

Sobre la estabilidad, según Liapunov, de un cuerpo elástico monodimensional (*)

Por R. RODRIGUEZ REBOLLO

Dr. Ingeniero de Caminos,
Canales y Puertos

Para un cuerpo elástico monodimensional, cuya ecuación de movimiento alrededor de un estado no perturbado es de una clase general en la práctica técnica, se obtienen condiciones suficientes de estabilidad según Liapunov. Cuando los coeficientes de dicha ecuación son funciones de la posición y el tiempo, se pueden obtener estimaciones de los parámetros de carga y llegar a condiciones particulares conocidas. Se hace una aplicación simple.

1. INTRODUCCION

La estabilidad de estados de cuerpos elásticos monodimensionales ha sido objeto de gran atención, desde los trabajos de Euler, en mecánica aplicada y teórica.

Consideramos el concepto de estabilidad en el sentido de Liapunov y la aplicación del método directo o segundo método. Leipholz (1) ha estudiado la estabilidad de una columna elástica cuyas ecuaciones variacionales de movimiento son de un tipo frecuente en problemas de ingeniería. Aplicó el método de Garlekin y obtuvo importantes resultados de estabilidad condicional. R. J. Knops y E. W. Wilkes (2, pág. 181) han reunido ciertos resultados de estabilidad para una función de Liapunov obtenida a partir de la energía total, con la adición de algunos términos de forma que su derivada temporal fuera definida negativa.

En el presente trabajo consideramos una ecuación variacional de movimiento de un tipo más general para un sólido elástico monodimensional, que incluye fuerzas giroscópicas y disipativas, así como no conservativas («follower forces»). Hemos seleccionado dos funciones de Liapunov. De la primera, obtenemos condiciones suficientes de estabilidad cuando los coeficientes de la ecuación de movimiento sólo dependen del tiempo. En el caso general, los re-

sultados pueden extenderse como se indica en el trabajo.

La segunda función de Liapunov nos proporciona condiciones suficientes de estabilidad cuando todos los coeficientes dependen de la posición y del tiempo. Si son constantes, obtenemos condiciones para valores positivos o negativos del coeficiente del desplazamiento incremental y dichos criterios conducen a resultados conocidos para ciertas ecuaciones particulares de movimiento.

Finalmente hacemos una aplicación al problema de una columna sometida a una carga longitudinal, cuya dependencia con el tiempo es de tipo armónico, incluyendo asimismo disipación.

2. FORMULACION GENERAL

Consideramos la estabilidad según Liapunov de un sólido elástico monodimensional cuya ecuación variacional de movimientos es:

$$\alpha u_{xxxx} + Su_{xx} + Q\ddot{u}_x + k_1 u + k_2 \dot{u} + \beta \ddot{u} + \ddot{u} = 0, \\ \alpha > 0, \beta > 0, t \geq 0 \quad [1]$$

con las condiciones de contorno:

$$u(x, t) = u_x(x, t) = 0, x = 0, 1, t \geq 0$$

siendo $u(x, t)$ el desplazamiento a partir de la configuración (no perturbada) original.

En el caso general, los coeficientes en [1] dependen de x y t . Una gran cantidad de proble-

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 28 de febrero de 1985.

mas en elastomecánica está representada por esta ecuación, el tercero y quinto término representativos de fuerzas giroscópicas y no conservativas («follower forces»), respectivamente; el resto de los coeficientes se interpretan fácilmente como es usual.

3. CONDICIONES SUFICIENTES DE ESTABILIDAD SEGUN LIAPUNOV

Consideramos la estabilidad según Liapunov de la solución nula que satisface la ecuación [1] y las condiciones de contorno [2] y aplicamos el método directo tomando dos funciones de Liapunov.

3.1. Función de Liapunov $F_1(t)$

Sea la función de Liapunov

$$F_1(t) = \int_0^1 [1/2 (\alpha u_x^2) + \lambda u \dot{u} + 1/2 \dot{u}^2] dx$$

donde λ es la constante positiva.

a) En primer lugar, suponemos que los coeficientes de [1] son funciones reales acotadas de t , independientes de x .

