

Un modelo tridimensional para el estudio de contaminantes de tipo regional de las aguas subterráneas^(*)

Por JOSE FERRER POLO

Doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.
Universidad Politécnica. Valencia.

FRANCISCO J. RAMOS RAMIS

Doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.
Universidad Politécnica. Valencia.

Apoyándose en un artículo previo, se expone directamente el modelo numérico tridimensional utilizado, indicando sus ventajas respecto al bidimensional del que deriva.

Se comprueba la capacidad del modelo numérico para aproximar la solución analítica en un caso de solución conocida. Esta comprobación se realiza tanto para la distribución vertical de concentraciones para un tiempo dado, como para la evolución temporal de concentraciones en un punto dado.

1. INTRODUCCION

Este trabajo es una continuación de otros dos ya publicados en esta REVISTA DE OBRAS PUBLICAS (Ferrer y Ramos, 1982). En ellos se exponía un modelo simplificado, aplicable a contaminantes de tipo regional, tanto en su parte teórica como en una aplicación concreta.

Del estudio de la aplicación, la zona costera situada al Norte de la provincia de Valencia, se deducían ciertas limitaciones del modelo propuesto. La limitación básica era la bidimensionalidad, lo que suponía trabajar con la concentración media de contaminante en una vertical del acuífero.

El principal problema de la bidimensionalidad derivaba de la imposibilidad de simular alternativas cuya base fuera el tomar el agua a distintas profundidades. Este tipo de alternativas es especialmente adecuado, pues al estar los contaminantes de tipo regional asociados generalmente a la infiltración del agua de regadío, su concentración es mayor en la parte superior del acuífero, disminuyendo con la profundidad.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de abril de 1984.

El planteamiento del modelo tridimensional se realiza procurando mantener las características de simplicidad y rapidez que caracterizan el modelo bidimensional, por lo que se le tomó como punto de partida.

2. EL MODELO NUMERICO

El punto de partida para el desarrollo del modelo tridimensional será el bidimensional previo (Ferrer y Ramos, 1982), admitiendo las siguientes hipótesis:

1. El movimiento del agua en el acuífero se considera bidimensional.

2. El intercambio de masa entre celdas situadas en un mismo nivel horizontal se realiza siguiendo el modelo de celdas de mezcla.

3. El intercambio de masa entre celdas situadas en distinto nivel horizontal se realiza exclusivamente mediante el fenómeno de dispersión hidrodinámica.

4. La variación del espesor saturado se efectúa linealmente en todo el espesor del acuífero. Por tanto, el espesor y el volumen de las celdas, aunque variable en términos absolutos, no lo es en términos relativos para las situadas en una misma vertical.

De acuerdo con estas hipótesis y siguiendo la nomenclatura que aparece expresada en la figura 1, el balance de masa en una celda i, j, k , se obtendría de la forma siguiente:

a) Variación de masa total.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta M(i,j,k)}{\Delta t} &= \frac{\Delta V(i,j,k)}{\Delta t} C(i,j,k) + \\ &+ V(i,j,k) \frac{\Delta C(i,j,k)}{\Delta t} = \\ &= \frac{V(i,j,k) - V1(i,j,k)}{\Delta t} C(i,j,k) + \\ &+ V(i,j,k) \frac{C(i,j,k) - C1(i,j,k)}{\Delta t} \end{aligned} \quad [1]$$

donde:

t es el tiempo.

Δt es el intervalo de tiempo.

$M(i, j, k)$ es la masa total en la celda i, j, k .

$V(i, j, k)$ es el volumen de la celda i, j, k , en el tiempo t .

$V1(i, j, k)$ es el volumen de la celda i, j, k , en el tiempo $t - \Delta t$.

$C(i, j, k)$ es la concentración de la celda i, j, k , en el tiempo t .

