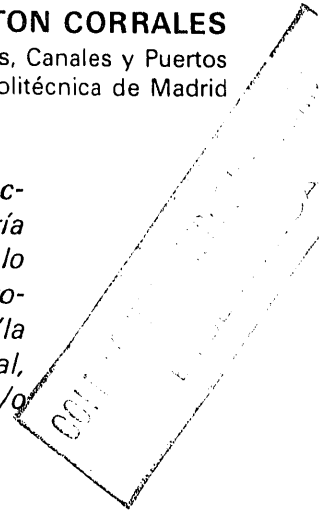


Ajuste absoluto de restituidores de fotogrametría: Uso de cuaternarios y vectores para las semejanzas en el espacio^(*)

Por J. M. ANTON CORRALES

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Catedrático Universidad Politécnica de Madrid

Mediante el uso de cuaternios para combinación de giros y de vectores para su cálculo efectivo se puede condensar con ventaja la teoría de hallar la semejanza que aproxima un modelo del plano a modelo interno de un restituidor de fotometría, lo que, convenientemente programado en un ordenador personal, permite hacer numéricamente "la orientación absoluta" con ganancia de tiempo sobre el ajuste manual, y con mayor sencillez de cálculo que por matrices ortogonales (y/o ángulos de Euler).



1. INTRODUCCION

Con las máquinas de calcular locales (micro-computadores o terminal) se pueden hacer inmediatamente los cálculos que permiten hallar la semejanza espacial o transformación de Hermert que hace coincidir un modelo con el terreno, referidas ambas a unos ejes ortonormales (**).

Ello permite, girando el modelo en el restituidor, ajustando su escala y desplazando el plano en la mesa de dibujo, el hacer **la orientación absoluta** necesaria para restituir de un par de fotos a planos, si previamente existe el modelo con visión estereoscópica, o sea, si se ha hecho «la relativa».

La absoluta suele requerir 1 hora de tanteos entre cuatro puntos, generalmente, en el solape del par de fotos.

Los cuatro puntos dan comprobación, pues la semejanza está definida por dos puntos y un dato a z conocidas x', y', z' de un tercero, por lo que un cálculo de ajuste conviene que opere por mínimos cuadrados.

(*) Trabajo realizado en el Servicio de Tecnología de la Dirección General de Carreteras.

(**) En restituidores modernos vendidos con calculadora conectada existen programas, facilitados por la casa que hacen diversos ajustes, incluida «la absoluta» en una configuración.

Son datos las coordenadas de P puntos ($P \gg 3$), sean $\bar{X}' = (x', y', z')$ (***) del modelo ($\bar{X}'_i$ para el punto i), y las $\bar{X}$ del plano x, y, z de esos puntos; un índice L es 1, salvo que sólo se conozca la z del plano, en cuyo caso es 0.

La incógnita es la transformación $\bar{X}' = \bar{f}(\bar{X})$ de plano a modelo, que depende de 7 incógnitas (3 de giro espacial, 3 de translación, 1 de escala).

Es conveniente expresarla de modo que se faciliten los cálculos posteriores, y usar más vectores o cuaternios (ref. 1) en vez de las matrices de paso en función de los ángulos de Euler.

En efecto, si se intenta efectivamente la transformación con las matrices ortogonales de que hablan los libros de topografía, se tienen dificultades al manejar matrices de 9 elementos, de los cuales sólo hay 3 independientes.

Como no hemos visto publicado dicho método, aunque es probable que lo esté en alguna revista extranjera que no conocemos, creemos útil divulgarlo, tanto por el aspecto geométrico de semejanza en el espacio como por el de su aplicación a la fotogrametría.

(***) La escala en z' (en z) debe ser la misma que en x', y' (en x, y). Si es preciso se multiplicará la cota leída por una relación de engranajes para obtener z' . En nuestro programa se puede calcular esa relación optimizando la escala vertical independientemente.

2. SEMEJANZA EN EL ESPACIO

A) Cuaternios

En el plano es muy fácil expresar una semejanza directa con complejos ($z' = az + b$) y operar con ellos. En el espacio se puede recurrir a cuaternios, elementos de R^4 que designamos como $(Q) = (a, \bar{A})$ con $A = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Se les asigna la suma $(a, \bar{A}) + (b, \bar{B}) = (a + b, \bar{A} + \bar{B})$ y el producto $(a, \bar{A}) \cdot (b, \bar{B}) = (ab - \bar{A}\bar{B}, a\bar{B} + b\bar{A} + \bar{A} \wedge \bar{B})$, donde $\bar{A} \cdot \bar{B}$ es producto escalar y $\bar{A} \wedge \bar{B}$ vectorial. El $(0, \bar{0})$ es el elemento neutro de la suma, y el $(1, \bar{0})$ del producto.

El conjugado de $(Q) = (b, \bar{B})$ es $(Q^*) = (b, -\bar{B})$, y se comprueba que $(Q) \cdot (Q^*) = (b^2 + \bar{B}^2, \bar{0})$, con lo que el inverso Q^{-1} de Q es el $(Q^*)/|Q|^2$, donde $|Q|$ designa el módulo de Q igual a la raíz positiva de $b^2 + \bar{B}^2$. Se comprueba que el conjugado del producto $(Q)(R)$ es el $(R^*)(Q^*)$, y que el de la suma $(Q + R)$ es $Q^* + R^*$.

Con ello se pueden comprobar fácilmente las propiedades del cuerpo no conmutativo, de unidad $(1, \bar{0})$.

B) Giro directo por cuaternios

Se designa el vector del plano por $(Y) = (0, \bar{Y})$, del modelo $(Y') = (0, \bar{Y}')$ y al vector giro por $Q = (1, \bar{A})$, o bien $(b, \bar{B})$. El $(0, \bar{0})$ no representa ningún giro.

Teorema: Se demuestra que la expresión

$$(Y') = (Q)(Y)(Q^{-1}) = (Q)(Y)(Q^*)/|Q|^2 \quad [1]$$

corresponde a un giro de eje $\bar{A}$ ($0, \bar{B}$) que no cambia si se multiplica Q por un número real, dependiendo por tanto de tres incógnitas; ese giro es de eje $\bar{A}$ (o $\bar{B}$), que no cambia si se multiplica Q por un número real, dependiendo por tanto de tres incógnitas; ese giro es de eje $\bar{A}$ (o $\bar{B}$), y de valor $\theta = 2 \arctg |A|$ [o bien $2 \arctg (|B|/|b|)$].

Hay dos casos:

- Si $b \neq 0$, $A = \bar{v} \cdot \operatorname{tg}(\theta/2)$, siendo $\bar{v}$ el vector del eje A y θ entre $-\pi$ y π , o bien entre 0 y π si orientamos $\bar{v}$ con el mismo sentido que $\bar{A}$.

- Si $b = 0$, es un giro de 180° respecto a eje $\bar{B}$ ($\theta = \pm \pi$). No hay representación $(1, \bar{A})$, porque $\bar{A} = \bar{v} \cdot \operatorname{tg}(\pi/2)$ se hace infinito.

Nota: Con 4 dimensiones el giro directo es función de 2 cuaternios (R) y (S) , por $(R)(t, x, y, z)(S)/(|R| \cdot |S|)$ y depende de 6 parámetros independientes.

Demostración

a) Por cálculo se observa que si $(Y) = (0, \bar{Y})$, resulta $(Q)(Y)(Q^*) = (b, \bar{B})(0, \bar{Y})(b, -\bar{B}) = (-\bar{B} \cdot \bar{Y}, b\bar{Y} + \bar{B} \wedge \bar{Y})(b, \bar{B})$; cuya parte real es nula por ser $(-b\bar{B}\bar{Y} + b\bar{B}\bar{Y} + \{\bar{B} \cdot \bar{B} \wedge \bar{Y}\})$, anulándose el producto mixto $\{\bar{B}\bar{B}\bar{Y}\}$. O sea, queda de la forma $(0, \bar{Y}')$.