Condiciones suficientes de estabilidad según Liapunov con respecto a las medidas $\rho_0 = F_1(0)$ y $\rho = \int_0^1 u^2 dx$ se obtienen de las desigualdades:

$$F_1(t) \gg c \int_0^1 u^2 dx$$

$$\dot{F}_1(t) \ll 0$$

para la función de t real, positiva y acotada, $c = c(t)$, o una constante positiva c .

Podemos escribir:

$$F_1(t) \gg \int_0^1 [1/2 (\alpha \pi^2 - S) \pi^2 u^2 + \lambda u \dot{u} + 1/2 \dot{u}^2] dx \quad [3]$$

con tal que $\alpha \pi^2 - S > 0$; $t \gg 0$

También tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{F}_1(t) = & \int_0^1 \{ 1/2 (\dot{\alpha} u_x^2 - \dot{S} u^2) - (Q \dot{u} \dot{u} + \\ & + \beta \dot{u}^2 + k_1 u \dot{u} + k_2 \dot{u} u_x) + \lambda [\dot{u}^2 - (\alpha u_x^2 - \\ & - (Q \dot{u} \dot{u} + \beta u \dot{u} + k_1 u + k_2 u u_x))] \} dx \ll \\ & \ll \int_0^1 \{ [1/2 (\dot{\alpha} \pi^2 - \dot{S}) + 1/2 |k_2| - \\ & \lambda (\alpha \pi^2 - S) + 1/2 \lambda |Q|] u^2 + (-\lambda k_1) u^2 + \\ & + (-k_1 - \lambda \beta) u \dot{u} + [-\beta + 1/2 |k_2| + \lambda + \\ & 1/2 |Q|] \dot{u}^2 \} dx = \int_0^1 (A u_x^2 + B u^2 + C u \dot{u} + \\ & + D \dot{u}^2) dx \end{aligned} \quad [4]$$

con tal que $1/2 \dot{\alpha} - \lambda \alpha < 0$. Hemos utilizado la igualdad

$$\int_0^1 Q \dot{u} \dot{u} dx = - \int_0^1 Q \dot{u} u_x dx$$

y aplicando la desigualdad de Schwarz a los términos $k_2 \dot{u} u_x$ y $Q \dot{u} u_x$.

Criterio.—La solución nula de [1] que satisface [2] es estable según Liapunov, para las condiciones indicadas, si se verifican las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} (\alpha \pi^2 - S) \pi^2 - \lambda^2 - 2c > 0 - 1/2 (\dot{\alpha} \pi^2 - \dot{S}) + \\ + \lambda (\alpha \pi^2 - S - 1/2 |Q|) - 1/2 |k_2| > 0, \\ - \lambda \alpha + 1/2 \dot{\alpha} < 0 \{ \pi^2 [- 1/2 (\dot{\alpha} \pi^2 - \dot{S}) + \\ + 4 \lambda (\alpha \pi^2 - S - 1/2 |Q|) - 1/2 |k_2|] + \\ + \lambda k_1 \} \cdot [\beta - \lambda - 1/2 (|k_2| + |Q|) - \\ - \frac{(k_1 + \lambda \beta)^2}{4}] > 0 \beta - \lambda - \\ - 1/2 (|k_2| + |Q|) > 0 \end{aligned}$$

para una constante positiva C y en todo instante $t > 0$.

Si $k_1 + \lambda \beta = 0$ las condiciones [5] serían:

$$\begin{aligned} (\alpha \pi^2 - S) \pi^2 - \frac{k_1^2}{\beta} - 2c > 0, k_1 > 0 \\ 1/2 (\dot{\alpha} \pi^2 - \dot{S}) + 1/2 |k_2| + \\ - \frac{k_1}{\beta} (\alpha \pi^2 - S - 1/2 |Q|) + \frac{1}{\pi^2 \beta} \ll 0 \quad [6] \\ - \beta - \frac{k_1}{\beta} + 1/2 (|k_2| + |Q|) \ll 0 \end{aligned}$$

b) En el caso más general en que los coeficientes de [1], excepto α , dependan de x y t , el análisis del apartado a) debe ser completado de acuerdo con las siguientes consideraciones.

