la reducción de puntos de muestra debiera representarse por la multiplicación de  $\tilde{F}(w)$  por la función  $\tilde{U}(w)$ .

registradas. En tal caso el intervalo de muestreo adecuado de tal señal sería  $T_0 = \pi/\omega_0$ .

Sin embargo,  $T_0$  podría ser demasiado pequeño, y el número de muestras demasiado elevado para un procesamiento económico de dichos datos. Es corriente, entonces, proceder a reducir el número de puntos de la señal, a costa de reducir también la banda de frecuencia bajo análisis. Supongamos, por ejemplo, que sólo queremos observar la banda  $[-\omega_c, \omega_c]$  de forma que  $\omega_c = \omega_0/2$ , lo que nos permitirá tomar  $T = 2T_0$  y reducir el número de datos a la mitad. Si esta maniobra se realiza sin más precaución, los valores no nulos de  $F(w)$  entre  $\omega_c$  y  $\omega_0$  quedarían solapados sobre la banda a estudiar  $[-\omega_c, \omega_c]$ . Deberemos, pues, proceder a eliminar las frecuencias superiores a  $\omega_c$  antes de reducir el número de puntos de la señal.

Teóricamente esta maniobra, conocida con el nombre de filtrado de la señal, consiste en multiplicar la transformada discreta de la señal por una función  $\tilde{U}(w)$  cuyo valor sea (fig. 2)

$$\begin{aligned} \tilde{U}(w) &= 1 & \text{Si } w \in [-\omega_c, \omega_c] \\ \tilde{U}(w) &= 0 & \text{Si } w \in [\omega_c, \omega_0] \end{aligned} \quad [15]$$

Puesto que el producto de las transformadas discretas equivale a una convolución temporal [7] [8], para efectuar esta operación bastaría realizar la convolución de los datos con la antitransformada de  $\tilde{U}(w)$  (fig. 3).

$$u_n = \frac{T_0}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \tilde{U}(w) e^{i\omega n T} dw = \frac{\text{sen}(\omega_c n T_0)}{\pi n} \quad [16]$$

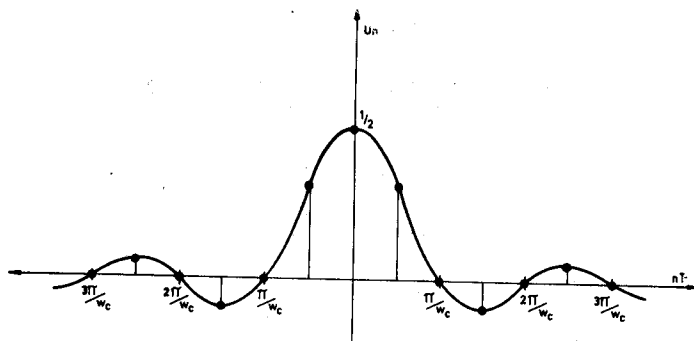


Fig. 3.—Antitransformada de la función  $\tilde{U}(w)$ .

y la señal filtrada sería

$$g_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{\text{sen}[\omega_c (n-k) T_0]}{\pi (n-k)} \quad [17]$$

La operación [17] no es finita y las fluctuaciones de  $u_n$  para  $n$  grande no son despreciables. Por ello es, en la práctica, irrealizable.

Por esta razón se suele acudir a filtros más cómodos que exijan un número limitado de operaciones, aunque su transformada  $\tilde{U}(w)$  no sea rectangular. Por ejemplo, puede usarse

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2} & u_{-1} &= u_1 = \frac{1}{4} \\ u_n &= 0 & n &\neq -1, 0, 1 \end{aligned}$$

cuya transformada discreta es (fig. 4)

$$\tilde{U}(w) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega T_0)] \quad [18]$$

Ahora el filtrado de la señal queda reducido a

$$g_n = \frac{1}{4} [f_{n-1} + 2f_n + f_{n+1}]$$

que es una operación extremadamente sencilla, aunque, por supuesto,  $\tilde{U}(w)$  se aleja bastante de nuestro objetivo inicial dado por [15].

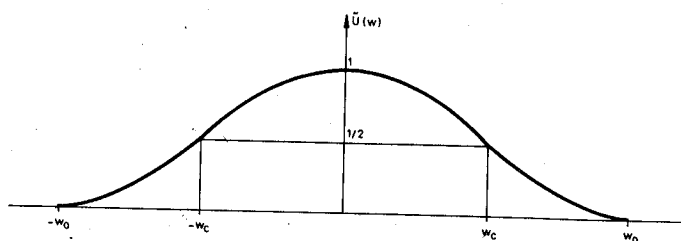


Fig. 4.—Transformada discreta de Fourier del filtro de pesos 1/4, 1/2, 1/4.

Pueden diseñarse filtros que aproximen mejor la función rectangular [15] manteniendo finito el número de operaciones, pero no serán tratados aquí (ver Tretter, 1976).

Después de el filtrado, en la sucesión obtenida  $\{g_n\}$ , pueden suprimirse la mitad de los puntos (pares o impares) sin producir efectos notables de solapamiento. Cuanto mejor aproxime  $\tilde{U}(\omega)$  a la función rectangular [15], mayor será la prevención contra el solapamiento debido a la supresión de la mitad de puntos.

### 2.3. Densidad espectral

En muchas aplicaciones, y en concreto en ingeniería sísmica, es corriente suponer que la señal dato forma parte de una realización de un proceso estocástico estacionario. En este caso, el objetivo es realizar el análisis de frecuencias de tal proceso mediante la densidad espectral o bien mediante el espectro de potencia.

Definimos a continuación los conceptos más importantes y describiremos brevemente las técnicas convencionales de estimación espectral.

En lo que sigue no distinguiremos la notación del proceso estocástico de las de las realizaciones del mismo. Supondremos además que nuestros datos  $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$  están muestreados con intervalo  $T$ , y proceden de una realización del proceso  $f(t)$ , que supondremos de media nula:  $E[f(t)] = 0$ . El operador  $E$  representa el valor esperado de una variable aleatoria.

El análisis de frecuencias de procesos estacionarios no puede hacerse directamente a partir de sus realizaciones, pues estas funciones no tienden a cero para tiempos grandes y, como consecuencia, no existen integrales o series de tipo [1] o [5]. Esta dificultad se solventa (Wiener, 1958) definiendo la función de autocorrelación,

$$R(t) = E[f(t + \tau) f(\tau)] \quad [19]$$

donde  $R$  no depende de  $\tau$  por la supuesta estacionariedad del proceso. La autocorrelación tiene la propiedad de conservar las frecuencias del proceso, y, por ello, se procede al análisis de Fourier de  $R(t)$ , de más fácil manejo matemático que las realizaciones del proceso.

Por este motivo se define densidad espectral como la transformada de Fourier de la autocorrelación:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-i\omega t} dt \quad [20]$$

en el caso continuo, y

$$\tilde{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(kT) e^{-i\omega kT} \quad [21]$$

en el caso discreto, más frecuente en las aplicaciones. A veces se utiliza el llamado espectro de potencia  $T\tilde{S}(\omega)$  proporcional a [21], y cuya integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} T\tilde{S}(\omega) d\omega = R(0) \quad [22]$$

es la varianza  $R(0)$ . La propiedad [22] se deriva inmediatamente de [6].

### 3. ESTIMACION ESPECTRAL

En las secciones anteriores se han definido los conceptos básicos del análisis de frecuencias; es necesario ahora plantear los problemas del cálculo efectivo de la función de autocorrelación y la densidad espectral a partir de una realización limitada y discretizada del proceso estocástico real de media nula  $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ .

Revisaremos algunos de los métodos más usuales y que obedecen a concepciones sustancialmente diferentes.

#### 3.1. La estimación convencional

Los métodos convencionales fueron introducidos por Blackman y Tukey (1958) y han sido masivamente utilizados gracias a las ventajas de computación que ofrece la transformación rápida de Fourier (FFT, Cooley-Tukey, 1965).

En esencia, consisten en estimar la función de autocorrelación, prolongarla con valores nulos y finalmente obtener la estima del espectro de potencia por simple transformación discreta de Fourier. No obstante la aparente sencillez del método, aparecen una serie de cuestiones que convierten el método convencional en una técnica delicada.

Antes de definir el estimador de la autocorre-

lación imaginemos que la realización ilimitada del proceso ...  $f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_{N-1}, f_N, \dots$ , ha sido multiplicada por una ventana temporal  $\{v_n\}$  [11], que pudiera ser rectangular o no. Es obvio que si es la ventana rectangular y  $x_n = f_n v_n$ , la sucesión  $\{x_n\}$  no es más que la  $\{f_n\}$  completada con ceros fuera de los datos conocidos. Por motivos que se expondrán más adelante no se suele tomar la ventana rectangular.