La parte vectorial es $b^2\bar{Y} + 2b\bar{B} \wedge \bar{Y} + \bar{B} \wedge (\bar{B} \cdot \bar{Y}) + \bar{B} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{Y})$, y como $\bar{B} \wedge (\bar{B} \cdot \bar{Y}) = \bar{B}(\bar{B} \cdot \bar{Y}) - \bar{B}^2 \bar{Y}$, queda la expresión general vectorial del giro:

$$Y' = [\bar{Y}(b^2 - \bar{B}^2) + 2\bar{B}(\bar{B} \cdot \bar{Y}) + 2b\bar{B} \wedge \bar{Y}] / [b^2 + \bar{B}^2]$$

b) Esa expresión es lineal en $\bar{Y}$; corresponde a un desplazamiento si $|\bar{Y}'| = |\bar{Y}|$, lo que se comprueba mejor calculando con cuaternios $|\bar{Y}'|^2 = (Y')(Y'^*) = (QYQ^*)(QY^*Q^*)/|Q|^4 = (Y')(Y^*)$. [2]

Se puede comprobar que el desplazamiento es directo, calculando la matriz de la aplicación lineal (2), cuyo determinante Δ es $+1$ si es directo, -1 si es inverso.

Siempre podemos mantener $b^2 + \bar{B}^2 = 1$ al variar los giros, y entonces Δ es función continua de $(b, \bar{B})$ y no puede saltar de $+1$, valor que tenía para $(Q) = (1, 0)$ a -1 para $(Q) = (b, \bar{B})$.

c) Haciendo $(b, \bar{B}) = b(1, \bar{A})$, queda, si $b \neq 0$, la expresión:

$$\bar{Y}' = [\bar{Y}(1 - \bar{A}^2) + 2\bar{A}(\bar{A} \cdot \bar{Y}) + 2\bar{A} \wedge \bar{Y}] / (1 + \bar{A}^2) \quad [3]$$

De ella deducimos el valor del giro.

Para ello se toma $\bar{Y}$ perpendicular a $\bar{A}$ ($\bar{A} \cdot \bar{Y} = 0$) versor ($\bar{Y}^2 = 1$) y se halla el producto escalar $\bar{Y}' \cdot \bar{Y} = (1 - \bar{A}^2)/(1 + \bar{A}^2)$ que se identifica

on la fórmula $\cos \theta = (1 - \operatorname{tg}^2 \theta/2)/(1 + \operatorname{tg}^2 \theta/2)$, comprobándose en la figura 1 que el sentido del giro de eje orientado según $\bar{A}$ es entre 0 y π , lo que orienta el giro.

d) Si $b = 0$, la fórmula es

$$\bar{Y}' = [-\bar{Y} \cdot \bar{B}^2 + 2\bar{B}(\bar{B}\bar{Y})]/|\bar{B}^2| \quad [4]$$

o bien

$$\bar{Y}' = -\bar{Y} + 2\bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{Y}) \text{ con } \bar{v} = \bar{B}/|\bar{B}|,$$

siendo fácil hallar como antes $\bar{Y}\bar{Y}'$ si $\bar{v}\bar{Y} = 0$, quedando $\bar{Y}\bar{Y}' = -\bar{Y}^2$, lo que demuestra que se trata de un giro de eje $\bar{v}$ y ángulo π .

Interpretación geométrica

Para el giro [4] queda la figura 1, para el giro [3], la figura 2, referida a los ejes $\bar{A}$, $\bar{Y}$, $\bar{A}\bar{Y}$.

Observación

Los productos vectoriales de [3] y [4] requieren que los vectores multiplicados ($\bar{A}$ e $\bar{Y}$) se expresen por coordenadas respecto a los mismos ejes ortogonales.

Cambio de sistema

Si se refiere un mismo punto M a dos sistemas ortogonales, resultando los vectores de coordenadas $\bar{Y}$ e $\bar{Y}'$, las fórmulas anteriores resultan válidas, si $\bar{A} = \bar{v}\operatorname{tg}(\theta/2)$ representa el giro que lleva los ejes de $\bar{Y}'$ a $\bar{Y}$.

Se observa que el vector de giro $\bar{A}$ tiene las mismas coordenadas (a, b, c) respecto a ambos sistemas de coordenadas. Las ecuaciones son análogas a [3] y a [4].

C) Semejanza

Es un giro, seguido de una homotecia m (será $m = 0$) y de un desplazamiento $\bar{E}$.

Lleva del punto $(X) = (0, x, y, z) = (0, \bar{X})$ del plano al $(\bar{X}') = (0, x', y', z') = (0, \bar{X}')$ del modelo.

Lleva $(E) = (0, \bar{E}) = (0, e, f, g)$ el desplazamiento del modelo.

La notación más abreviada es $\bar{X}' = f(\bar{X})$, que en cuaternarios da

$$\bar{X}' = m(Q)(X)(Q)^*/|Q|^2 + (E); \bar{X}' = f(\bar{X}) \quad [5]$$

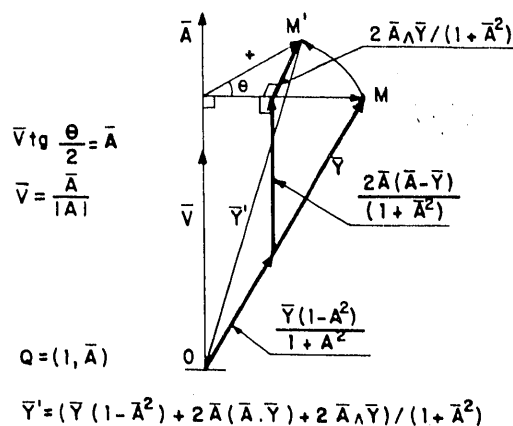
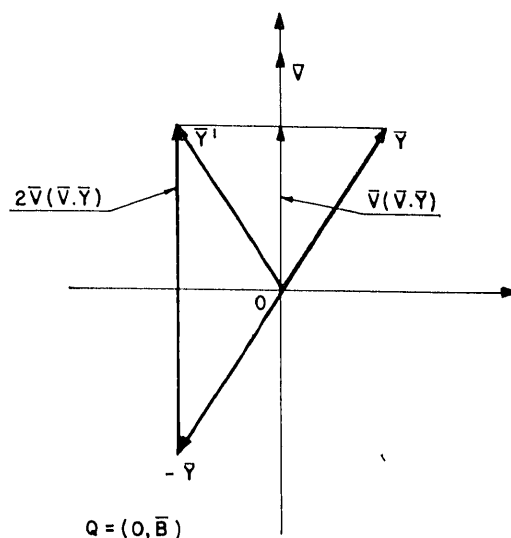


FIGURA 1 - GIRO EJE $\bar{A}$

$$Y' = (QYQ^*)/(|QQ^*|)$$



SIMETRIA RECTA $\bar{V}$

$$\bar{Y}' = -\bar{Y} + 2\bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{Y}); \bar{v} = \bar{B}/|\bar{B}|$$

FIGURA 2

$$Q = (b, \bar{B}); \bar{Y}' = [\bar{Y}(b^2 - \bar{B}^2) + 2\bar{B}(\bar{B} \cdot \bar{Y}) + 2b(\bar{B} \wedge \bar{Y})]/(b^2 + \bar{B}^2)$$

CASO GENERAL

2) Es obvio que podemos quitar el m y el $|Q|^2$ y queda una expresión útil general de la semejanza

$$X' = QXQ^* + E, \text{ con } Q = (b, \bar{B}), \quad [6]$$

de razón $m = b^2 + \bar{B}^2$, expresión muy general.

3) Para el cálculo hemos tomado para sim-

plificar cálculos intermedios:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= m\bar{X}, \text{ homotecia positiva,} \\ (Y') &= (Q) (Y) (Q)^* / |Q|^2, \\ \text{giro directo para el que adoptamos el símbolo } \bar{g}, \bar{Y}' &= \bar{g} (\bar{Y}), \\ \bar{X}' - \bar{E} &= \bar{Y}', \text{ traslación.} \end{aligned} \quad [7]$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la [5]; la segunda de ellas es la [3] en notación de cuaternios.