$C1(i, j, k)$ es la concentración de la celda i, j, k , en el tiempo $t - \Delta t$.

b) Variación de masa debido a entradas y salidas subterráneas en el mismo nivel k .

$$\begin{aligned} &+ cf1(i,j) qf1(i,j) C(i-1,j,k) + \\ &+ cc1(i,j) qc1(i,j) C(i,j-1,k) + \\ &+ [(1 - cf1(i,j)) qf1(i,j) + \\ &+ (1 - cc1(i,j)) qc1(i,j) + \\ &+ (1 - cc2(i,j)) qc2(i,j) + \\ &+ (1 - cf2(i,j)) qf2(i,j)] C(i,j,k) + \\ &+ cc2(i,j) qc2(i,j) C(i,j+1,k) + \\ &+ cf2(i,j) qf2(i,j) C(i+1,j,k) \left(\frac{\Delta z(i,j,k)}{z(i,j)} \right) \end{aligned} \quad [2]$$

siendo:

$$\begin{aligned} qf1(i,j) &= T2(i-1,j) (h(i-1,j) - h(i,j)) \Delta y / \Delta x \\ qf2(i,j) &= T2(i,j) (h(i+1,j) - h(i,j)) \Delta y / \Delta x \\ qc1(i,j) &= T1(i,j-1) (h(i,j-1) - h(i,j)) \Delta x / \Delta y \\ qc2(i,j) &= T1(i,j) (h(i,j+1) - h(i,j)) \Delta x / \Delta y \end{aligned}$$

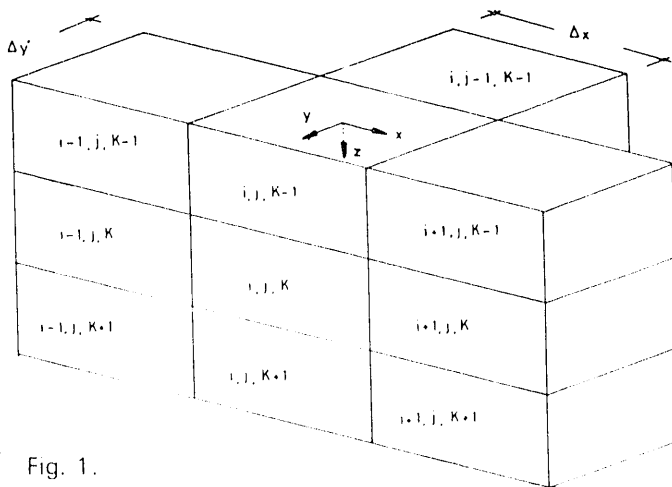


Fig. 1.

$$cf1(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } h(i-1,j) > h(i,j) \\ 0 & \text{si } h(i-1,j) \leq h(i,j) \end{cases}$$

$$cf2(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } h(i+1,j) > h(i,j) \\ 0 & \text{si } h(i+1,j) \leq h(i,j) \end{cases}$$

$$cc1(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } h(i,j-1) > h(i,j) \\ 0 & \text{si } h(i,j-1) \leq h(i,j) \end{cases}$$

$$cc2(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } h(i,j+1) > h(i,j) \\ 0 & \text{si } h(i,j+1) \leq h(i,j) \end{cases}$$

donde:

$T1(..., j)$ transmisividad de la cara común a la celda $..., j$ y $..., j+1$.

$T2(i, ...)$ transmisividad de la cara común a la celda $i, ...$ y $i+1, ...$.

$h(i, j)$ nivel piezométrico de la celda i, j .

$\Delta x, \Delta y$ longitud de los lados de las celdas paralelas a OX y OY .

$\Delta z(i,j,k)$ distancia entre los centros de las caras que limitan superior e inferiormente la celda i,j,k .

c) Variación de masa debido a entradas o salidas subterráneas entre distintos niveles k .

$$\begin{aligned} &\Delta x \Delta y D(i,j,k-1) v(i,j) \frac{C(i,j,k-1) - C(i,j,k)}{z(i,j,k-1) - z(i,j,k)} + \\ &+ \Delta x \Delta y D(i,j,k) v(i,j) \frac{C(i,j,k+1) - C(i,j,k)}{z(i,j,k) + z(i,j,k+1)} = \\ &= \Delta x \Delta y v(i,j) 2 \left[D(i,j,k-1) \frac{(C(i,j,k-1) - C(i,j,k))}{z(i,j,k-1) + z(i,j,k)} \right. \\ &\quad \left. + D(i,j,k) \frac{(C(i,j,k+1) - C(i,j,k))}{z(i,j,k) + z(i,j,k+1)} \right] \end{aligned} \quad [3]$$

siendo:

$$v(i,j) = \sqrt{v_x(i,j)^2 + v_y(i,j)^2}$$

$$v_x(i,j) = \frac{\text{PER}(i,j)}{\text{POR}(i,j)} \frac{h(i+1,j) - h(i-1,j)}{2\Delta x}$$

$$v_y(i,j) = \frac{\text{PER}(i,j)}{\text{POR}(i,j)} \frac{h(i+1,j) - h(i-1,j)}{2\Delta y}$$