I) Respecto a términos de $F(t)$, tenemos:

$$\int_0^1 (\alpha u_x^2 - S u^2) dx \gg (\alpha \pi^2 - S)_{\text{mín. } x(0,1)} \pi^2 \int_0^1 u^2 dx$$

con tal que

$$(\alpha \pi^2 - S)_{\text{mín. } x(0,1)} > 0, t > 0$$

Para términos de $\dot{F}_1(t)$, podemos escribir:

II)

$$\int_0^1 [(\dot{\alpha} - 2\lambda \alpha) u_x^2 - \dot{S} u^2] dx \ll [(\dot{\alpha} - 2\lambda \alpha) \pi^2 - \dot{S}]_{\text{máx. } x(0,1)} \pi^2 \int_0^1 u^2 dx$$

con tal que

$$\alpha - 2\lambda\alpha < 0, \quad [(\dot{\alpha} - 2\lambda\alpha)\pi^2 - S]_{k(0,1)}^{max} < 0$$

III) Tenemos que

$$\int_0^1 Q \dot{u}_x dx = - \int_0^1 Q_x \dot{u}^2 dx$$

y un término adicional debe ser introducido en el coeficiente de $\dot{u}^2$.

Similar para $\int_0^1 k_2 u u_x dx$ con respecto a u^2 .

IV) Si escribimos $\int_0^1 S u u_x dx = - \int_0^1 (S_x u u_x + S u_x^2) dx$, la desigualdad de Schwarz nos proporciona más términos en u^2 y u_x^2 .

De acuerdo con las consideraciones anteriores, las condiciones del apartado a) se pueden extender al caso general, con $\alpha = \alpha(t)$, añadiendo nuevos términos al coeficiente A, B, C, D de [4], debiendo verificarse las nuevas condiciones de estabilidad para todo punto $x \in (0,1)$ y $t > 0$.

3.2. La función de Liapunov $F_2(t)$

Escojamos una función de Liapunov algo diferente:

$$F_2(t) = \int_0^1 [1/2 (\alpha u_x^2 - S u_x^2) + \lambda (u^2 + \lambda (u^2 + \frac{2}{\beta} u \dot{u}) + 1/2 \dot{u}^2)] dx$$

y consideramos las medidas $\rho_0 = F_2(0)$ y $\rho = \int_0^1 u^2 dx$ como en 3.1.

a) Supongamos que $\alpha = \alpha(t)$ es una función real acotada y que los demás coeficientes son funciones reales acotadas de x y t , $x \in (0,1)$, $t > 0$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{F}_2(t) = \int_0^1 \left\{ \left[1/2 \dot{\alpha} - \frac{2\lambda\alpha}{\beta} + \lambda \left(\frac{2\alpha}{\beta} \right) + \lambda \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \right] u_x^2 + \left[-1/2 \dot{S} + \frac{2\lambda S}{\beta} + \lambda \left(\frac{2\alpha}{\beta} \right) + \lambda \left(\frac{S}{\beta} \right) + 1/2 |S_x| \right] u^2 + \left[1/2 Q_x - \beta + \frac{2\lambda}{\beta} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 1/2 |S_x| \Big] \dot{u}^2 + \left[-k_1 - \frac{2\lambda\beta}{\beta^2} + 2\lambda \left(\frac{Q}{\beta} \right) \right] u \dot{u} + \left(-k_2 + \frac{2\lambda Q}{\beta} \right) \dot{u} u_x + \\ &+ \left[-\frac{2\lambda k_1}{\beta} + \lambda \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) + \lambda \left(\frac{S}{\beta} \right) + \lambda \left(\frac{k_2}{\beta} \right) \right] u^2 \Big\} dx = \int_0^1 (M u_{xx}^2 + N u_x^2 + P \dot{u}^2 + \\ &+ Q u \dot{u} + R \dot{u} u_x + L u^2) dx \quad [7] \end{aligned}$$