D) Efectos de un cambio «infinitesimal» en el giro del versor $\bar{v}$ (eje $\bar{v}$) y ángulo θ (entre 0 y π).

Según la fórmula [7]: $X' = m Q X Q^{-1} + E$; llamamos Z a $Y' = X' - E = (Q, \bar{Z})$. Es mejor tomar Q unitario igual a $[\cos(\theta/2), \bar{v} \sin(\theta/2)]$ según II-B, con lo que $Q^{-1} = Q^* = [\cos(\theta/2), -\bar{v} \sin(\theta/2)]$, $|Q| = 1$.

Al ser $|\bar{v}| = 1$, $d\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$.

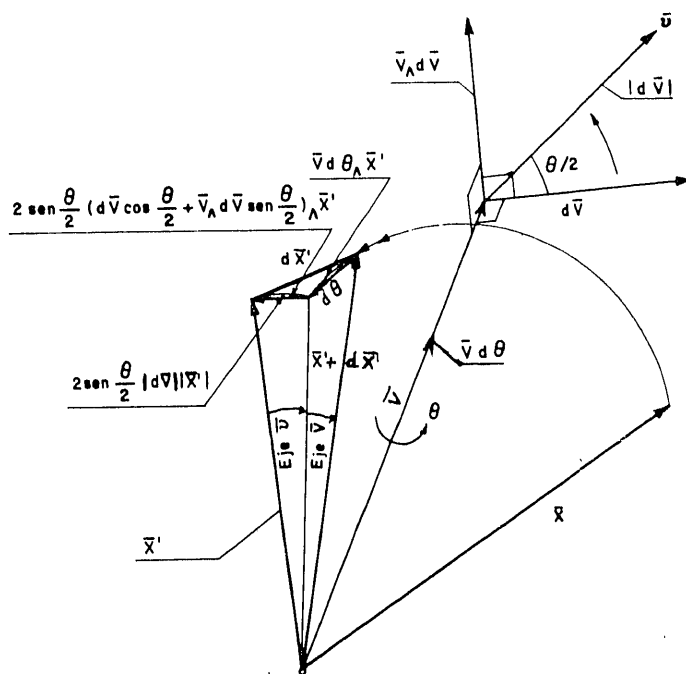


Fig. 3.—Efecto de una variación ($d\theta$, $d\bar{v}$) del giro (θ , $\bar{v}$).

Diferenciando la fórmula de giro:

$$dX' = d m (QXQ^{-1}) + dE + m d(QXQ^{-1}).$$

El primer término es un incremento de la longitud de Z ; el segundo, una traslación, pero el

tercero es más curioso, porque no se ve su forma geométrica.

Como

$$d(QXQ^{-1}) = dQ \cdot X \cdot Q^{-1} + Q \cdot X \cdot d(Q^{-1}),$$

calculamos:

$$\begin{aligned} dQ \cdot X \cdot Q^{-1} &= dQ \cdot Q^{-1} (QXQ^{-1}) = dQ Q^{-1} (Z/m) \\ &= (Q \cdot X^* \cdot dQ^*)^* = -(Q \cdot X \cdot dQ^*)^*, \end{aligned}$$

para lo que se calcula:

$$\begin{aligned} dQ \cdot Q^{-1} &= d \cdot \theta/2 (-\sin \theta/2, \bar{v} \cos \theta/2) \\ &+ (\cos \theta/2, -\bar{v} \sin \theta/2) + [0, d\bar{v} \cdot \sin \theta/2] \\ &= d \cdot \theta/2 (0, \bar{v} + [0, (d\bar{v} \cos \theta/2 - \bar{v} \sin \theta/2 - d\bar{v} \cdot \bar{v} \sin^2 \theta/2 \sin \theta/2 \cdot \bar{Z})], \end{aligned}$$

que por no tener parte real es igual a $m d(QXQ^{-1})$ y a su conjugado opuesto $m(QXdQ^*)$. Por lo que el término tercero buscado es:

$$\begin{aligned} m \cdot d(Q \cdot X \cdot Q^{-1}) &= d\theta (0, \bar{v} \cdot \bar{Z}) + [0 (d\bar{v} \cdot \cos \theta/2 + \bar{v} \cdot d\bar{v} \sin \theta/2) 2 \sin \theta/2 \cdot \bar{Z}] \end{aligned}$$

Como $\bar{w} \cdot \overline{OM} dt$ es giro de punto M de eje $\bar{w}$ por θ , valor $|\bar{w}| dt$ (válido únicamente para giros «infinitesimales» que se suman), queda descompuesta la variación ($d\bar{v}$, $d\theta$) del giro en dos giros infinitesimales a sumar al inicial infinito:

- Uno de eje $\bar{v}$, valor $d\theta$, influencia de la variación de θ que únicamente incrementa el giro alrededor de θ .
- Otro de eje $d\bar{v} \cos(\theta/2) + \bar{v} \cdot d\bar{v} \sin(\theta/2)$, es decir, $d\bar{v}$ girando $\theta/2$ alrededor de $\bar{v}$. Su amplitud es $2|d\bar{v}| \sin(\theta/2)$.

El que $d\bar{v}$ quede girado $\theta/2$ es muy curioso y puede ser interesante en consideraciones sobre el espacio, físico (spin), etcétera.

3. AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS

A) Lagrangiano

Si $\bar{X}_{ci}$ son puntos conocidos del modelo y $\bar{X}_{ci}$, puntos conocidos del plano, y damos a los errores en modelo peso η y en el plano ε , habría que minimizar una suma ponderada de errores en plano y en modelo:

$$L \equiv \eta \sum_i [X_{ci} - \bar{f}(\bar{X}_i)]^2 + \varepsilon \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X}_{ci})^2, \quad [8]$$

onde en el segundo sumando se omiten las $(x - x_c)^2$ e $(y - y_c)^2$ cuando no se conocen x_c e y_c (o sea, si $L = 0$), usándose $\sum'$ en vez de $\sum$ para expresar esa falta de sumandos.

Después de tanteos se ha prescindido del segundo sumando, lo que veremos que equivale a hacer ε grande frente a η , razonando que errores en el espacio debe dar igual que sean en modelo o en plano, tomando $(x = x_c, y = y_c)$ si $L = 1$, y en todo caso $z = z_c$. Si $L = 0$ es preciso calcular (x, y) por faltar (x_c, y_c) . Quedaría el lagrangiano:

$$L' \equiv \sum [\bar{X}_i' - f(\bar{X})]^2 \quad [8 \text{ bis}]$$

donde $\bar{X} = (x_c, y_c, z_c)$ si $L = 1$,

$$\bar{X} = (x, y, z_c) \text{ si } L = 0,$$

siendo incógnitas las (x, y) desconocidas y los siete parámetros que definen f .

B) Centroide

Se refieren, previamente al cálculo, las coordenadas $\bar{X}_i$ e $\bar{X}_i'$ a los centros de gravedad o centroides $\bar{X}_g$ e $\bar{X}_g'$ de los puntos con que se ajustan.

$$\text{O sea, } \sum' \bar{X}_i = (\sum' \bar{X}_g) \quad ; \quad \sum_{i=1}^p \bar{X}_i' = p \bar{X}_g'$$

En este cálculo se prescinde de los sumandos en $\bar{X}_c$ en los que $L = 0$.

Esta elección de origen al centroide mejora la precisión y rapidez del cálculo numérico.

Nota: Con ello quedará $\bar{E}$ muy pequeño y, si todos los L son 1, o sea, si los puntos son conocidos en x, y, z , caso muy general, queda $\bar{E}$ nulo (apartado D), 2)].