Como estimador de la autocorrelación del proceso suele tomarse

$$R_N(nT) = R_N(-nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k+n} x_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-n} x_{k+n} x_k \quad [23]$$

expresión directamente basada en la extrapolación nula que se ha realizado de los datos.

Una de las propiedades más destacables de este estimador es que es sesgado, es decir:

$$E[R_N(nT)] = R(nT) q(nT) \quad [24]$$

donde  $q$  representa el efecto de la ventana

$$q(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-n} v_{k+n} v_k \quad [25]$$

Cuando la ventana es rectangular,  $q(nT) = (N - |n|)/N$ , que es diferente de la unidad si  $n \neq 0$ , y [24] no coincide con  $R(nT)$  salvo para  $n = 0$ ; no obstante el estimador [23] para ventana rectangular es asintóticamente centrado, pues tomando límite en [24] con  $N \rightarrow \infty$  el valor esperado tiende a  $R(nT)$ . Puede, además, demostrarse que cuando  $N$  tiende a infinito la varianza del estimador tiende a cero; es, por tanto, un estimador consistente. El desarrollo de estas propiedades puede hallarse en Tretter, 1976.

Si ahora se realiza la transformada discreta de Fourier de la función de autocorrelación estimada  $R_N(nT)$  obtendremos un estimador de la densidad espectral llamado periodograma y que denotaremos  $S_N(\omega)$ . Un pequeño cálculo permite obtener su expresión. En primer lugar podemos poner:

$$R_N(nT) = R_N(-nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{n-k} x_k, \quad y_n = x_n \quad [26]$$

cuya transformada discreta de Fourier puede expresarse a partir [7] [8] como:

$$S_N(k\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(nT) e^{-i\Omega T k n} = \frac{1}{N} \tilde{Y}(k\Omega) \tilde{X}(k\Omega) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\Omega T k n} \right] \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j e^{-i\Omega T j n} \right] = \left| \frac{1}{N} F_N(k\Omega) \right|^2 \quad [27]$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$

donde  $\tilde{Y}, \tilde{X}$  representan las transformadas discretas de  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  y  $F_N$  la transformada limitada de  $\{f_n\}$  a través de la ventana  $\{v_n\}$ .

Si representamos por  $\tilde{Q}(\omega)$  la transformada discreta de  $\{q(nT)\}$ , fácilmente se llega (Tretter, 1976) a que

$$E[S_N(\omega)] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \tilde{Q}(\lambda) \tilde{S}(\omega - \lambda) d\lambda \quad [28]$$

Es decir, el valor esperado del periodograma, es igual al verdadero valor de la densidad espectral, convolucionada circularmente con la función  $\tilde{Q}(\omega)$ , que depende sólo de la ventana temporal.

Si la ventana fuera rectangular se tiene

$$q(nT) = \begin{cases} 1 = \frac{|nT|}{NT} & \text{Si } |nT| \leq (N-1)T \\ 0 & \text{Si } |nT| > (N-1)T \end{cases}$$

$$\tilde{Q}(\omega) = \frac{1}{N} \left[ \frac{\text{sen}(\omega NT/2)}{\text{sen}(\omega T/2)} \right]^2 \quad [29]$$

funciones representadas en las figuras 5 y 6.

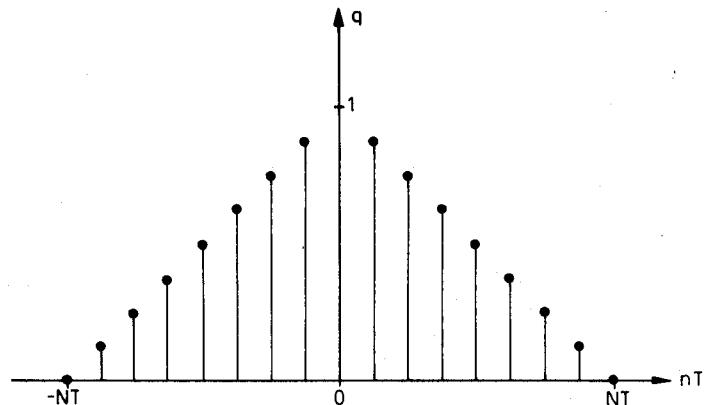


Fig. 5.—Valor de  $q(nT)$  para la ventana rectangular.

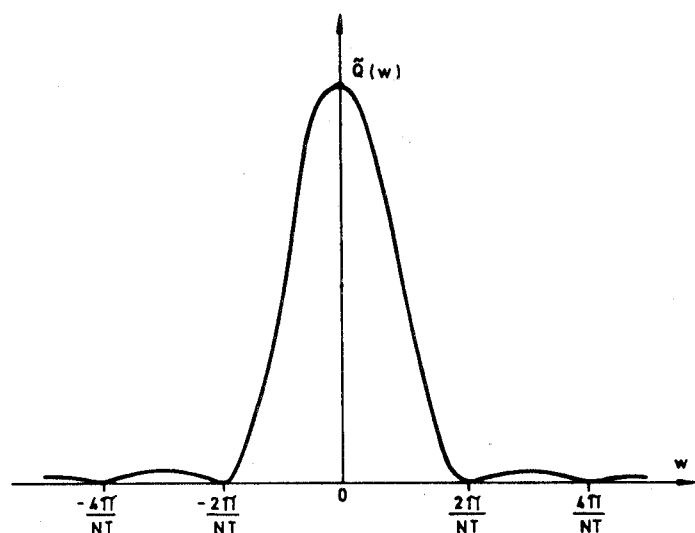


Fig. 6.—Ventana espectral correspondiente a la ventana temporal rectangular.

Las características deseables de una ventana temporal son que:

- El lóbulo central de  $\tilde{Q}$  sea estrecho, lo cual, en general, sólo se obtiene aumentando el número de muestras.
- Los lóbulos laterales de  $\tilde{Q}$  se amortiguan rápidamente.

Ateniéndose a ellas se han diseñado ventanas que mejoran considerablemente la rectangular. Entre ellas cabe citar las de Hann, Hamming, Bingham, Blackman, Kaiser, Bartlett, etc., que pueden verse referenciadas en Blackman-Tuckey (1958) y Tretter (1976).

Los valores  $S_N(k\Omega)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , son suficientes para calcular la varianza total de la señal. En efecto, la varianza es, por definición,  $R(0)$  y es estimada por  $R_N(0)$ . Utilizando el hecho de que  $S_N(k\Omega)$  y  $R_N(jT)$  pueden considerarse como un par de transformadas limitadas, la ecuación [12] nos lleva a que:

$$R_N(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k\Omega) \quad [31]$$

Esta relación no debe confundirse con la análoga [22] cuando se utiliza una expresión continua del estimador de la densidad espectral

$$R_N(0) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_N(\omega) d\omega$$

que proviene de considerar que  $R_N(\omega)$  y  $S_N(\omega)$  son también pares de transformadas discretas [5] [6].

Al estudiar la varianza del periodograma [27] como estimador de la densidad espectral se obtiene (Tretter, 1976) que ésta es proporcional al cuadrado del valor de la densidad espectral, lo cual hace del periodograma un mal estimador (no es consistente). No obstante, existen procedimientos que permiten reducir la varianza de la estima, siempre a costa de reducir considerablemente la resolución, es decir, la capacidad de separar máximos espectrales próximos. De tales métodos, los más utilizados consisten en:

- Suavizar el periodograma.
- Dividir la señal en varios segmentos, para los que se obtiene el periodograma, realizando el promedio de ellos posteriormente (Welch, 1967).

Ambos procedimientos dan resultados similares; el primero resulta cómodo en su programación y es conveniente en señales poco estacionarias, mientras el segundo puede economizar tiempo de ordenador en señales largas y estacionarias.

El segundo procedimiento no lo trataremos y nos remitimos al artículo citado de Welch (1967).

El suavizado del periodograma suele realizarse a partir de [27], definiendo:

$$\hat{S}(k\Omega) = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^L S_N[(k+j)\Omega] \quad [32]$$

$k = 0, 1, \dots, N = 1$

donde se considera a  $S_N(\omega)$  como función periódica de período  $2\omega_c = 2\pi/T$ .