Criterio.—La solución nula de [1] que satisfice [2] es estable según Liapunov para las condiciones indicadas si:

$$\begin{aligned} &(\alpha \pi^2 - S)_{x(0,1)}^{num} > 0, \quad (\alpha \pi^2 - S)_{x(0,1)}^{num} \pi^2 + \\ &+ \frac{2\lambda(\beta^2 - 2\lambda)}{\beta^2} - 2C > 0 \\ &-M > 0, \quad -M\pi^2 - N > 0, \quad (-M\pi^2 - N) \\ &\quad (1 - \mu)(-P) - 1/4 R^2 > 0 \quad [8] \\ &\mu(-P)(-L) - \frac{Q^2}{4} > 0, \quad 0 < \mu < 1 \end{aligned}$$

para una constante positiva C y para todo punto $X \in (0, 1)$ en todo instante $t > 0$.

O bien:

$$\begin{aligned} &(\alpha \pi^2 - S)_{x(0,1)}^{num} > 0, \quad (\alpha \pi^2 - S)_{x(0,1)}^{num} \pi^2 + \\ &+ \frac{2\lambda(\beta^2 - 2\lambda)}{\beta^2} - 2C > 0 \\ &-M > 0, \quad -M\pi^2 - N > 0, \quad [(-M\pi^2 - N)\pi^2 - \\ &\quad -L](-P) - 1/4 Q^2 > 0 \quad [9] \\ &\quad -P > 0, \quad R = 0 \end{aligned}$$

para una constante positiva C y para todo punto $X \in (0, 1)$, $t > 0$.

b) Si los coeficientes de [1] son constantes, los resultados se siguen inmediatamente de [8] y [9].

De [8], obtenemos:

$$\begin{aligned} &\alpha \pi^2 - S > 0, \quad 8(1 - \mu)\lambda(\beta^2 - 2\lambda)(\alpha \pi^2 - \\ &\quad - S) - \beta^2 \left(k_2 - \frac{2\lambda Q}{\beta} \right)^2 > 0 \quad [10] \\ &0 < \mu < 1, \quad 0 < k_1 < \frac{8\mu\lambda(\beta^2 - 2\lambda)}{\beta^2} \end{aligned}$$

En particular, si $\lambda = \frac{\beta}{4}$, $\beta = 1$:

$$\alpha\pi^2 - S > 0, \quad (1 - \mu) (\alpha\pi^2 - S) > \left(k_2 - \frac{Q}{2}\right)^2, \quad 0 < k_1 < \mu, \quad 0 < \mu < 1$$

De [9], obtenemos:

$$\alpha\pi^2 - S > 0, \quad 8\lambda (\beta^2 - 2\lambda) [(\alpha\pi^2 - S)\pi^2 + k_1] - \beta^2 k_1^2 > 0, \quad [11]$$

$$\beta^2 - 2\lambda > 0, \quad k_2 - \frac{2\lambda Q}{\beta} = 0$$

En particular, si $\beta = 1$, $\lambda = \frac{\beta}{4}$:

$$\alpha\pi^2 - S > 0, \quad (\alpha\pi^2 - S)\pi^2 + k_1 - k_1^2 > 0, \quad k_2 = \frac{Q}{2}$$

Observamos que [11] está implicado por las expresiones:

$$\alpha\pi^2 - S > 0, \quad k_2 (\beta Q - k_2) > \frac{k_1^2 Q^2}{(\alpha\pi^2 - S)\pi^2 + k_1} > 0, \quad \frac{\beta Q - k_2}{Q} > 0,$$

$$Q \neq 0, \quad 4\pi^2 (\alpha\pi^2 - S) (\alpha\pi^2 - S\pi^2 - 2C) + 4 (\alpha\pi^2 - S\pi^2 - 2C) k_1 + k_1^2 > 0$$

para una constante C, donde la segunda desigualdad relaciona todos los coeficientes de [1].

c) Podemos imponer condiciones de signo al coeficiente K_1 de [1] y obtener nuevos criterios. Suponemos que los coeficientes son constantes y $\beta = 1$, por simplicidad, y consideramos de nuevo la función de Liapunov $F_2(t)$.