Es preciso que haya al menos dos puntos con $L = 1$ para poder definir la transformación; en caso contrario las ecuaciones son indeterminadas. En nuestro programa los dos primeros puntos serán conocidos, o sea, $L_1 = 1, L_2 = 1$.

C) Incógnitas y ecuaciones

Hay 7 incógnitas: $\bar{E} = (e, f, g)$, m ; $\bar{A} = (a, b, c)$.

Además, para todo punto en el que $L = 0$, x, y, z son incógnitas.

Las ecuaciones se obtienen derivando L respecto a las incógnitas. Aunque con este planteamiento se ha evitado el uso engorroso de variables de Lagrange y de senos y cosenos de ángulos de Euler, las ecuaciones no son lineales, por lo que se resuelven por iteración.

1) Primero se calculan aproximadamente las incógnitas. En nuestra aplicación $\bar{E} = 0$, por haber tomado orígenes auxiliares (centroides), y por ser fotogrametría aérea se pueden tomar $a_0 = b_0 = 0$. Para c y m se calcula la semejanza plana ($z' = a'z + b'$ con $a' = m \cdot e^{i\theta}$ y b' prácticamente 0) que lleva los dos primeros puntos sobre los otros dos.

Los cálculos, son:

$$z = x_c + iy_c \text{ (plano)} \quad ; \quad z' = x_c' + iz_c' \text{ (modelo)}$$

$$m = |z_2' - z_1'| / |z_2 - z_1| =$$

$$= \arg [(z_2' - z_1') / (z_2 - z_1)]$$

$$c_0 = \lg (\theta/2)$$

Los valores de m y c son iniciales para las iteraciones.

2) Se calculan los x_i, y_i, z_i minimizando L en esas variables.

3) Se calcula m , minimizando L en esas variables.

4) Se calcula $\bar{A} = (a, b, c)$, minimizando L en (a, b, c) .

5) Se calcula $\bar{E} = (e, f, g)$, minimizando L en (e, f, g) .

Se repite de 2 a 5 iterativamente. Como en cada paso se reduce L que es positivo, el proceso es monótono y convergente hacia el mínimo de L , si éste existe para valores finitos de las variables (a demostrar la convergencia).

D) Ecuaciones

Es preciso desarrollar el primer sumando del Lagrangiano L de [8]; es $\sum [\bar{X}_i' - \bar{f}(\bar{X})]^2 \equiv L'$

Con las fórmulas [7] queda ese sumando

$$\sum [\bar{Y}' - \bar{g}(\bar{Y})]^2 = \sum \bar{Y}'^2 + [\bar{g}(\bar{Y})]^2 - 2\bar{Y}' \cdot \bar{g}(\bar{Y}).$$

Aquí es más cómoda la notación vectorial.

En esa fórmula $\bar{Y}'^2$ no depende de las variables, y $[\bar{g}(\bar{Y})]^2$ por ser $\bar{g}$ desplazamiento de vectores, es $\bar{Y}'^2$, y el otro término

$$\bar{Y}' \cdot \bar{g}(\bar{Y}) \text{ es } U(\bar{A}) \equiv \bar{Y}' \cdot [\bar{Y} (1 - \bar{A}^2) + 2\bar{A} \cdot (\bar{Y}\bar{A}) + 2\bar{A} \cdot \bar{Y}]/(1 + \bar{A}^2) \quad [10]$$

Para obtener las ecuaciones derivando el Lagrangiano, conviene volver a escribir resultados anteriores, a fin de poder seguir cómodamente los cálculos que seguirán:

Se ha de minimizar

$$L = \eta \sum [\bar{Y}'^2 + \bar{Y}'^2 - 2\bar{Y}' \cdot \bar{g}(\bar{Y})] + \varepsilon \sum' (\bar{X}_i - \bar{X}_{ci})^2 \quad [11]$$

siendo L' la expresión entre corchetes $\sum []$, donde

$$\bar{Y}'_i = \bar{X}'_i - \bar{E}, \quad \bar{Y}'_{ci} = \bar{X}'_{ci} - \bar{E}, \\ \bar{Y}_i = m\bar{X}_i, \quad \bar{Y}_{ci} = m\bar{X}_{ci}.$$

omitiéndose en $\sum'$ sumandos en x, y , si $L = 0$, y siendo

$$\bar{g}(\bar{Y}) = [\bar{Y} (1 - \bar{A}^2) + 2\bar{A}(\bar{A}\bar{Y}) + 2(\bar{A} \cdot \bar{Y})]/(1 + \bar{A}^2)$$

Se observa que $\bar{g}^{-1}(\bar{Y}') =$

$$= [\bar{Y} (1 - \bar{A}^2) + 2\bar{A}(\bar{A} \cdot \bar{Y}) - 2(\bar{A} \cdot \bar{Y})]/(1 + \bar{A}^2)$$

porque $\bar{g}^{-1}$ es el giro opuesto al giro $\bar{g}$.

A continuación se pueden hacer iterativamente los cálculos 2), 3), 4), 5) indicados en C, anulando en cada paso la derivada del Lagrangiano respecto a las variables que se calculan en dicho paso.

2) Cálculo de x, y, z

Sea α_i una de esas variables x_i, y_i, z_i .

Las ecuaciones se obtienen derivando L respecto de α_i . Se observa primero que $\bar{Y}' \cdot \bar{g}(\bar{Y})$, producto escalar de dos vectores, se conserva por giro $\bar{g}^{-1}$ y es $\bar{Y}' \cdot \bar{g}^{-1}(\bar{Y}')$, con lo que $\partial L / \partial \alpha_i = \eta$

$$[\alpha_i m^2 - m \cdot \text{Componente } \alpha_i \text{ de } \bar{g}^{-1}(\bar{Y}_{ci})] +$$

$$+ \varepsilon'(\alpha_i - \alpha_{ci}) = 0$$

donde

$$\varepsilon' = \varepsilon \text{ si } L_i = 1, \text{ o si } \alpha_i = z_i;$$

y donde

$$\varepsilon' = 0 \text{ si } L_i = 0 \text{ y si } \alpha_i \text{ es } x_i \text{ o } y_i; \alpha_{ci} \text{ es } x_{ci}, y_{ci},$$

o bien z_{ci} , según sea α_i, x_i, y_i o z_i .

Queda, pues:

$$\alpha_i = [\eta \text{ Componente } \alpha_i \text{ de } \bar{g}^{-1}(\bar{Y}_{ci}) m + \varepsilon' \cdot \alpha_{ci}] / (m^2 \eta + \varepsilon') \quad [12]$$

Resulta que:

Si $L = 0$, $\alpha_i = x_i$, o y_i , se toman las x_i, y_i de $\bar{g}^{-1}(\bar{Y}_{ci})$.

En caso contrario se hace una media de pesos $m^2 \eta, \varepsilon$ de $\text{Comp}_{\alpha_i} [m^{-1} \bar{g}^{-1}(\bar{Y}_{ci})]$ y de α_{ci} . Aquí parece que se puede optar por tomar α_i , lo que equivale a tomar ε grande respecto a η , o sea, a ajustar los puntos obtenidos al plano y a buscar los errores en el modelo. Tiene sentido si los puntos teóricos del plano están dados con precisión; favorece la convergencia rápida.

En nuestra aplicación se toma, pues, $\bar{X}_i = \bar{X}_{ci}$, salvo para coordenadas desconocidas de $\bar{X}_{ci}$, en las que se toman las de $\bar{f}^{-1}(\bar{X}_{ci})$.

Nota: Se observa que no se puede hacer ni $\eta = 0$ ni $\varepsilon = 0$ sin perder la posibilidad de ajuste (por falta total de precisión).

Sí se puede hacer ε grande (significa darle a los puntos en plano mucha precisión).

3) Cálculo de m

En L de [11] m figura únicamente en L' a través de $\bar{Y}_i = m\bar{X}_i$.