$D(i,j,k)$ = dispersividad transversal en la cara común a las celdas i,j,k e $i,j,k+1$.

d) Entradas o salidas desde el exterior del acuífero.

$$Q_m(i,j,k) - Q[(i,j,k) C(i,j,k)] \quad [4]$$

donde:

$Q_m(i,j,k)$ = caudal máximo que penetra a través de la superficie del terreno. Es distinto de cero sólo para $k = 1$.

$Q(i,j,k)$ = Caudal bombeado del acuífero en la celda i,j,k .

El balance global en la celda i, j, k , queda reflejado en la siguiente ecuación:

$$(1) = (2) + (3) + (4) \quad (5)$$

La consideración del balance de masa en todas las celdas en que se ha dividido el acuífero conduce a un sistema lineal de N ecuaciones con N incógnitas.

La matriz del sistema de ecuaciones es heptadiagonal y simétrica. El sistema puede reducirse a K sistemas de matriz pentadiagonal si se consideran por separado las ecuaciones del balance de masa en las celdas situadas en un mismo nivel K , incluyendo en el término independiente los sumandos donde aparecen las concentraciones de las celdas correspondientes al nivel superior e inferior al que se considera.

De esta forma, y si se utiliza el sistema IADI modificado (Prickett y Lounquist, 1971) para la resolución de cada sistema, la resolución del sistema conjunto puede hacerse de la forma siguiente.

— Realizar una iteración IADI en cada uno de los niveles K , comenzando por $K = 1$. En cada iteración se tomará como valor de las concentraciones en los niveles superior e inferior las obtenidas en la iteración anterior.

— Repetir el proceso hasta que el error máximo, es decir, la diferencia entre los valores de las concentraciones en una misma celda en dos iteraciones sucesivas, sea menor que un valor prefijado.

Es decir, el proceso de una iteración en el sistema completo equivale a una iteración en cada uno de los K subsistemas que lo componen.

Dado que las características de la matriz de cada uno de los subsistemas es idéntica a la del modelo bidimensional (Ferrer y Ramos, 1982), se cumplen, también en este caso, las condiciones de convergencia y estabilidad que se indican en el citado artículo. El modelo tridimensional conserva, pues, las ventajas de incondicional convergencia y estabilidad del bidimensional.

3. VALIDACION DEL MODELO NUMERICO

La validación del modelo numérico se ha efectuado por comparación con un caso en el cual la solución analítica sea conocida.

La comparación se ha efectuado considerando la evolución temporal de la concentración, tanto en un punto aislado como en todos los puntos de una vertical.

Las soluciones analítica y numérica comparadas, corresponden al caso siguiente:

— Acuífero rectangular, homogéneo e isótropo, confinado con fondo y techo planos.

— Régimen estacionario de flujo con componente de la velocidad en una sola dirección, el eje de las x , y gradiente de alturas constante.

El movimiento se realiza, pues, en un plano vertical, el formado por los ejes OX y OZ .

Se ha considerado un acuífero de 500 m. de longitud, 25 m. de espesor y 1 m. de anchura.

La discretización utilizada ha sido:

$$\Delta x = 50 \text{ m.} \quad \Delta y = 1 \text{ m.} \quad \Delta z = \text{m.}$$

Las características hidrogeológicas del acuífero, son:

$$\theta = 0,1 \quad K = 40 \text{ m/d} \quad D = 0,1 \text{ m.}$$

La concentración en las celdas de contorno es constantemente igual a cero.

La concentración inicial en el acuífero es cero.

El acuífero sufre, a través de la superficie, una entrada constante de masa, de valor 8,33 gr/celda/día.