Con este promedio se obtiene una reducción en la varianza del nuevo estimador de la densidad espectral  $\hat{S}_N$ , inversamente proporcional al número de puntos  $2L+1$  de promediado. Al mismo tiempo se efectúa una paralela pérdida de resolución: si el valor esperado del periodograma era el dado por [28], el nuevo estimador tiene el valor esperado de la misma forma sustituyendo la ventana espectral  $\tilde{Q}(\omega)$  por (fig. 7)

$$\hat{Q}(\omega) = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^L \tilde{Q}(\omega + j\Omega) \quad \Omega = \frac{2\pi}{TN}$$

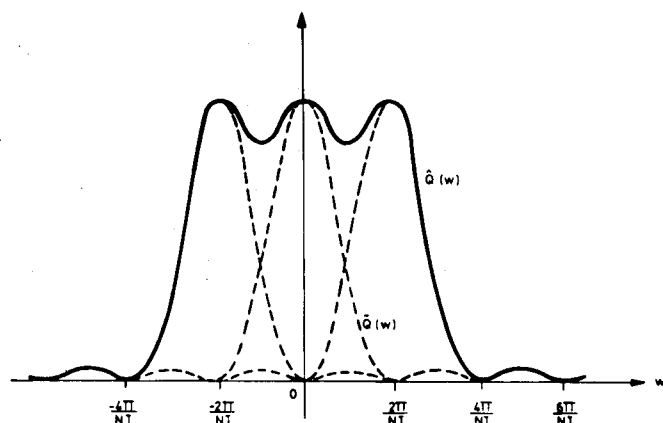


Fig. 7.—Ventana espectral efectiva después de realizar un suavizado del periodograma con  $L = 1$ .

El aumento en la anchura del lóbulo central de la ventana espectral redonda evidentemente en la correspondiente pérdida de resolución. Así, no pueden darse reglas para la determinación de  $L$ , cuyo valor debe fijarse a partir de los objetivos propuestos en el análisis: resolución contra fiabilidad.

Los métodos convencionales de análisis espectral descritos en la sección 3.1 pueden resumirse en las etapas siguientes:

- Definición de la máxima frecuencia de interés  $\omega_1$ .
- Filtrar los datos para eliminar frecuencias superiores a  $\omega_1$ .
- Reducir el número de muestras de forma que el intervalo de muestreo  $T$  sea inferior, pero cercano a  $\pi/\omega_1$ .
- Elegir una ventana temporal por la que multiplicar los datos. Ver, por ejemplo, el ejemplo desarrollado en 5.
- Cálculo del periodograma  $S_N(k\Omega)$  mediante una rutina FFT.
- Promediar  $2L + 1$  muestras del periodograma para suavizarlo.
- Determinar la ventana espectral  $\hat{Q}(\omega)$  que ha sido empleada para controlar la resolución del análisis.

### 3.2. Estimación espectral de procesos autorregresivos, de medias móviles y mixtos

En la última década se ha generalizado el uso de estimas espectrales que parten de bases dife-

rentes a las convencionales, especialmente en el tratamiento de la extrapolación de la señal limitada de la que se parte como dato. Entre los modelos más corrientes utilizados están los autorregresivos (AR) y mixtos de medias móviles y autorregresivos (ARMA).

Utilizando la misma notación que en 2.3 un modelo autorregresivo de orden  $m$ , (AR( $m$ )), tiene expresión:

$$\sum_{k=0}^m g_{mk} f[(j-k)T] = \varepsilon(jT) \quad , \quad g_{m0} = 1 \quad , \quad j = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad [34]$$

donde  $f(kT)$  indica la variable aleatoria obtenida por muestreo del proceso  $f(t)$ , y  $\varepsilon(jT)$  es una sucesión de variables aleatorias normales de media nula y varianza  $\sigma_\varepsilon^2$ , que son mutuamente ortogonales (ruido blanco):

$$E[|\varepsilon(jT)|^2] = \sigma_\varepsilon^2 \quad j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad [35]$$

$$E[\varepsilon(jT) \varepsilon(kT)] = 0 \quad j \neq k$$

Los coeficientes  $g_{mk}$  del modelo AR( $m$ ) determinan junto con  $\sigma_\varepsilon^2$  la densidad espectral del proceso  $f(t)$  (Ash-Gardner, 1975)

$$\tilde{S}_m(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\left| \sum_{k=0}^m g_{mk} e^{-i\omega k T} \right|^2} \quad [36]$$

De esta forma los coeficientes  $g_{mk}$  junto con  $\sigma_\varepsilon^2$  determinan totalmente el proceso estocástico. No obstante, los coeficiente del modelo deben cumplir la condición de que el polinomio

$$G(Z) = \sum_{n=0}^m g_{mn} Z^n$$

tenga todas sus raíces exteriores al círculo unidad para garantizar la estacionalidad del modelo [34] (Ash-Gardner, 1975; Box Jenkins, 1970).

De forma parecida un modelo ARMA ( $m, n$ ) tiene expresión

$$\sum_{k=0}^m b_{mk} f[(j-k)T] = \sum_{l=0}^n a_{nl} \varepsilon[(j-l)T] \quad [37]$$

$$a_{n0} = 1 \quad , \quad b_{m0} = 1$$

donde los coeficientes de la parte autorregresiva  $b_{m0}, \dots, b_{mm}$  deben ser tales que el polinomio

$$B(z) = \sum_{k=0}^m b_{mk} z^k$$

tenga sus raíces exteriores al círculo unidad.

Ahora la densidad espectral del proceso ARMA (m,n) es (Ash-Gardner, 1975):

$$\tilde{S}_{m,n}(\omega) = \frac{\sigma_e^2 \left| \sum_{l=0}^n a_{nl} e^{-i\omega l T} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^m b_{mk} e^{-i\omega k T} \right|^2} \quad [39]$$

De la definición del modelo AR(m) y ARMA (m,n) se deduce que el problema de estimación espectral se reduce a estimar  $\sigma_e^2$  y los coeficientes  $g_{mk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  en un AR(m), y  $a_{nl}$ ,  $l = 1, \dots, n$ ,  $b_{mk}$ ,  $k = 1, \dots, m$  en los ARMA (m,n).

Existen diversos métodos de estimación de modelos AR y ARMA, de los cuales prestaremos especial atención al método de Burg (MB) y al de cuadrados mínimos (MCM) en la estimación de los coeficientes de modelos AR.

El problema de estimación en el MB se basa en las ecuaciones de Yule-Walker o ecuaciones normales, que se obtienen multiplicando [34] por  $\varepsilon(IT)$  y tomando valores esperados, llegándose al sistema de ecuaciones

$$R_m \bar{G}_m = \sigma_{em}^2 \bar{I}_m \quad [40]$$

$$\bar{G}_m = (1, g_{m1}, \dots, g_{mm})^t$$

$$\bar{I}_m = (1, 0, \dots, 0)^t$$

$R_m$  es la matriz de Toeplitz de autovarianzas cuyo elemento  $j, k$  es  $R[(j-k)T]$ . El segundo subíndice de  $\sigma_{em}^2$  sólo se refiere al orden del AR.

Supongamos que hemos fijado  $m < N$ ; para resolver las ecuaciones [40] es necesario estimar los  $m+1$  valores de  $R(jT)$  que intervienen. El BM proporciona un método iterativo para realizar tal estima y hallar  $\bar{G}_m$ ,  $\sigma_{em}^2$ , basado en la recurrencia de Levinson (1947):

$$g_{mk} = g_{m-1, k} + g_{mm} g_{m-1, m-k} \quad [41]$$

Esta recurrencia permite hallar la solución de las ecuaciones normales [40] de orden  $m$  conociendo la solución de orden  $m-1$  y el coeficiente  $g_{mm}$ . Puede partirse del orden 0, en cuyo caso [40] se reduce a

$$R(0) = \sigma_{e0}^2 \quad [42]$$

y estimar  $R(0)$  a partir de la muestra  $f_1, \dots, f_N$  mediante

$$R(0) \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k^2 \quad [43]$$

Si se estiman los sucesivos coeficientes  $g_{ss}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$  queda completa la resolución de [40] para el orden  $m$ .

La idea del MB (Burg, 1975) consiste en hallar  $g_{ss}$  de forma que se minimice la estima de  $\sigma_{es}^2$  dada por

$$P_s = \frac{1}{2(N-s)} \sum_{k=1}^{N-s} (|e_{1s}(k)|^2 + |e_{2s}(k)|^2) \quad [44]$$

$$e_{1s}(k) = \sum_{j=0}^s f_{k+s-j} g_{sj}$$

$$e_{2s}(k) = \sum_{j=0}^s f_{k+j} g_{sj} \quad k = 1, 2, \dots, N-s$$

donde  $e_{1s}(k)$ ,  $e_{2s}(k)$  representan estimas de los errores que se producen, respectivamente, al predecir  $f_{k+s}$  por combinación lineal de los  $f_{k+s-j}$ ,  $j = 1, \dots, s$ , y deducir  $f_k$  a partir de los valores  $f_{k+j}$ ,  $j = 1, \dots, s$ , utilizando las ecuaciones del modelo AR(s) de la expresión [34].

Es decir, en cada paso de la iteración se minimiza el error cuadrático que se comete en la predicción y deducción sobre los datos. En este sentido se dice que el método de Burg es subóptimo al minimizar  $P_m$ , puesto que esta minimización está condicionada a las previas de  $P_1, \dots, P_{m-1}$ .

La estima MB garantiza que el polinomio  $G(z)$  no tiene raíces interiores al círculo unidad.