La ecuación es:

$$\partial L' / \partial m = 2 \sum [m\bar{X}_i^2 - \bar{Y}'_i \cdot \bar{g}(\bar{X}_i)] = 0; \quad m = [\sum \bar{Y}'_i \cdot \bar{g}(\bar{X}_i)] / (\sum \bar{X}_i^2)$$

4) Cálculo de $\bar{A} = (a, b, c)$

Figuran únicamente en

$$U(\bar{A}) \equiv \sum \bar{Y}'_i \cdot \bar{g}(\bar{Y}_i) = \sum [(\bar{Y}_i \cdot \bar{Y}'_i) (1 - \bar{A}^2) + 2(\bar{A} \cdot \bar{Y}'_i) (\bar{A} \cdot \bar{Y}_i) + 2(\bar{A} \cdot \bar{Y}_i \cdot \bar{Y}'_i)] / (1 + \bar{A}^2) \equiv W / (1 + \bar{A}^2). \quad [13]$$

Para minimizar esta expresión, puede usarse cualquier algoritmo eficiente de minimización. Bastó hacer $\bar{V}_{Au} = 0$ (o $\bar{V}_{Aw} - 2u\bar{A} \cdot \bar{V}_A + A = 0$) iterando:

$$\bar{A}_0 = (0, 0, c_0); \quad \{\bar{Y}\} \oplus (\bar{Y}') + \{\bar{Y}\} \oplus (\bar{Y}') - (U(\bar{A}) + \bar{Y} \cdot \bar{Y}') (\text{Identidad}) \{\bar{A}_{i+1}\} = \bar{Y} \cdot \bar{Y}'$$

Es curioso el hecho de que, por ser U proporcional a m, el resultado del caso 4) no depende de m.

5) Cálculo de $\bar{E} = (e, f, g)$

En [11] resulta que $\bar{E}$ figura únicamente en $\bar{Y}'$, centro de L' ; $\bar{V}_e L' \equiv 2 \sum_i [-\bar{Y}'_{ic} + \bar{g}(\bar{Y}_i)] = 0$, quedando al derivar

$$\bar{E} = \sum_i [\bar{X}'_{ic} - \bar{g}(\bar{Y}_i)] / P.$$

Se observa que $\sum_i \bar{g}(\bar{Y}_i) = m\bar{g}(\sum_i \bar{X}_i)$.

O sea, que el centro de gravedad del plano se transformará en el centro de gravedad del modelo.

En el modelo, el centroide o centro de coordenadas auxiliar tomado es el centro de gravedad de los puntos $\bar{X}'_{ic}$, por lo que $\sum_i \bar{X}'_{ic} = 0$.

Si todos los L son 1, lo que ocurre cuando se dan x, y, z de todos los puntos del plano, resulta también que $\sum_i \bar{X}_{ic} = 0$ por ser el origen o centroide el centro de gravedad. Entonces si se han tomado en [d), 2)] $\bar{X}_i = \bar{X}'_{ic}$ es inmediato que $\sum_i \bar{X}_i = 0$.

En caso contrario, resultan de la expresión [12] con $\varepsilon' = \varepsilon$, $\sum_i \bar{Y}'_{ic} = \sum_i \bar{Y}_{ic} - \sum_i \bar{E}$ unas ecuaciones lineales en $\bar{E}$.

$$\sum_i \bar{E} = \sum_i \bar{X}'_{ic} - [\eta (\sum_i \bar{X}'_{ic} - \sum_i \bar{E}) m - \varepsilon \cdot \bar{f} (\sum_i \bar{X}'_{ic})] / (\eta m^2 + \varepsilon).$$

no singulares si $\varepsilon \neq 0$, de segundo miembro 0. En ambos casos $\bar{E} = 0$, lo que simplifica los cálculos considerablemente al no ser preciso hacer el paso [5], disminuyendo además el número de iteraciones.

Si los L no son todos 1, no es 0 el resultado final en $\bar{E}$, como se ha comprobado.

En ese caso, por repetición iterativa de [2] a [5] donde [4] es a su vez iterativo, se obtienen los valores de $\bar{A} = (a, b, c)$ m y $\bar{E} = (e, f, g)$, proceso que converge bastante bien según se ha visto; si $\bar{E} = 0$, al ser todos los puntos del plano conocidos en sus tres coordenadas, la convergencia es muy rápida.

La práctica numérica ha aconsejado el orden 2), 3), 4), 3) al efectuar las iteraciones.

Es obvio que se puede mejorar el algoritmo de minimización de L en [8], con convergencia más rápida.

Si los L son todos 1 y si en 2) hacemos $\bar{X}_i = \bar{X}'_{ic}$, ocurre que podemos hacer 4) y luego 3), obviándose 5) por ser $\bar{E} = 0$, siendo el cálculo muy rápido en una sola pasada (salvo «4»), que es iterativo y de eficiencia sorprendente).

4. UTILIZACION DE LA TRANSFORMACION

Hemos obtenidos una transformación $\bar{X}' = f(\bar{X})$ del tipo ($X' = (O, \bar{X}')$, $X = (O, \bar{X})$,

$$\bar{X}' = m (QXQ) / |Q|^2 + \bar{E}, \quad \bar{X}' = f(\bar{X}) \quad [14]$$

con $Q = (1, \bar{A})$.

A) Restricciones

La única restricción es la del giro respecto una recta, caso en el que $\bar{A}$ se haría infinito.

En fotogrametría aérea esto proviene del giro del plano respecto a las fotos (el Norte del plano está en las y negativas del modelo), y se arregla distinguiendo dos casos:

- a) Caso normal: Sea $R = (1, 0, 0, 0)$.
- b) Caso giro en el plano ($x_a = x$, $y_a = y$). Sea entonces $R = (0, 0, 0, 1)$ cuaternio representando giros de eje z.

La distinción entre ambos casos se podría haber hecho al calcular aproximadamente θ en 3, C), 1), corrigiendo entonces los datos del plano antes de hacer las iteraciones, es decir, una vez el origen en el centroide, se puede pasar de $\bar{X}_i$ a $-\bar{X}_i$. Como el procedimiento iterativo de 3, C) es bien robusto, no es en general necesario.

Sin embargo, sí lo es en los métodos menos robustos que siguen. Por lo que se calcula $\theta = 2 \arctg |A|$ ($0, \pi$) y si $|\theta| < \pi/2$ se supone el caso a) (es lo mismo que $|A| < 1$).

En caso contrario ($\pi/2 < \theta < \pi$, o sea, $A > 1$) se supone el caso b).

B) Descomposición de la transformación en giros según los ejes

El producto de desplazamientos «finitos» (no infinitesimales) se traduce en producto, no conmutativo porque cada giro altera las referencias de un sólido respecto a otro y de los giros, de cuaternios, $R, S, T...$

Es preciso adaptar los ejes y el orden de los giros a la realidad mecánica. En nuestro caso era un restituidor Wild A-8 (fig. 4).

1) **Mesa interna** (es más propia la expresión «modelo interno», pero aquí se presta a confusión; el Wild A-8 no permite dibujar internamente).

La referencia palpable del aparato es la **mesa interna**: en todo momento se pueden leer las coordenadas x'', y'', z'' [$\bar{X}'' = (x'', y'', z'')$, $X'' = (0, \bar{X}'')$] del punto virtual **interno** ligado a un sólido que se desplaza mediante unos husillos. Un sistema (EK-5 en este caso, electromecánico por ser antiguo), permite escribir x'', y'' ,

z'' en una máquina de escribir a voluntad. El eje x'' es a la derecha, y el y'' al frente, el z'' arriba, las graduaciones son en milímetros (figura 3); (x', y', z') son leídas en estas escalas.

2) Modelo fotogramétrico X'''

El «modelo (fotogramétrico)» es virtual y se forma al estar «orientadas relativamente» las fotos.

Para mover las fotos respecto a la mesa interna se dispone de unos giros medibles en unas escalas como (ϕ, ω, κ) en grados y con el cero en 100 grados.