I) Podemos escribir:

$$\dot{F}_2(t) \leq \int_0^1 \left\{ -\lambda (\alpha\pi^4 - S\pi^2 + k_1) \frac{u^2}{\pi^2} - \lambda (\alpha\pi^4 - S\pi^2 + k_1) u^2 - (1 - \mu) (1 - 2\lambda) \dot{u}^2 - \mu (1 - 2\lambda) \dot{u}^2 - k_1 u \dot{u} + (-k_2 + 2\lambda Q) \dot{u} u_x \right\} dx$$

con tal que $k_1 \leq 0$, $\alpha\pi^2 - S > 0$, $0 < \mu < 1$

Las condiciones suficientes de estabilidad son:

$$(1 - \mu) \lambda (1 - 2\lambda) (\alpha\pi^4 - S\pi^2 + k_1) - \frac{1}{4} k_1^2 > 0$$

$$\mu \lambda (1 - 2\lambda) (\alpha\pi^4 - S\pi^2 + k_1) -$$

$$- \frac{\pi^2}{4} (k_2 - 2\lambda Q)^2 > 0$$

$$k_1 \leq 0, \quad 0 < \lambda < 1/2, \quad 0 < \mu < 1$$

donde la segunda desigualdad relaciona todos los coeficientes de [1].

II) Observamos que:

$$\dot{F}_2(t) \leq \int_0^1 [-2\lambda (\alpha\pi^2 - S) u^2 - (k_2 - 2\lambda Q) \dot{u} u_x - (1 - 2\lambda) \dot{u}^2 - 2\lambda k_1 u^2 - k_1 u \dot{u}] dx$$

de modo que podemos considerar la función de Liapunov

$$F_2(t) = F_2(t) + 1/2 \int_0^1 k_1 u^2 dx$$

y las condiciones suficientes de estabilidad son:

$$\alpha\pi^2 - S > 0, \quad 2\lambda (1 - 2\lambda) (\alpha\pi^2 - S) - \frac{(k_2 - 2\lambda Q)^2}{4} > 0, \quad k_1 > 0 \quad [13]$$

En particular, para $K_1 = 0$, de [13] obtenemos:

$$\alpha\pi^2 - S > \frac{(k_2 - 2\lambda Q)^2}{8\lambda (1 - 2\lambda)}$$

Para $\lambda = 1/4$, que dé el máximo de $\lambda (1 - 2\lambda)$ y $Q = 0$, obtenemos un resultado conocido:

$$k_2^2 < \alpha\pi^2 - S$$

3.3. Estabilidad asintótica

Condiciones suficientes de estabilidad asintótica en el sentido de Liapunov con respecto a la medida se obtienen de las desigualdades:

$$\begin{aligned} \dot{F}_i(t) &\geq c_1 \rho & i = 1, 2 \\ \dot{F}_i(t) &\leq -c_2 \rho \end{aligned} \quad [14]$$

donde c_1 y c_2 son funciones de t reales positivas y acotadas, en particular constantes positivas.

De otra forma, estabilidad asintótica sigue de:

$$\dot{F}_i(t) \leq -c(t) \quad i = 1, 2 \quad [15]$$

para $c = c(t)$ una función de t real acotada, con tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [-c(t) dt] \leq -\varepsilon$, para una constante positiva ε .

Los resultados que se obtienen son similares a los de los apartados anteriores de estabilidad, apareciendo alguna constante positiva en algunos términos.