Cabe plantearse distintas estrategias de estimación conectadas con el MB. Por ejemplo, si se plantea hallar los coeficientes  $g_{mk}$ ,  $k = 1, \dots, m$  tales que minimicen el error cuadrático  $P_m$ , y con  $P_m = \sigma_{em}^2$  se obtiene el método óptimo de mínimos cuadrados (Nuttall, 1976; Ulrych-Clayton, 1976), y que, después de derivar  $P_m$  respecto a los coeficientes  $g_{mk}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , se reduce a resolver el sistema lineal

$$Q_m \bar{G}_m = P_m \bar{I}_m \quad [45]$$

donde el elemento  $jk$  de  $Q_m$  es

$$q_{jk} = \frac{1}{N-m} \sum_{s=m}^N (f_{s-j} f_{s-k} + f_{s-m+j} f_{s-m+k}) \quad [46]$$

Para resolver este sistema existen algoritmos iterativos muy eficaces (Marple, 1980). No obs-

tante, no está garantizado que  $G(z)$  tenga sus raíces exteriores al círculo unidad y, por tanto, pueden hallarse modelos AR inestables. Este problema queda resuelto en el algoritmo de Fougere (1977), pero su aplicación resulta engorrosa.

Los dos métodos que hemos presentado brevemente parten del conocimiento *a priori* del orden  $m$  del modelo. Sin embargo,  $m$  no es conocido generalmente y además puede haber variaciones considerables en  $\hat{S}_m(\omega)$  para diversos valores de  $m$ . Existe una extensa bibliografía de criterios de elección de  $m$ , algunos de los cuales se comparan en Landers-Lacoss (1977).

Muchas veces el resultado de estos criterios es incierto e incluso contradictorio. Esta es, sin duda, una de las trabas mayores a la aplicación sistemática de los modelos AR al análisis espectral.

En general, los métodos de análisis espectral de modelos AR proporcionan mayor resolución de máximos espectrales que los métodos convencionales. No obstante, se ven afectados por una considerable varianza de las estimas y las dificultades para fijar el orden de los modelos.

Fuera de la óptica de la optimización cuadrática, han aparecido diversos métodos de estimación; son de especial interés los basados en el principio de máxima verosimilitud, como los de Kay (1983) y Burg et al. (1982).

Los modelos ARMA son algo menos maneja-

bles que los AR, pero frecuentemente permiten, utilizando menos parámetros, modelar correctamente los procesos analizados. La menor flexibilidad algorítmica procede de la diferente estructura de las ecuaciones normales que se obtienen para un ARMA ( $m, n$ ): multiplicando [36] por  $f(rT)$  y tomando valores esperados se obtiene para cualquier  $j$  entero

$$\sum_{k=0}^m b_{mk} R[(j-k-r)T] = \sum_{l=0}^n a_{nl} \psi_{ef} [(j-l-r)T] \quad [47]$$

donde:

$$R(j) = E[f[(r+j)T] f(rT)]$$

$$\psi_{ef}(j) = E[\varepsilon[(r+j)T] f(rT)]$$

son la autocorrelación de  $f(\cdot)$  y la correlación cruzada de  $\varepsilon(\cdot)$  y  $f(\cdot)$ .

De la ecuación del modelo [37] se deduce fácilmente que  $f(jT)$  depende de  $\varepsilon(rT)$  si  $r \ll j$ , y es independiente en caso contrario, por lo que  $\psi_{ef}(j) = 0$  si  $j > 0$ .

Si se dispone de una estima de las autocorrelaciones  $R(jT)$ ,  $j = n+m, n+m-1, \dots, n-m+1$  se pueden obtener los valores de los parámetros de la parte autorregresiva del modelo  $b_{mk}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$  a partir de las ecuaciones incluidas en [47] resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} R(nT) & R[(n-1)T] & \dots & R[(n-m+1)T] \\ R[(n+1)T] & R(nT) & \dots & R[(n-m+2)T] \\ & & \dots & \\ R[(n+m-1)T] & R[(n+m-2)T] & \dots & R(nT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{m1} \\ b_{m2} \\ \dots \\ b_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R[(n+1)T] \\ -R[(n+2)T] \\ \dots \\ -R[(n+m)T] \end{bmatrix} \quad [48]$$

que, aunque es semejante a [40], no posee la estructura de los sistemas de Toeplitz y, por ello, no hay garantías de obtener que el polinomio  $B(z)$  tenga sus raíces exteriores al círculo unidad, condición para la estabilidad del modelo.

Además se plantea el problema de hallar los coeficientes  $a_{n1}, \dots, a_{nn}$  a partir de las ecuaciones normales [47] sin conocer explícitamente los

valores de  $\psi_{ef}(j)$   $j \ll 0$ . Para resolver estos problemas son necesarios procedimientos iterativos que no expondremos aquí (ver, por ejemplo, Box-Jenkins, 1970; Treitel et al., 1977).

#### 4. SIMULACION

Frecuentemente en aplicaciones de ingeniería el objetivo del análisis espectral es la obten-

ción de señales que tengan un comportamiento frecuencial y estadístico equivalente a los datos. Por ejemplo, en ingeniería sísmica es necesario disponer de la aceleración a que una determinada estructura estará sometida. En general no basta disponer de uno o varios acelerogramas y hacer los cálculos dinámicos con ellos, sino que es más conveniente caracterizar la carga sísmica mediante un modelo estocástico, y obtener a partir de él tantas realizaciones como sea necesario.

Tanto el análisis espectral convencional como los métodos relacionados con procesos AR, ARMA o MA, proporcionan los modelos adecuados para abordar la simulación.

#### 4.1. Modelo cíclico

El análisis espectral convencional proporciona una densidad espectral  $S_N(k\Omega)$   $k = 0, 1, \dots, N-1$  [30] o mejor la suavizada  $\hat{S}_N(k\Omega)$   $k = 0, 1, \dots, N-1$  [32]. A partir de estas muestras puede hallarse la estima de la varianza total  $R_N(0)$  [31] y las muestras de la función de autocorrelación que le corresponden

$$R_N(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{S}_N(k\Omega) e^{i\Omega Tnk} \quad [49]$$

Como, para la simulación, nuestro interés se centra en mantener la varianza y las características frecuenciales dadas por  $\hat{S}_N(k\Omega)$ , nos interesa un modelo estocástico cuya densidad espectral discreta coincide con  $\hat{S}_N(k\Omega)$ .

Consideremos el proceso estocástico dado por

$$X(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{i\Omega Tnk} \quad \Omega = \frac{2\pi}{NT} \quad [50]$$

donde  $C_k$  son variables aleatorias normales complejas de media nula, varianza  $\sigma_k^2$  y mutuamente no correlacionadas. Obsérvese que si  $k\Omega$  excede a la frecuencia de Nyquist  $\pi/T$  resulta que

$$e^{i\Omega Tnk} = e^{i\Omega T(k-N)n}$$

Si  $X(nT)$  es el proceso real, el complejo conjugado de  $C_k$  es  $C_{N-k}$ , por lo que pueden agruparse las exponenciales de frecuencias positivas  $k\Omega$  con las respectivas negativas  $(N-k)\Omega$

de forma que

$$X(nT) = \sum_{k=0}^{n_0} [A_k \cos(\Omega Tnk) + B_k \sin(\Omega Tnk)] \quad [51]$$

donde  $A_k = C_k + C_{N-k} = 2\text{Re}C_k$ ,  $B_k = (C_k - C_{N-k}) \cdot i = 2\text{Im}C_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n_0$ . El número  $n_0$  es  $(N-1)/2$  en el caso de que  $N$  sea impar, y  $N/2 - 1$  si  $N$  es par, aunque en este caso se desprecia el valor  $S_N(\pi/T)$  de la densidad espectral.

La función de autocorrelación de  $X(nT)$  es

$$R_X(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2 e^{i\Omega Tnk} \quad [52]$$

que es una función periódica de período  $2\pi/T$ .

Para determinar la varianza de las variables  $C_k$  del modelo obligamos a que los valores  $R_X(nT)$  coincidan con los que corresponden a la densidad espectral estimada  $\hat{S}_N$ . De la expresión [49] y [52], igualando

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{S}_N(k\Omega) e^{i\Omega Tnk} = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k^2 e^{i\Omega Tnk} \quad [53]$$

se deduce

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{N} \hat{S}_N(k\Omega) \quad [53]$$

Por tanto,  $A_k, B_k$  también son variables aleatorias de media y nula varianza  $\hat{S}_N(k\Omega)/N$ ,  $k = 0, 1, \dots, n_0$ , no correlacionadas entre sí.

El modelo [51] es ya apto para la simulación: obtenida una estima de la densidad espectral  $\hat{S}_N$  de la señal que se desea simular, basta muestrear variables normales de medias nulas y varianzas  $\hat{S}_N(k\Omega)/N$ ,  $k = 0, 1, \dots, n_0$  e introducir esos valores en la expresión [52]. Para cada muestreo de  $A_k, B_k$  la expresión [51] es una función periódica de período  $2\pi/NT$ ; en muchas ocasiones este tipo de simulación es suficiente, pero la periodicidad representa un inconveniente a la hora de estudiar comportamientos muy aleatorios, o al hacer un estudio de máximos que obligaría a repetir con distintos valores  $A_k, B_k$  la simulación.