El giro ϕ es según Oy''' . Sea S el cuaternio correspondiente $S = (1, 0, s, 0)$ con $s = \text{tg} [\pi(\phi - 100)/200]/2$.

Este giro mueve el «conjunto general» de las fotos respecto a la mesa interna.

Los giros w mueven las fotos respecto a di-

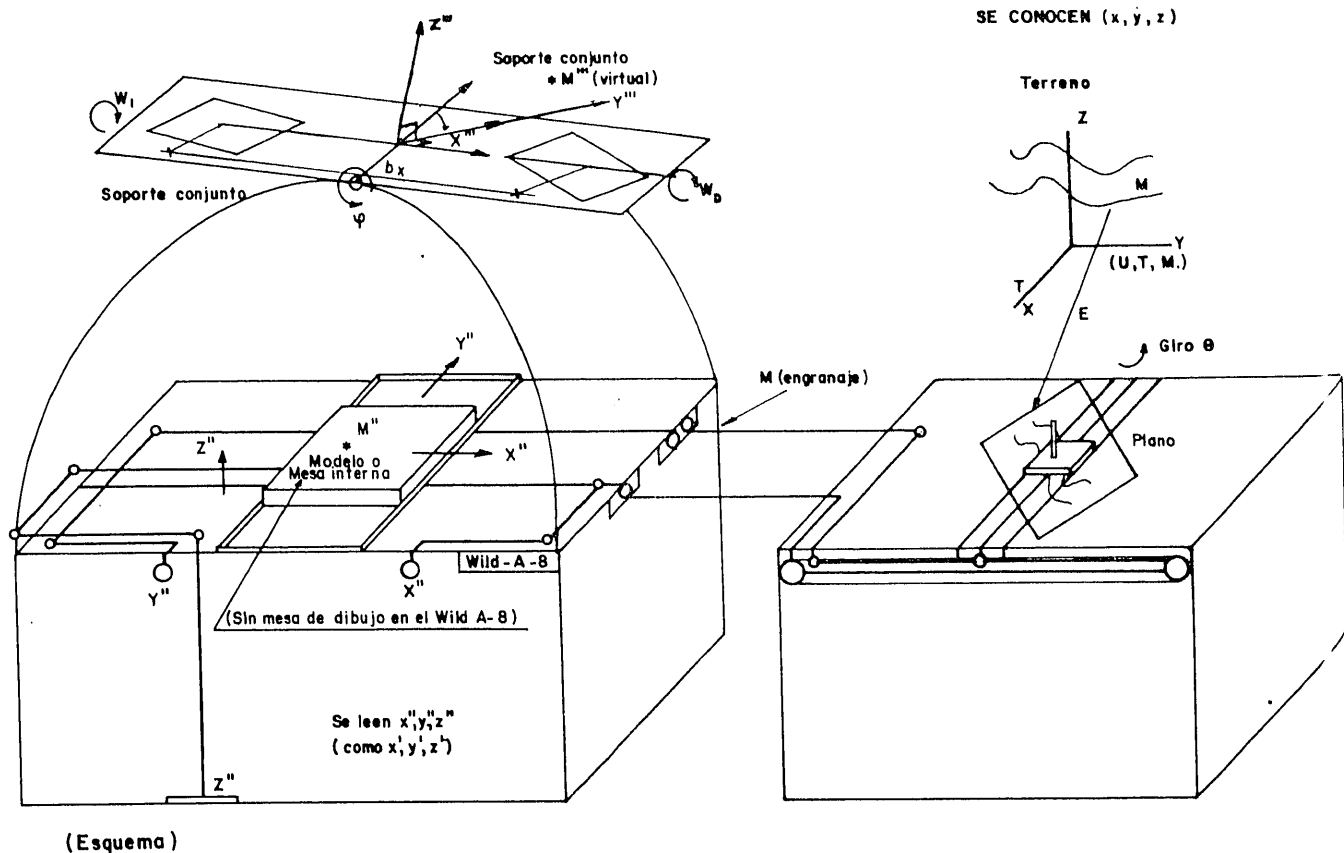


Figura 4.

cio conjunto, según el eje x del conjunto; son independientes a derecha e izquierda (w_r, w_d).

La separación de las fotos se denomina b_x (separación del modelo virtual de dos haces cónicos).

Al hacer el ajuste relativo aparece un «modelo virtual» ligado a las fotos, con valores iniciales $b_{x_0}, \omega_0, w_{d0}, \varphi_0$.

Si el operador ve la «marca» en un punto del terreno, a este punto le corresponde $\bar{X}''$ en la mesa interna, pudiéndose leer, o escribir, x'', y'', z'' .

Vamos a escoger unos ejes ligados a las fotos $\bar{X}'''$, girados w (desconocido, pequeño) según Ox respecto al «conjunto general», de valor inicial w_0 .

Si expresamos los giros en cuaternios con

$$t = \text{tg} [(\pi(w - 100)/200)/2],$$

$$T = (1, t, 0, 0),$$

$$T_0 = (1, t_0, 0, 0),$$

resulta que

$$X''' = T \cdot S \cdot X'' \cdot S^{-1} \cdot T^{-1}$$

La escala del modelo virtual es proporcional a una distancia b_x entre fotos, con un valor inicial b_{x_0} . Hace pasar de la escala de las fotos (1 : 5.000, por ejemplo) a la del modelo (1 : 3.000) y es aproximada porque la escala de las fotos lo es.

Hay algunos otros efectos geométricos en el restituidor, de los que prescindiremos por su mayor complicación y menor cuantía.

Asimismo se prescinde de traslaciones por suponer que el origen es el de intersección de ejes de giro.

Entonces medimos coordenadas X'_i del modelo virtual respecto a los ejes internos [$S_0 = (1, 0, 0, 0)$]:

$$X'_i = T_0 \cdot S_0 \cdot X'_i \cdot S_0^{-1} \cdot T_0^{-1} \quad [15]$$

3) Plano y realidad X

Los puntos deberán ser trasladados al plano de escala E (1 : 1.000, por ejemplo) mediante unos engranajes de «razón» M (1/3, por ejem-

plo). Conocemos de hecho los puntos del terreno en metros X_i . Para ello hace falta:

- Un giro de eje z de cuaternio $(1, 0, 0, u) = U$, $u = \text{tg} (\text{giro}/2)$,
- Un cambio de escala, y
- Una traslación, siendo los puntos internos X_i'' y del plano X_i ligados por

$$X_i'' = U \cdot X_i \cdot U^{-1} (1.000 \cdot E \cdot M) + B$$

$$B = (0, b_1, b_2, b_3) \text{ es traslación} \quad [16]$$

Los valores de U y de B pueden ignorarse si se fijan, hecho el ajuste relativo, dos puntos del plano gráficamente, de modo que correspondan al modelo, o sea, girando y trasladando el plano en la mesa de dibujo hasta que coincidan (que es lo que hacen en este Wild A-8).

4) Corrección en ω, φ

Pero los puntos X_i'' no pueden coincidir con los X'_i , a menos que se den unos giros $\Delta\omega, \Delta\varphi$ a las fotos (respecto a los ceros de las escalas de cuaternios T, S) y una corrección de escala $N = b_{x_0}/b_x$:

$$X_i''' = T \cdot S \cdot X_i'' \cdot S^{-1} \cdot T^{-1} \cdot N \quad [17]$$

La transformación resultante de [15] a [17] de los X_i a X_i''' , o sea, $X_i' = S_0 \cdot T_0^{-1} \cdot T \cdot S \cdot U \cdot X_i \cdot U^{-1} \cdot S^{-1} \cdot T^{-1} \cdot T_0^{-1} \cdot S (1.000 \cdot E \cdot M \cdot N) + D$ y tiene que ser la calculada en [14] $X' = m (QXQ^{-1}) + E$ para que coincidan lo mejor posible las X'_i y los X_i''' , por mínimos cuadrados.