Por ejemplo, los resultados de [8] pueden transformarse en los siguientes:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha\pi^2 - S)_{\min_{x \in (0,1)}} > 0, (\alpha\pi^2 - S)_{\min_{x \in (0,1)}} \pi^2 + \\
 & + \frac{2\lambda(\beta^2 - 2\lambda)}{\beta^2} - 2c > 0, \\
 & -M - 1/2 c' \alpha > 0, \left(-M - \frac{c' \alpha}{2}\right) \pi^2 - \\
 & - \left(N - \frac{c' S}{2}\right) > 0, \quad [16] \\
 & \left[\left(-M - \frac{c' \alpha}{2}\right) \pi^2 - \left(N - \frac{c' S}{2}\right)\right] (1 - \\
 & - \mu) \left(-P - \frac{c'}{2}\right) - \frac{R^2}{4} > 0, \\
 & \mu \left(-P - \frac{c'}{2}\right) (-L - \lambda c') - \\
 & - \frac{\left(Q + \frac{2\lambda c'}{\beta}\right)^2}{4} > 0, \quad 0 < \mu < 1
 \end{aligned}$$

para unas constantes positivas c y c' y para todo punto $x \in (0, 1)$ en cada instante $t > 0$.

Nota.—En las secciones precedentes hemos adoptado la medida $\rho = \int_0^1 u^2 dx$. Ahora bien,

$$u^2 = \left(\int_0^1 u dx\right)^2 \leq x \int_0^1 u_x^2 dx \leq \int_0^1 u_x^2 dx.$$

en cuanto nos referimos a un sólido monodimensional y con las condiciones de contorno [2].

Tenemos por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 F_2(t) & \geq 1/2 (\alpha\pi^2 - S)_{\min_{x \in (0,1)}} \int_0^1 u_x^2 dx + \lambda \int_0^1 u^2 dx + \\
 & + \lambda \int_0^1 \left(u^2 + \frac{2u\dot{u}}{\beta}\right) dx - 1/2 \int_0^1 \dot{u}^2 dx \geq C \int_0^1 u_x^2 dx \\
 & \quad c > 0
 \end{aligned}$$

$$\text{con tal que } (\alpha\pi^2 - S)_{\min_{x \in (0,1)}} > 0 \text{ y } 0 < \lambda < \frac{\beta^2}{4}.$$

Vemos, pues, que condiciones suficientes de estabilidad según Liapunov se pueden obtener inmediatamente respecto a las medidas $\rho_0 = F_2(0)$ y $\rho = u^2$.

4. DIAGRAMAS DE ESTABILIDAD

Condiciones límites pueden ser obtenidas de las secciones precedentes y representadas en un espacio de tres ejes cartesianos rectangulares, resultando diagramas de estabilidad.

Supongamos que $\beta = 1$.

a) Sea $\alpha\pi^2 - S = T$.

En los ejes rectangulares cartesianos (k_2 , Q , T) las condiciones [13]_{1,2} corresponden a la región interior de la superficie envolvente de un continuo de cilindros parabólicos, tangentes al plano (k_2 , Q) a lo largo de la recta $k_2 = 2\lambda Q$, cuando λ varía de 0 a 1/2.

b) Las condiciones [11] se pueden representar en dos diagramas: uno en los ejes (k_1 , T) y otro en ejes (λ , Q , k_2), o $0 < \lambda < 1/2$; [11]₂ es la superficie interior de la curva envolvente de un continuo de parábolas, excluida la superficie por debajo del eje k_1 , y [11]₄ para los ejes (λ , Q , k_2) es la superficie de un cilindro hiperbólico.

c) Para $Q = 0$, $0 < \lambda < 1/2$, $10 < \mu < 1$ en los ejes (k_2 , k_1 , T), las condiciones [12] se representan por la región interior a la intersección de dos cilindros parabólicos y el plano $T = 0$, a las izquierdas del plano $k_1 = 0$.

En los ejes (k_2 , Q , T), la [12]₂, $k_1 < 0$ dado, representa la parte del semiespacio $T > 0$ interior a un cilindro parabólico, para valores dados de λ y μ entre los límites conocidos.

5. APLICACION

Consideramos el problema de una columna recta, cuya ecuación variable de movimiento alrededor de la posición recta es:

$$u_{xxxx} + Su_{xx} + \beta \ddot{u} + \ddot{u} = 0$$

con las condiciones de contorno:

$$u(x, t) = u_{xx}(k, t) = 0, \quad x = 0, 1, \quad t \geq 0$$

donde $S = P_0 + P_1 \cos \omega t$, siendo P_0 y P_1 constantes positivas.