## 4.2. Modelos AR, MA y ARMA

La simulación basada en los modelos AR, MA y ARMA es simple y conceptualmente adecuada para procesos aleatorios que no se componen de sinusoides.

Se obtienen realizaciones no periódicas del proceso, su longitud es arbitraria y exigen un tiempo de cálculo frecuentemente inferior al método convencional.

Los tres modelos pueden tomar forma de ecuaciones de predicción: a partir de los valores pasados del proceso y del ruido blanco puede predecirse el valor actual. En efecto, las ecuaciones [34] y [37] pueden escribirse

$$(AR) \quad f(jT) = - \sum_{k=1}^m g_{mk} f[(j-k)T] + \varepsilon(jT)$$

$$j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad [54]$$

$$(ARMA) \quad f(jT) = - \sum_{k=1}^m b_{mk} f[(j-k)T] + \sum_{l=0}^n a_{nl} \varepsilon[(j-l)T]$$

$$j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad [55]$$

y para que el modelo de medias móviles

$$(MA) \quad f(jT) = \sum_{k=0}^n a_{nk} \varepsilon[(j-k)T]$$

$$j = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad [56]$$

Es evidente que basta conocer unas condiciones iniciales de  $f(\cdot)$  (AR, ARMA) y de  $\varepsilon(\cdot)$  (ARMA, MA) para poder predecir el valor actual  $f(jT)$ . Las nuevas predicciones sólo exigen sucesivas realizaciones de las variables del ruido blanco. La simulación consiste únicamente en operar las combinaciones lineales que indican las ecuaciones [54], [55] o [56]. Las condiciones iniciales suelen ponerse arbitrariamente y se desprecia el intervalo inicial de la simulación para evitar la dependencia de éstas.

En los problemas de simulación de ingeniería sísmica ha sido frecuentemente utilizado el modelo MA [56], que puede interpretarse como un foco emisor de ruido blanco que es filtrado por un cierto sistema, cuya respuesta al impulso es

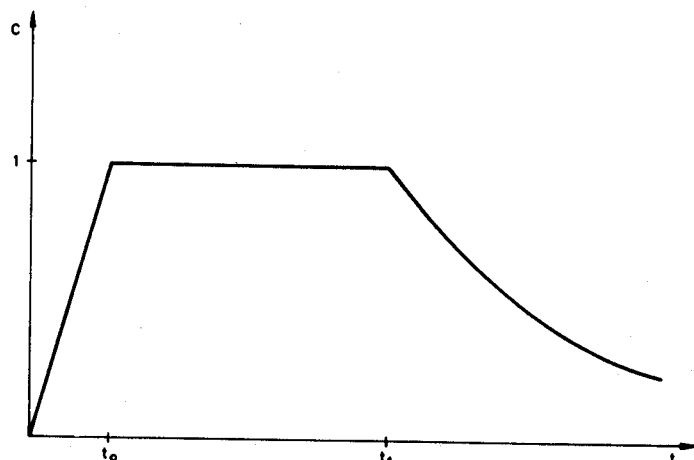


Fig. 8.—Un proceso estacionario, al ser multiplicado por una función del tipo de la de la figura, da como resultado un proceso no estacionario.

precisamente  $a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{nn}$  (Kanai, 1957; Tajimi, 1960, etc.). Recientemente se han propuesto modelos ARMA (Chang et al., 1982) que permiten una mejor interpretación de los coeficientes.

Los modelos de simulación AR, ARMA y MA, así como el método convencional, producen realizaciones de procesos estacionarios. Por ello han de ser adaptados a los casos no estacionarios. Por ejemplo, en simulación sísmica es corriente multiplicar una realización de MA (ruido blanco filtrado) por una función parecida a la de la figura 8, obteniéndose así una modulación no estacionaria de amplitud.

No obstante se han utilizado con éxito modelos AR no estacionarios. Basta para ello concebir los coeficientes de la ecuación [5] como variables en el tiempo: al analizar la señal que se desea simular se elige una ventana de observación pequeña respecto a la longitud total del registro y se efectúa el análisis usual de máxima entropía; con esos coeficientes se predice un punto; a continuación se traslada la ventana un punto y se repite la operación. Existen algoritmos especialmente diseñados para optimizar el tiempo de ordenador (véase la exposición de Ulrych-Ooe, 1979). De esta forma se obtiene una simulación con modulación de amplitudes y frecuencias.

## 5. UN EJEMPLO DE ANALISIS DE UN ACELEROGRAMA

Se ha elegido para este ejemplo un registro de la aceleración (componente Norte-Sur) producido en la estación Forgaria-Cornino por el terremoto de Friuli (Italia) del día 15 de septiembre de 1976. El registro tiene una duración de 24,62 segundos.

El registro de aceleración se presenta digitalizado a intervalos no regulares y en versión no corregida.

En primer lugar se ha procedido a la interpolación por cúbicas, figura 9, de los datos originales y posterior muestreo a intervalo constante  $T = 0,005$  segundos. La frecuencia de corte que corresponde a  $f_c = 1/2T = 100$  Hz. Como las frecuencias de interés son menores que  $f_0 = 25$  Hz, el intervalo de muestreo resulta excesivamente pequeño, y el número de puntos excesivamente grande (4.924 puntos), se ha reducido el número de puntos de cuarta parte.

Para ello se ha filtrado la señal con un filtro de paso baja, cuya función de transferencia se representa en la figura 10, y a continuación se desprecia la mitad de los puntos. El filtrado paso baja tiene como objetivo evitar los efectos de solapamiento espectral que pudieran aparecer al reducir la frecuencia de corte a la mitad. La operación se ha repetido dos veces para reducir la señal a la cuarta parte de puntos.

A continuación se estudió la corrección del instrumento. En efecto, el registro corresponde

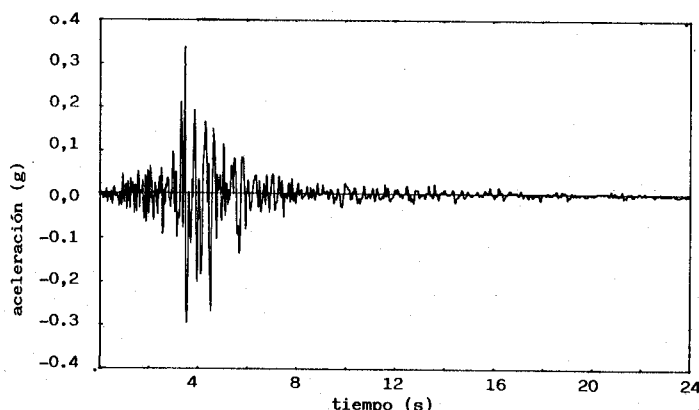


Fig. 9.—Registro de aceleraciones de la componente NS del sismo de Friuli (1976) en la estación Forgaria-Cornino.

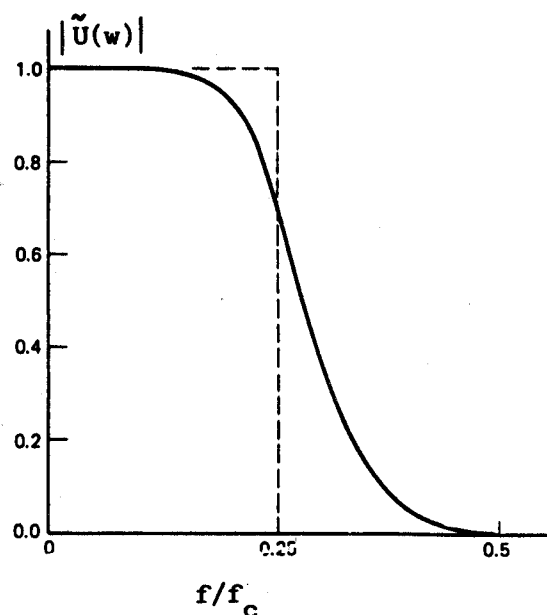


Fig. 10.—Función de transferencia del filtro usado para el análisis de la componente NS del sistema de Friuli de 1976.

al desplazamiento de un oscilador armónico de un grado de libertad sometido a la aceleración del suelo. Conocidas las constantes del oscilador, es posible recuperar la aceleración de excitación.

Esta operación puede realizarse en diversas formas. La más corriente consiste en tomar transformada limitada de Fourier del registro y dividir la transformada por las muestras de la función de transferencia del oscilador.

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2 \frac{\omega}{\omega_0} \xi\right]^2}} \quad [57]$$

donde  $\xi$  es el tanto por uno de amortiguamiento respecto al crítico del oscilador, y  $\omega_0$  es la pulsación propia del mismo.