Para lo que es necesario y suficiente que:

$$Q \approx S_0^{-1} \cdot (T_0^{-1} \cdot T) \cdot S \cdot U, \quad m = 1.000 \cdot E \cdot M \cdot N, \\ (\approx : \text{es proporcional a}, E = S_0^{-1} \cdot T_0^{-1} \cdot T \cdot S \cdot B \cdot S^{-1} \cdot T^{-1} \cdot T_0 \cdot S_0 = QU^{-1} BUQ^{-1} \dots) \quad [18]$$

5) Cálculo de ω, φ

Es preciso calcular T y S a partir de Q ; $T_0^{-1} \cdot T$ es el giro de eje y , ángulo $w - w_0 = \Delta w$ de cuaternio $(1, 0, \Delta t, 0)$ con $\Delta t = \text{tg} (\Delta w/2)$ (Δt no es $t - t_0$).

La ecuación en cuaternios es $Q = (1, a, b, c)$ proporcional a $S_0^{-1} \cdot (T_0^{-1} \cdot T) \cdot S \cdot U = (1, 0, -s_0, 0) \cdot (1, \Delta t, 0, 0) \cdot (1, 0, s, 0) \cdot (1, 0, 0, u)$; este

producto es:

$$\begin{aligned} & [1 + s \cdot s_0 - \Delta t (s + s_0), \\ & u (s - s_0) + \Delta t (1 - s \cdot s_0), \\ & - u \Delta t (1 - s \cdot s_0) + (s - s_0), \\ & \Delta t (s + s_0) + u] \end{aligned} \quad [19]$$

que son 3 ecuaciones con 3 incógnitas s , Δt , u . Si las resolvemos (vale cualquier solución, aunque probablemente es única), se hace:

$$\begin{aligned} \varphi &= (2 \arctan s) 200/\pi + 100 \\ \Delta w &= (2 \arctan \Delta t) 200/\pi \end{aligned} \quad [20]$$

φ se lee en las escalas, Δw se incrementa a los valores leídos (compruébese si las escalas están al revés en signo).

Se observa que los cuaternios son bastante cómodos para estos cálculos: la alternativa es con matrices con ángulos de Euler. La resolución numérica presenta problemas.

a) Como Δt , s , s_0 son pequeños, y los giros «infinitesimales» permutan, (los errores son de segundo orden) una solución práctica es hacer $Q = (1, a, b, c)$ proporcional a $(T^{-1} T) \cdot (S^{-1} S) \cdot U$ llamando $(1, \Delta s, 0, 0)$ al cuaternio $(S^{-1} S)$ que representa el giro de eje x , valor $\varphi - \varphi_0$ (Δs no es $s - s_0$).

La solución es práctica porque siempre se puede hacer $\varphi = 100^\circ$ antes de medir los puntos X' (en el Wild A-8 que tiene giro general en φ) y entonces el método es exacto.

Como $(T^{-1} T) (S^{-1} S) U$ es igual a $(1, \Delta t, 0, 0)$ $(1, 0, \Delta s, 0)$ $(1, 0, 0, u) = (1 - u \cdot \Delta t \cdot \Delta s, \Delta t + u \cdot \Delta s, \Delta s - \Delta t \cdot u, u + \Delta t \cdot \Delta s)$ las ecuaciones, son:

$$\begin{aligned} \frac{1 - u \cdot \Delta t \cdot \Delta s}{1} &= \frac{\Delta t + u \Delta s}{a} = \\ &= \frac{\Delta s - u \cdot \Delta t}{b} = \frac{u + \Delta t \cdot \Delta s}{c} \end{aligned}$$

Estas son las que se han resuelto por el método iterativo siguiente:

- Inicialmente $\Delta t = 0$, $\Delta s = 0$, $u = c$ (calculado con A). Es una Helmert plana.
- Se resuelve iterativamente en orden:
 $d = 1 - u \cdot \Delta t \cdot \Delta s$;

$$\Delta t = a \cdot d - u \Delta s; \Delta s = b \cdot d + u \Delta t;$$

$$u = c \cdot d - \Delta t \cdot \Delta s.$$

hasta convergencia.

b) Con a , b pequeños convergen mientras u/d , que viene a ser c , no sea mayor que 1.

Si es mayor que 1, multiplicamos en [18] a la derecha por R en ambos lados, lo que equivale a girar 200° el plano. Q debe ser reemplazado por $Q \cdot R = (1, a, b, c) (0, 0, 0, 1) (-c, b, -a, 1)$, o sea, por su equivalente $(1, -b/c, a/c, -1/c)$.

En el resultado nos queda el giro del plano con 200° de menos (o de más, es igual), que basta sumar para obtener la U normal si fuese preciso conocerla (o sea, multiplicando por R la U obtenida, $RU = RU$.

$$\begin{aligned} &= (1, 0, 0, u) (0, 0, 0, 1) = (-u, 0, 0, 1 + u) \\ &[1, 0, 0, -(1 + u)/u] \end{aligned}$$

c) Para resolver [19] se puede probar iterando a partir de

$$\Delta t = 0, s = 0, u = c \quad [22]$$

$$d = 1 + s \cdot s_0 - u \cdot \Delta t \cdot (s + s_0)$$

$$\Delta t = a \cdot d - u \cdot (s - s_0) + \Delta t \cdot s \cdot s_0$$

$$s = d \cdot b + s_0 + u \cdot \Delta t \cdot (1 - s \cdot s_0);$$

$$u = d \cdot c - \Delta t \cdot (s + s_0)$$

con el mismo artificio previo si $|c|$ es > 1 .

C) Escala

Ha quedado en [18]:

$$N = 1.000 \cdot E \cdot M/m = b_x/b_{x_0} \quad [23]$$

Por ejemplo, $E = 1 : 1.000$ escala del plano, $M =$ «relación del engranaje» $= 1 : 3$,

$m =$ escala de la transformación plano a plano $= 0,3354$, resultaría que el plano es un poco mayor que el modelo en $1/N = 0,3354 \times 3$, por lo que se debe de aumentar la base hasta

$$b_x = b_{x_0}/N = 1,0062 \cdot b_{x_0}$$

D) Precisión

Al final de los cálculos se transforman los puntos X_i del plano por $\bar{X}' = \bar{f}(\bar{X})$ de [14] y se

halla la desviación típica de las componentes en $\bar{x}_i' - f(\bar{x}_i)$, que da idea de la bondad de ajuste y por tanto de coherencia de los datos. Suele obtenerse alrededor de 1/100 mm en los ensayos (teóricamente debería ser menos). Si es grande, es que hay algún punto erróneo y se puede tantear su supresión uno a uno, permitiendo esto eliminar errores groseros rápidamente que suelen afectar a un único punto (también puede resultar que el apoyo de campo esté mal... y no hay tres puntos que ajusten...).

La precisión en $\Delta\phi$ y Δw es muy buena porque son correcciones muy pequeñas, no pudiéndose mejorar por el operador sensiblemente según se ha visto.

Sobre b_x es un tanto por ciento (nos sale el 1 %), cuyo error es sensible, mejorable por el operador, por ejemplo en una pasada de ajuste (se podría iterar el método con nuevas $\bar{x}_i'$ con los ángulos corregidos).

5. CALCULO, EJEMPLOS

a) Generalidades

Caben bastantes posibilidades de buena realización en cuanto a programación para entrada y salida cómoda de datos. Se sabe que algunas casas montan a los restituidores «interfaces» para que los $\bar{x}_i'$ entren solos en la memoria (dentro de equipos caros de adquisición de datos) y programas de ajuste en absolutas para minordenadores.

Según se ha comprobado, se puede programar el método en un ordenador personal en Basic, resultando cómodo el HP-85 (dentro de lo pesado que es programar), lamentando no tener un Basic con operaciones matriciales directas (en cambio, el HP-85 dispone de capacidad gráfica que no se usó).