Teniendo en cuenta las hipótesis expuestas anteriormente, se admite que el movimiento de un contaminante depositado en la parte superior del acuífero, se realiza en la forma siguiente:

— Horizontalmente acompañando al flujo del agua.

— Verticalmente se dispersa en función de la velocidad real del agua en cada punto.

Es, precisamente, a partir de esta composición de movimientos como ha sido posible obtener la solución analítica deseada. Como puede deducirse la solución corresponde a la que se obtiene en una columna semiinfinita, en la que esté penetrando por su extremo superior una cantidad de masa constante en el tiempo, que se mueve en esta columna debida a la dispersión. Basta desplazar esta columna, orientada según el eje OZ en la dirección del eje OX y a la misma velocidad del agua en el acuífero, para obtener la solución buscada.

La solución analítica es para un punto de coordenadas x, z , según se indica en la figura 2, la siguiente (Smirnov, 1976):

$$t \ll \frac{x}{v}$$

$$C(x, z, t) = q \left[\frac{z^2}{2L} - z + \frac{L}{3} + \frac{Dvt}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n^2\pi} e^{\frac{Dv(4\pi n)^2 t}{L}} \cos \frac{n\pi z}{L} \right] \quad [6]$$

$$t > \frac{x}{v}$$

$$C(x, z, t) = q \left[\frac{z^2}{2L} - z + \frac{L}{3} + \frac{Dx}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n^2\pi} e^{\frac{Dv(\pi n)^2 t}{L}} \cos \frac{n\pi z}{L} \right] \quad [7]$$

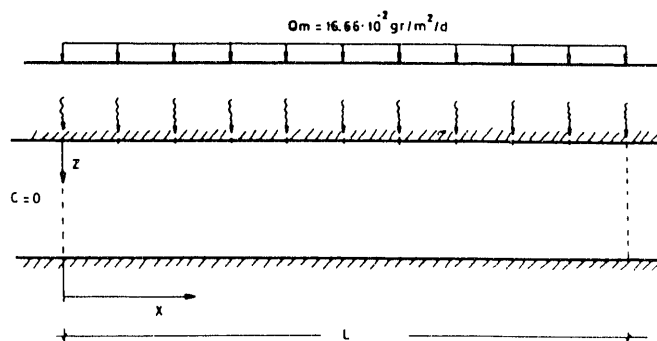


Fig. 2.

Donde:

$$q = \frac{QM}{POR Dv}$$

donde QM es la masa que penetra realmente en el acuífero por unidad de superficie y tiempo.

La comparación entre los valores numéricos y los analíticos se muestra en el punto $x = 250$. En la figura 3 puede verse el valor de la concentración en función de z para $t = 338,85$ d. En la figura 4, para la misma x y $z = 1,25$ m.,