No obstante, en nuestro caso las constantes del oscilador son  $\xi = 0,6$ ,  $\omega_0 = 162,73 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , lo que hace que la función [57] sea, en la práctica, constante (figura 11), en la banda de frecuencias en que trabajamos y puede prescindirse de tal corrección.

De la observación del acelerograma (figura 9) se desprende que, a partir del noveno segundo,

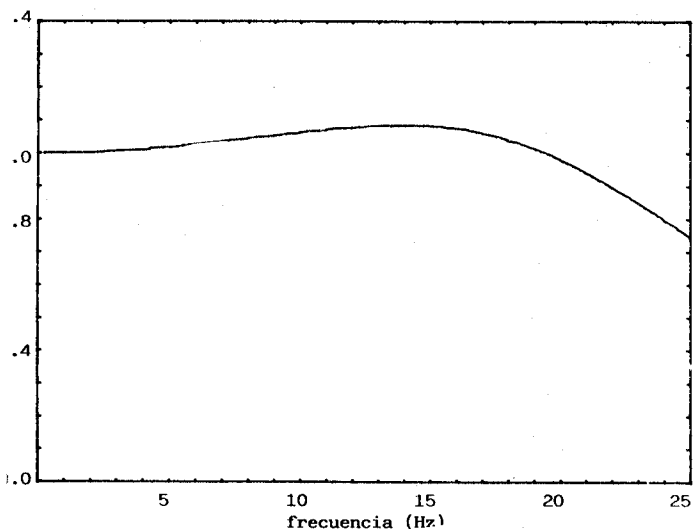


Fig. 11.—Módulo de la función de transferencia del acelerómetro de la estación Forgia-Cornino.

el registro no es significativo a efectos de acción sobre las estructuras. Además, el acelerograma en los primeros nueve segundos es fuertemente no estacionario. Por tanto, a fin de analizar los contenidos de frecuencias correspondientes a las aceleraciones más elevadas se ha estudiado fundamentalmente el intervalo comprendido entre 2,6 segundos y 6 segundos (figura 12).

En la figura 13 se presenta el periodograma no suavizado obtenido con el acelerograma

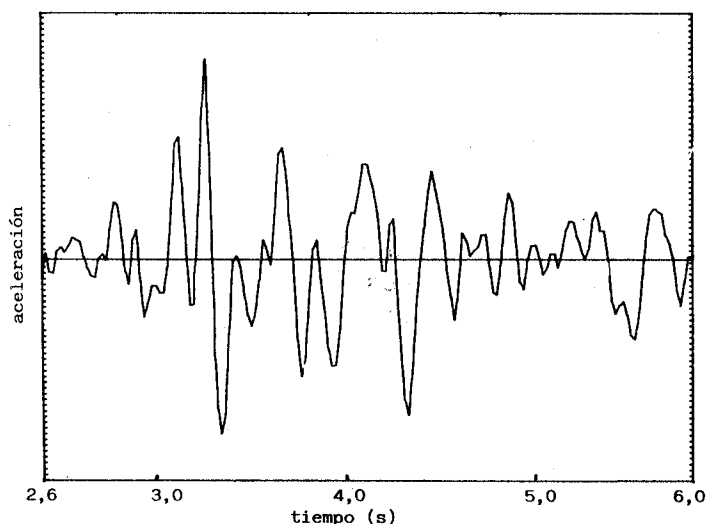


Fig. 12.—Fragmento (2,6 s. - 6,5 s.) del acelerograma de la figura 9 (en la escala vertical, una división equivale a  $1 \text{ cm/s}^2$ ).

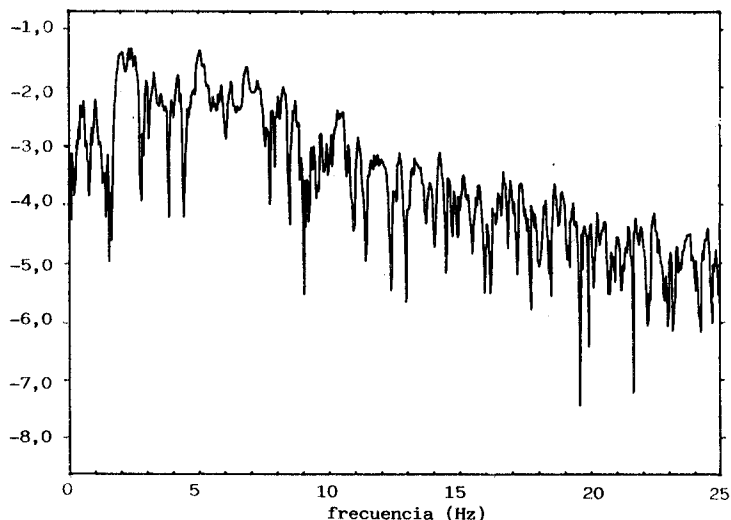


Fig. 13.—Periodograma no suavizado de la señal de la figura 9 (escala logarítmica).

completo; los datos fueron previamente multiplicados por la ventana de Bingham et al. (1967), que se representa en la figura 14. Se observan fuertes oscilaciones del periodograma que corresponden a la varianza de la estima no suavizada.

Los siguientes análisis se refieren al segmento indicado (2,6 segundos, 6,0 segundos), y los periodogramas serán suavizados.

La figura 15 muestra el periodograma suavizado (3 puntos) en escala logarítmica. Se destacan tres frecuencias dominantes de 2,33, 4,97 y 7,02 Hz. Se ha utilizado la misma ventana que en el caso anterior. Puede observarse la disminu-

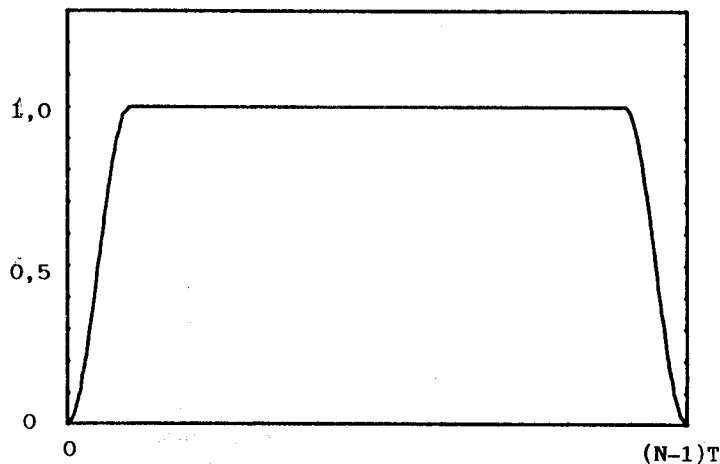


Fig. 14.—Ventana de Bingham.

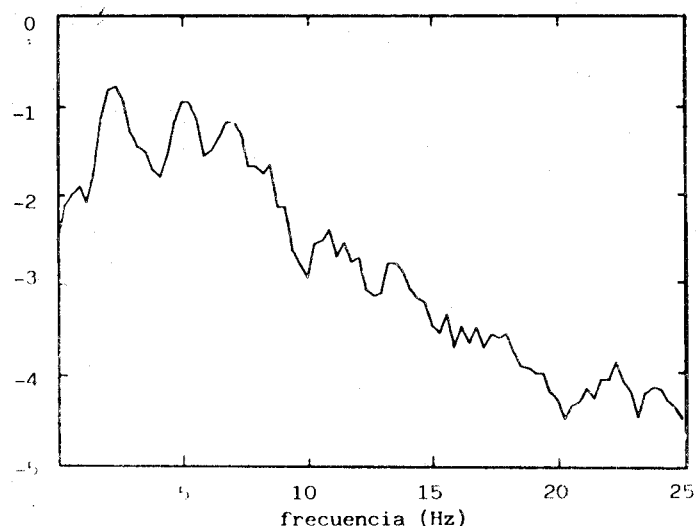


Fig. 15.—Periodograma suavizado (tres puntos) del acelerograma de la figura 12 (escala logarítmica).

ción de las oscilaciones del periodograma por efecto del suavizado.