Se aprecia mucho la facilidad de corrección de errores en estos «ordenadores personales», comparada con los «centros de cálculo por fichas» de hace diez años (los terminales de ordenador grande también facilitan la programación de modo parecido), siendo adecuados para el tamaño del problema.

Y lo mejor hubiese sido más rápido disponer

un compilador APL..., o por lo menos el programa hubiese quedado más condensado. En Basic hacen falta unas 500 líneas «cuidando la presentación al operador» y sin ahorrar memoria.

La ejecución es de unos diez segundos si los puntos son conocidos en x, y, z ; de algún minuto en caso contrario, no incluyéndose la entrada, comprobación y depuración de datos $\bar{x}_i, \bar{x}_i'$ (el caso contrario es el de $L = 0$ cuando no se conocen x, y y sí la z de algún punto).

Es muy recomendable poder, si el ajuste es defectuoso, quitar algún punto a voluntad sin volver a teclear las coordenadas, aunque sea manual. En varios ensayos se pudo localizar qué punto tenía error de transcripción, lo que da una dispersión en z de muchos metros. Dispersiones menores, de centímetros, pueden provenir de que el apoyo está mal hecho.

Como la dispersión está hecha dividiendo por P , disminuye al disminuir el número de datos, y se anula si se dan dos puntos en planta y uno más en alzado, no existiendo entonces ninguna comprobación.

Con 3 puntos se comprueba sobre todo si las x, y son correctas un «error especial», pudiendo verse si ese error proviene de la «dispersión en z » o de las x, y .

b) Ejemplo:

Datos

- Número de puntos, 4.
- Coordenadas $\bar{x}_i$ del plano. Se toman del apoyo topográfico:

(Escala vertical y horizontal iguales.)

Punto $\bar{x}_i$	x (en m)	y (en m)	z (en m)
$i = 1$	445221,93	4439534,14	600,7
2	444833,30	4439745,65	602,46
3	445539,65	4440353,17	594,85
4	445871,65	4440111,32	562,63

$$w_{01} = 96,52 \text{ g} \quad , \quad w_{02} = 96,32 \text{ g} \quad ,$$

$$\phi_0 = 100 \quad , \quad M = 1/3 \quad , \quad b_{x_0} = 130 \text{ mm.}$$

Coordenadas $\bar{x}_i'$: Se mete el par de fotos, en cuyo solape están los puntos en el restituidor, se hace «la orientación relativa» de modo que se

obtiene visión estereoscópica con escala aproximada a la real. Se lee en el aparato y se lleva la mancha flotante a los 4 puntos escribiendo en cada uno sus coordenadas, dadas por el restituidor:

Punto $\bar{X}_i$	x (en mm)	y (en mm)	z (en mm)
1 = 1	2809,86	3759,34	288,35
2	2924,57	3826,12	286,29
3	2970,25	3550,54	291,85
4	2856,64	3502,88	284,15

Se han de introducir los $\bar{X}_i, \bar{X}'_i$.

El programa calcula internamente:

$$a = -2,332 \times 10^{-2}$$

$$b = 1,9289 \times 10^{-2}$$

$$c = 0,99954$$

$E = F = G = 0$, la dispersión en z que es de 0,01 mm,

$$\Delta w = -1,8601 \text{ g,}$$

$$\Delta \varphi = 0,3386 \text{ g,}$$

$$m = 0,2998 \text{ g,}$$

$$\theta = 65,243 \text{ g;}$$

y los resultados aprovechables son:

$$\varphi_0 + \Delta \varphi = \varphi = 99,6641 \text{ g,}$$

$$w_1 = w_{01} + \Delta w = 98,3802 \text{ g,}$$

$$w_D = w_{0D} = 98,1802 \text{ g,}$$

$$bx = 144,538 \text{ mm.}$$

Independientemente el operador hizo la absoluta y obtuvo:

$$\varphi = 99,65 \text{ g,}$$

$$w_0 = 98,40 \text{ g,}$$

$$w_1 = 98,20 \text{ g,}$$

$$bx = 144,65 \text{ mm.}$$

Los errores en ángulos no son detectables por el operador, pero sí algo el de escala, aunque sea de una milésima.

Con dos puntos en planta y uno más en alzado, el error en z sale de 10^{-8} mm, o sea, que el ajuste es perfecto (la precisión es la de la máquina de calcular).

c) Posibilidades

El uso de las incógnitas $\bar{A} = (a, b, c)$ puede probablemente facilitar operaciones tales como aerotriangulación (que no hemos resuelto).

Por ejemplo, se puede ajustar una banda con varios grupos [1], [2], [3] de puntos, obteniendo transformaciones $(\bar{A}_1, \bar{E}_1, m_1)$, $(\bar{A}_2, \bar{E}_2, m_2)$, $(\bar{A}_3, \bar{E}_3, m_3)$, interpolando $(\bar{A}, \bar{E}, m)$ para pares intermedios. La interpolación con 3 grupos puede ser de segundo grado con la distancia, y nos da una corrección en $\Delta w, \Delta \varphi, bx$ al reintroducir un par. Resulta una «triangulación» expedita (la triangulación con varias bandas o ajuste en bloque y de verdad por mínimos cuadrados es un problema mucho más complicado).

6. IDEAS

En el Lagrangiano se puede pedir más precisión en z que en x e y (no demasiada, como 2 a 5 veces). Es curioso el seguir los cálculos viendo cómo se transforman las fórmulas (a partir de un producto escalar $(x, y, z) * (x', y', z') = xx' + yy' + 4zz'$ p.ejemplo). No lo hacemos porque requieren mucho espacio de fórmulas (por ejemplo, al no ser $g(\bar{Y}) * g(\bar{Y}) = \bar{Y} * \bar{Y} = \text{cte}$ en [9] aparecen más términos...).

BIBLIOGRAFIA

M. BERGER: «Geometrie: Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères». Tomo II. Cedic/Fernand Nathan, París, 1977.

Es geometría clásica en una forma moderna, amena y con figuras. El apartado 8.9 se refiere a la aplicación de los cuaternios a $O^+(3)$, grupo de desplazamientos directos de vectores (euclídeos) de dimensión 3, y a $O^+(4)$.

2. B. HALLERT: «Photogrammetry. Basic Principles and General Survey». Mac Graw Hill Book Company, Inc. Nueva York, 1960.

Es un manual clásico de fotogrametría. En apéndices da métodos de ajustes por mínimos cuadrados.

3. S. LOPEZ-CUERVO y ESTEVEZ: «Fotogrametría». Madrid, 1980.

Es el manual más reciente en nuestro idioma. Para orientación absoluta utiliza matrices, en contraste con el presente artículo, que usa cuaternios.

4. J. DIEUDONNE: «Algebra lineal y geometría elemental». Selecciones Científicas.

También trata los desplazamientos en el espacio por cuaternios.

José Manuel Antón Corrales.



Nacido el 6 de enero de 1944 en Madrid, Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, pertenece a la promoción de 1968 (plan 1957). Trabajó con J. Batanero y A. Dou, estuvo siete meses en ERT dentro de un «staff» de dirección y en el Instituto E. Torroja hasta pasar a excedente en enero de 1971. Participó desde entonces en comisiones internacionales sobre seguridad en estructuras (actualmente JCSS y CEB), haciendo tesis sobre ese tema, del que fue maestro internacional E. Torroja (doctor el 21 de diciembre de 1970). Dio clases de matemáticas, obteniendo en diciembre de 1972 la cátedra de Matemáticas II en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Madrid, teniendo algunas publicaciones de Matemáticas. Entró en enero de 1971 en el MOPU, pasando a funcionario por oposición en otoño de 1977, actualmente Jefe de Sección de Geometría de la Carretera en el Servicio de Tecnología de dicha Dirección (revisión de proyectos de autopistas, cálculo mecanizado de carreteras y estructuras, normas de geometría y drenaje, etc.), teniendo varias publicaciones de carreteras. Excedente en otoño del 83 en el MOPU.