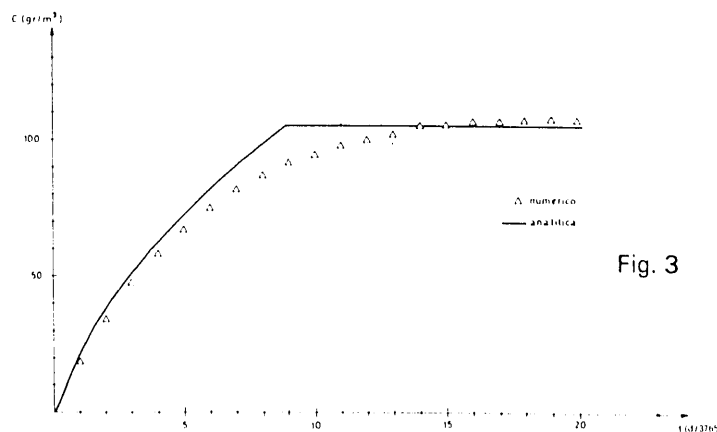


Fig. 3

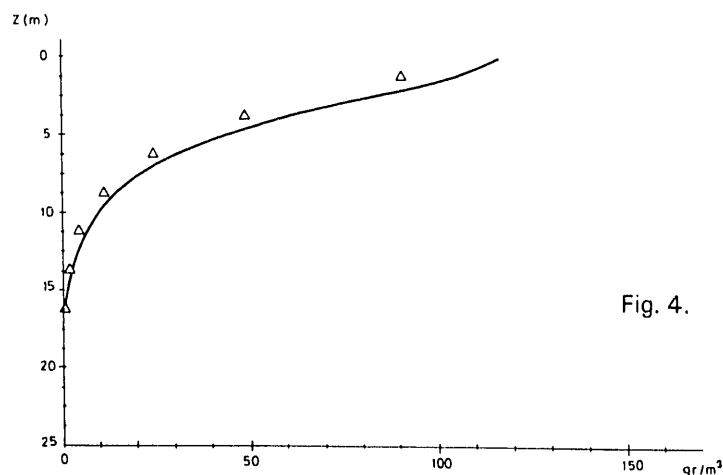


Fig. 4.

puede verse la evolución en el tiempo de la concentración.

Como puede observarse en ambos casos, el ajuste es suficiente para los objetivos que se persiguen en este tipo de modelos, utilizados en estudios a escala regional.

Un punto interesante a destacar es el escaso número de iteraciones necesarias, cuatro, para obtener una precisión del orden de las décimas de gr/m^3 , lo que hace el método especialmente económico en este tipo de estudio.

4. CONCLUSIONES

Las conclusiones obtenidas del presente estudio son:

- El método numérico es incondicionalmente convergente y estable.
- Es posible reproducir la evolución de la concentración con un grado de ajuste suficiente para estudios a escala regional.
- El tiempo de ordenador disminuye notablemente, del orden de 10 veces, frente a los métodos usuales (características, Konikow y Bredehoeft, 1978, y elementos finitos, Gray y Pinder, 1976). Lo mismo ocurre con la capacidad de almacenamiento necesaria.

BIBLIOGRAFIA

- FERRER, J.: «Un modelo para el estudio de contaminantes de tipo regional en acuíferos libres». Tesis doctoral. Valencia, 1980.
- FERRER, J., y RAMOS, F. J.: «Un modelo bidimensional para el estudio de contaminantes de tipo regional en acuíferos». Revista de Obras Públicas. Junio, 1982.
- GRAY, W. G., y PINDER, G. F.: «Galerkin approximation at the time derivative in the finite element analysis of groundwater flow». Water Resources Research. 1976.
- KONIKOW, L. F., y BREDEHOEFT, J. D.: «Computer model of two dimensional solute transport and dispersion in ground water». U.S. Geological Survey Water Resources Investigations, 1978.

PRICKETT, T. A., y LONQUIST, C. G.: «Selected digital computer techniques for groundwater resources evaluation». Illinois. State Water Survey, Urbana, Bull 55, 1971.

SMIRNOV, M. M.: «Problemas de ecuaciones de la física matemática». Editorial Mir, Moscú, 1976.

José Ferrer Polo



Doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, título obtenido en 1980 en la Universidad Politécnica de Valencia. Actualmente es profesor agregado interino de «Ingeniería Sanitaria» desde 1981 en dicha Universidad.

En el campo de la investigación colabora en varios convenios, especialmente el Convenio Bilateral España-USA sobre el uso conjunto de aguas superficiales y subterráneas y el convenio con el Centro de Estudios de Ordenación del Territorio y Medio Ambiente sobre modelación de calidad de aguas subterráneas, tema que constituye su especialidad. Ha publicado diversos artículos en dicha área en revistas nacionales e internacionales.

Francisco Ramos Ramis



Se graduó como ingeniero de Caminos en 1975 y como doctor ingeniero de Caminos, en 1977, en la Universidad Politécnica de Valencia. Durante 1978 fue profesor visitante en Colorado State University, dentro del Convenio Bilateral sobre el uso conjunto de aguas superficiales y subterráneas entre dicha Universidad y la Politécnica de Valencia. En 1979 obtuvo, por oposición, la adjuntía del Grupo VII «Fundamentos Físicos de las Técnicas», de la ETS de ingenieros de Caminos de Valencia.

Es actualmente jefe de Estudios de dicha Escuela Técnica Superior. En el campo científico es autor de numerosas publicaciones nacionales e internacionales y de un libro destinado a la docencia. Su principal área de interés es la Física aplicada y la Hidrogeología.