La figura 16 es el espectro de potencia, en escala logarítmica de los mismos datos, realizado por el método de máxima entropía con un modelo autorregresivo de orden 19. Los máximos espectrales coinciden sustancialmente con los anteriores; a efectos de comparación, la figura 17 muestra la superposición de los resultados del análisis convencional y el de máxima entropía citado: es fácil observar la mayor suavidad de este último análisis. En la figura 18 se

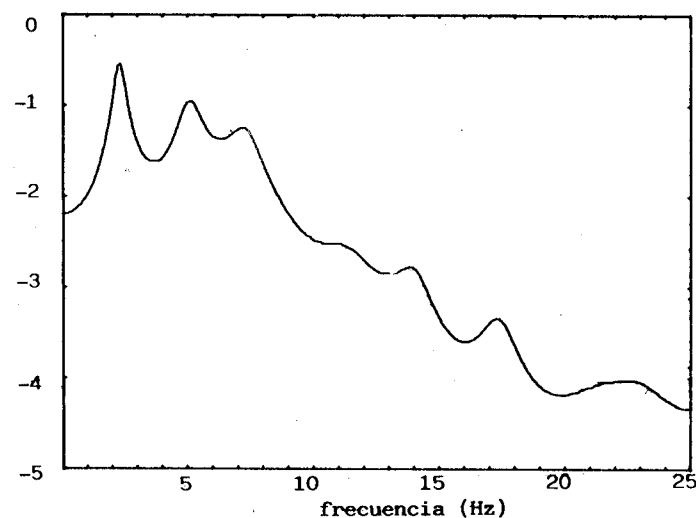


Fig. 16.—Densidad espectral de potencia del modelo AR(19) estimado para el acelerograma de la figura 12 (escala logarítmica).

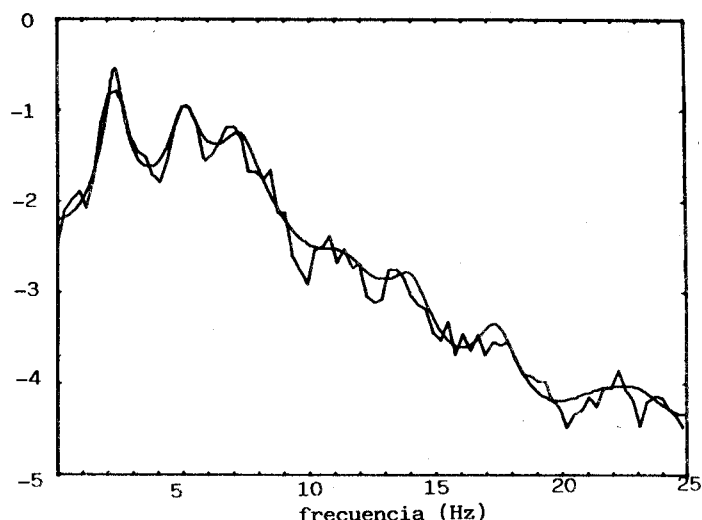


Fig. 17.—Superposición de las densidades espectrales de potencia estimadas por el método convencional y el de máxima entropía AR(19) (escala vertical logarítmica).

han representado las densidades espectrales de potencia obtenidas en modelos de orden 6 y 34. El modelo AR(6) es excesivamente suavizado y no es capaz de resolver las tres frecuencias dominantes, mientras que el AR(34), manteniendo las frecuencias más importantes, presenta oscilaciones carentes de interés.

Se ha empleado el modelo AR(19) para simular el registro sísmico que se analiza, a partir de la ecuación de predicción [53] y la varianza del ruido blanco igual a la  $\sigma_e^2$  obtenida por el método de Burg. El resultado de la simulación

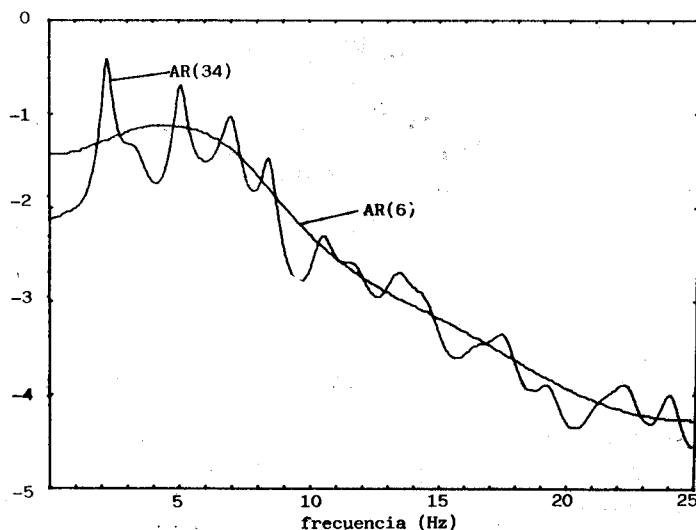


Fig. 18.—Densidad espectral de potencia de los modelos AR(34) y AR(6) estimados para el acelerograma de la figura 12 (escala logarítmica).

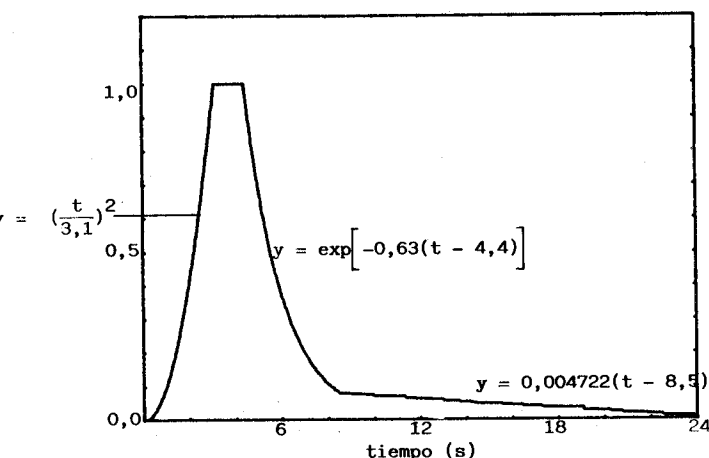


Fig. 19.—Ventana temporal utilizada en la simulación.

se ha multiplicado por la ventana de la figura 19 para modelar la no estacionaridad de la señal. El resultado obtenido se presenta en la figura 20; si se compara con la señal original puede advertirse la gran similitud de la simulación en el intervalo (2,6 segundos, 6 segundos), mientras que se observan algunas diferencias de frecuencias en el tramo inicial, debido a que éstas no

participaron en el análisis; si se quisiera mejorar la simulación de este primer tramo, de contenido frecuencial diferenciado, sería necesario simularlo con un modelo AR procedente del análisis de este intervalo inicial.

## 6. COMENTARIOS FINALES

Los métodos de análisis espectral convencional han mostrado durante más de veinte años su utilidad en gran cantidad de aplicaciones. Su principal ventaja consiste en la rapidez de cálculo gracias al método FFT. (Cooley-Tukey, 1965).

No obstante, presenta algunas dificultades destacables:

- La necesidad de aplicar ventanas temporales a los datos, lo que reduce la resolución en el análisis y exige una adecuada elección de la misma.
- La varianza del periodograma, como estimador de la densidad espectral de potencia, debe ser reducida mediante suavizado del espectro, o bien por subdivisión

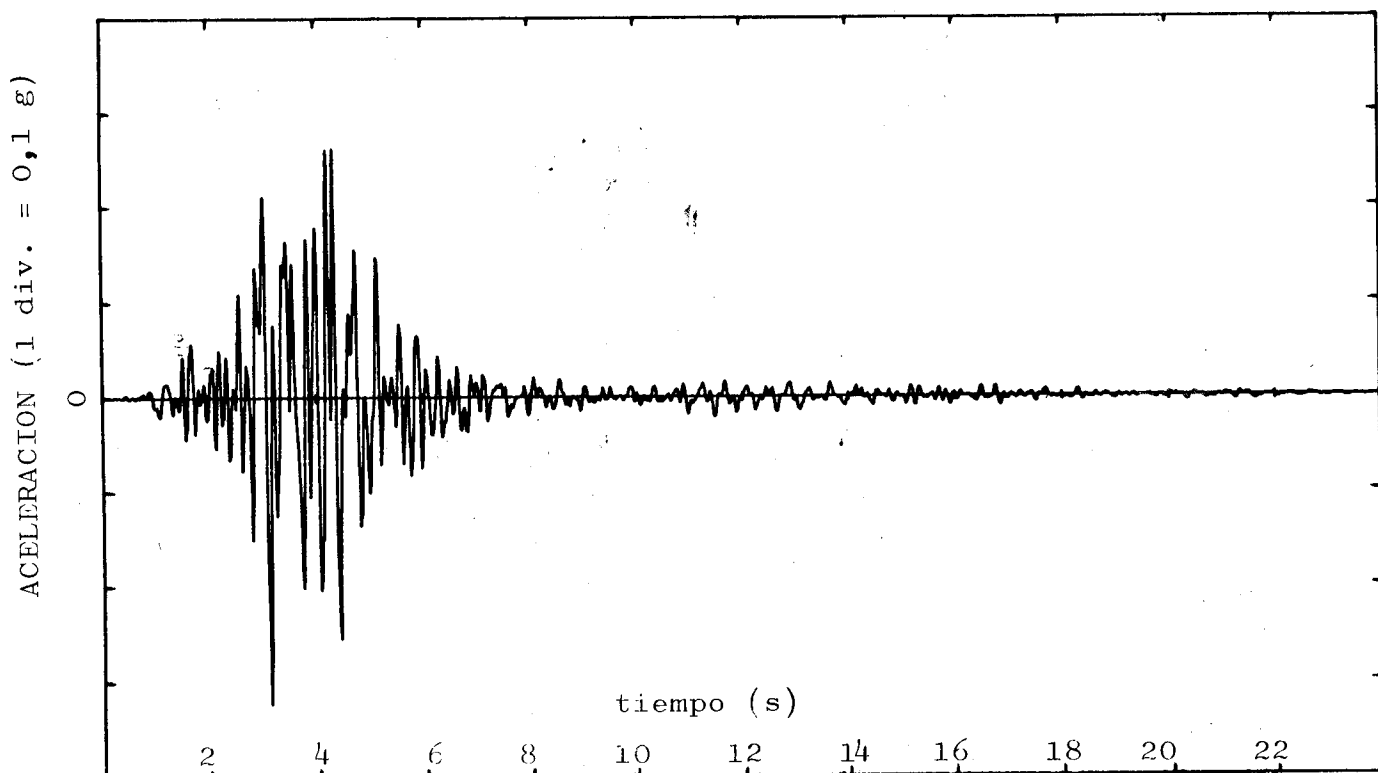


Fig. 20.—Simulación de la componente NS del sismo de Friuli con un modelo AR(19).