Si consideramos la función de Liapunov $F_2(t)$, tenemos:

$$F_2(t) \gg (\pi^2 - P_0 - P_1 \cos \omega t) \pi^2 \int_0^1 u^2 dx + \lambda \int_0^1 \left(u^2 + \frac{2 u \dot{u}}{\beta} \right) dx + 1/2 \int_0^1 \dot{u}^2 dx$$

$$\dot{F}_2(t) \leq \left[-\frac{2\lambda}{\beta} \pi^2 + \frac{\omega l_1}{2} \sin \omega t + \frac{2\lambda(P_0 + P_1 \cos \omega t)}{\beta} \right] \pi^2 \int_0^1 u^2 dx + \left(-\beta - \frac{2\lambda}{\beta} \right) \int_0^1 \dot{u}^2 dx$$

Obtendremos las siguientes condiciones suficientes de estabilidad asintótica respecto a las medidas $\rho = \int_0^1 u^2 dx$ ($\rho = u^2$):

$$\pi^2 - P_0 - P_1 \cos \omega t > 0$$

$$\frac{2\lambda}{\beta} (\pi^2 - P_0 - P_1 \cos \omega t) - \frac{\omega l_1}{2} \sin \omega t > 0, \quad 0 < \lambda < \frac{\beta^2}{2}$$

para cada instante $t > 0$.

El resultado es: $\pi^2 - P_0 - P_1 > 0$

$$\omega^2 < \frac{16\lambda^2}{\beta^2 P_1^2} (\pi^2 - P_0)^2 - P_1^2, \quad 0 < \lambda < \frac{\beta^2}{2}$$

y la pulsación crítica resulta:

$$\omega_{crit}^2 = \frac{4\beta^2}{P_1^2} [(\pi^2 - P_0)^2 - P_1^2]$$

En particular si $P_0 = 0$ y $P_1 = \frac{p_0 \pi^2}{p}$, donde p_0 es la carga crítica de Euler para fuerza de compresión constante, tenemos:

$$\omega_{crit}^2 = \frac{4\beta^2}{p_0^2} (p^2 - p_0^2)$$

6. CONCLUSIONES

Las condiciones suficientes de estabilidad, según Liapunov obtenidas permiten estimaciones de los parámetros de carga.

Cuando la ecuación de movimiento [1] se reduce a los dos primeros términos, incluida disipación, obtenemos la conocida carga crítica de

Euler para el coeficiente del segundo término. La aparición del término $k_1 u$ y de las fuerzas giroscópicas y no conservativas modifican el valor de dicha carga.

A continuación hacemos algunas observaciones, pero sin olvidar que los criterios obtenidos son condiciones suficiente para ciertas funciones de Liapunov.

- Cuando no actúan fuerzas giroscópicas ni no conservativas (follower forces), valores positivos de k_1 nos proporciona la carga crítica de Euler, o mayor, según [11]. Valores negativos tienen un efecto desestabilizante.
- La presencia de fuerzas giroscópicas y no conservativas producen un efecto desestabilizante, excepto si el término que las contiene en [10], [12] y [13] se anula.

El efecto de k_1 es similar al del apartado anterior a). Si el término citado en el párrafo anterior se anula, cuando k_1 tome ciertos valores positivos da una carga crítica superior a la carga crítica de Euler.

La acción de las fuerzas no conservativas sobre la estabilidad, que puede ser estabilizante en ciertas condiciones, es objeto de un estudio posterior, por métodos distintos al del presente trabajo.

BIBLIOGRAFIA

- Leipholtz, H.: «Stability theory». Academic Press: New York and London, 1970.
- Knops, R. J., y Wilkes, E. W.: «Theory of elastic stability handbuch der physik», vol. VI/3. Springer, 1973.

Rafael Rodríguez Rebollo



Nacido el 2 de marzo de 1943 en Córdoba, doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, promoción 1967 y licenciado en Ciencias Físicas. Profesor agregado interino en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla hasta el año 1983, donde impartió clases de Mecánica. Actualmente, delegado de Transportes de Sevilla en Renfe.