en intervalos de los datos. Es necesario, por tanto, llegar a un compromiso entre la pérdida de resolución debida al suavizado y la reducción de la varianza de la estima.

- La utilización del método convencional de análisis para la obtención de registros simulados puede tener el inconveniente de que los procesos [51] producen realizaciones periódicas. Además la simulación exige un tiempo de cálculo importante.

Los métodos de análisis basados en modelos estocásticos como los AR, MA y ARMA, y, entre ellos, el de máxima entropía de Burg, han sido utilizados ampliamente en la última década.

Tiene la ventaja de no exigir la utilización de ventanas temporales ni suavizadas posteriores a la estimación espectral. Ofrecen una mejora de la resolución espectral, especialmente para registros de corta duración o el análisis de bajas frecuencias. No obstante debe elegirse el orden de los modelos (AR, ARMA, MA) utilizados, lo cual sigue siendo un problema abierto, a pesar de la existencia de diversos criterios para esa determinación. También exigen un tiempo de cálculo algo mayor que los métodos convencionales.

La simulación a partir de estos últimos modelos es muy simple y rápida, permitiendo, además, obtener registros no periódicos de la longitud que se desee.

Ambos métodos, el convencional y los basados en modelos AR, ARMA y MA, se muestran útiles en el análisis de frecuencias y la simulación de señales. De aquí que la utilización de uno u otro tipo de análisis deba decidirse en función de las ventajas que cada uno ofrece para un problema específico: en cualquier caso puede tener ventajas su utilización conjunta.

## REFERENCIAS

- ASH, R. B., y GARDNER, M. F.: «Topics in stochastic processes». Oxford U. Press, London, 1975.
- BINGHAM, C.; GODFREY, M. D., y TUKEY, J. W.: «Modern Techniques of Power Spectrum Estimation». IEEE Trans., AU-15, 2, 56-57, 1967.
- BLACKMAN, R. B., y TUKEY, J. W.: «The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering». Dover. New York, 1958.
- BOX, G. E. P., y JENKINS, G. M.: «Time series analysis, forecasting and control». Holden Day, San Francisco, 1970.
- BURG, J. P.: «Maximum entropy spectral analysis». Ph. D. thesis, Stanford U., California, USA, 1975.
- BURG, J. P.; LUENBERGER, D. G., y WENGER, D. L.: «Estimation of structured covariance matrices». Proc. IEEE, 70, 9, 963-974, 1982.
- BYCROFT, G. N.: «White noise representation of earthquakes». Proc. Pap. 2434. J. Eng. Div. ASCE, vol. 36, n.º EM2, pp. 1-16, April 1960.
- CHANG, M. K.; KWIATHOWSKI, J. W., y NAU, R. F.: «ARMA models for earthquake ground motions». Earthquake Eng. Structural Dynamics, 10, 651-662, 1982.
- COOLEY, J. W., y TUKEY, J. W.: «An algorithm for the machine calculation of Fourier series». Math. Comput., 19, 297-301, 1965.
- FOUGERE, P. F.: «A solution to the problem of spontaneous line splitting in maximum entropy power spectrum analysis». J. Geophys. Res., 82, 1051-1054, 1977.
- GOLDBERG, R. R.: «Fourier transforms». Cambridge U. Press, London, 1970.
- HOUSNER, G. W.: «Properties of strong ground motion earthquakes». Bull. Seismol. Soc. Am., vol. 45, n.º 3, pp. 197-218, July 1955.
- KANAI, K.: «Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground». Univ. Tokyo Bull. earthquake Res. Inst., vol. 35, pp. 309-325, 1957.
- KAY, S. M.: «Recursive maximum likelihood estimation of autoregressive processes». IEEE Trans., ASSP-31, 1983.
- ANDERS, T. E., y LACOSS, R. T.: «Some geophysical applications of autoregressive spectral estimates». IEEE Trans., GE-15, 26-32, 1977.
- LANDERS, T. E., y LACOSS, R. T.: «Some Geophysical applications of autoregressive spectral estimates». IEEE Trans., GE-15, 26-32, 1977.
- LEVINSON, N.: «The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction». J. Math. Phys. Cambridge. Mass., 25, 261, 1947.

## REVISION DE METODOS DE ANALISIS ESPECTRAL.

MARKUSHEVICH, A.: «Teoría de las funciones analíticas». Mir, traducción castellana, Moscú, 1978.

MARPLE, L.: «A new autoregressive spectrum analysis algorithm». IEEE Trans., ASSP-28, 4, 441-454, 1980.

NUTTAL, A. H.: «Spectral analysis of a univariate process with bad data points, via maximum entropy and linear prediction techniques». Naval Underwater System Center, New London, CT, Tech. Rep. 5303, March 26, 1976.

PAPOULIS, A.: «The Fourier integral». McGraw Hill, 1962.

PAPOULIS, A.: «Sistemas digitales y analógicos, transformadas de Fourier, estimación espectral». Marcombo, Barcelona, 1978.

ROSENBLUETH, E., y BUSTAMANTE, J.: «Distribution of Structural Response to earthquakes». Proc. Pap. 3173, J. Eng. Mech. Div. ASCE, vol. 88, n.º EM3, pp. 75-100, June 1962.

SHANNON, C. E.: «A mathematical theory of communication». Bell. Syst. Tech. J., 27, 623-656, 1948.

TAJIMI, H.: «A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake». Proc. 2d. World Conf. Earthquake Eng. Tokyo and Kyoto, vol. II, pp. 781-798, July 1960.

THOMSON, W. T.: «Spectral aspect of earthquakes». Bull. Seismol. Soc. Am., vol. 49, pp. 91-98, 1959.

TREITEL, S.; GUTOWSKI, P. R., y ROBINSON, E. A.: «Empirical spectral analysis revisited». In Topics in Numerical Analysis, ed. J. H. Miller, Academic Press, New York, 1977.

TRETTET, S. A.: «Introduction to discrete-time signal processing». John Wiley, New York, 1976.

ULRYCH, T. J., y CLAYTON, R. W.: «Time-series modelling and maximum entropy». Phys. Earth Planet. Interiors, 12, 188-200, 1976.

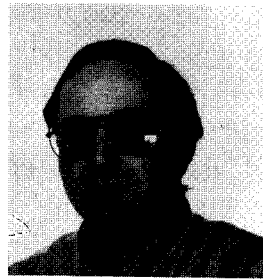
ULRYCH, T. J., y OOE, M.: «Autoregressive and mixed autoregressive-moving average models and spectra». In Nonlinear Methods of Spectral Analysis, ed. S. Haykin, Springer Verlag, Berlín, 1979.

WELCH, P. D.: «The use of fast Fourier transform for the

estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms»; IEEE Trans. Audio and Electroacoust., AV-15, 70-73, 1967.

WIENER, N.: «The Fourier integral and certain of its applications». Reprint Dover, New York, 1958.

### Juan J. Egozcue Rubí



Nacido en Barcelona en 1950. Realizó estudios de Física, especializándose en Física del aire y Geofísica en la Universidad de Barcelona. Desde 1977 es profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Doctor en 1980, realizó su tesis doctoral en «Análisis de máxima entropía y sus aplicaciones Geofísicas». Desde el año 1981 imparte clases de Estadística y Cálculo Numérico. En la actualidad, sus principales líneas de investigación son el análisis espectral de procesos AR, ARMA y modelos de riesgo sísmico.

### Juan Miquel Canet



Es doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Especialista en Cálculo de Estructuras, ha sido profesor de Resistencia de Materiales en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander de 1973 a 1976. Desde esta última fecha, es profesor de Cálculo de Estructuras en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Ha realizado diversos proyectos, informes técnicos y varias publicaciones en temas de su especialidad.