

Un modelo de simulación de tráfico en carreteras de dos carriles (*)

Por FERNANDO CAÑIZAL BERINI
JUAN MANUEL GOMEZ PONCELA

Doctores ingenieros de Caminos

El estudio de las relaciones funcionales que ligan la velocidad media de recorrido con la intensidad de tráfico de un cierto tramo de carretera tiene un gran interés, tanto por el punto de vista de nivel de servicio a los usuarios como de evaluación de costes de congestión.

En este trabajo se aborda la elaboración de un modelo matemático para simular un tráfico real en un ordenador digital, mediante la aplicación del método de Montecarlo. Se comentan además algunos de los resultados obtenidos y se presentan las más importantes conclusiones que de ellos se derivan.

1. INTRODUCCION

El conocimiento de las relaciones que existen entre la velocidad media de recorrido de los vehículos y la intensidad de tráfico para diferentes geometrías de carretera, tiene un interés evidente, especialmente en lo que respecta al estudio de las pérdidas de tiempo que se producen en aquellas situaciones en las que la circulación está coaccionada de alguna forma por el tráfico o el trazado de la carretera. Estas relaciones tienen una aplicación directa a la evolución de los costes sociales ocasionados por la congestión de tráfico.

Básicamente existen dos métodos para la determinación de las relaciones velocidad-intensidad: las medidas directas de campo y la simulación de tráfico en ordenador. El primero de ellos, basado en ajustes estadísticos de numerosísimas medidas, presenta el problema de su falta de generalidad, por cuanto un simple contraste entre los resultados obtenidos en diversos países demuestra que tales relaciones no son extrapolables de una situación a otra.

Por el contrario, los modelos de simulación

de tráfico ofrecen una generalidad absoluta, ya que puede analizarse con ellos cualquier situación, sin más que conocer los parámetros de las variables básicas, para lo que será suficiente la realización de un número relativamente reducido de medidas de campo.

El método utilizado en este trabajo corresponde al segundo tipo de los citados anteriormente. Se pretende aprovechar la posibilidad que ofrecen los ordenadores actuales de simular un fenómeno real, por complejo que sea, con aproximación razonable. La técnica utilizada es bien conocida: el denominado método de Montecarlo. Sin embargo, la aplicación a este caso no ha estado exenta de dificultades. Ha habido que adoptar diversas hipótesis simplificadoras y estudiar con profundidad ciertas relaciones funcionales que más adelante se describirán.

En términos generales puede decirse que el modelo, creado al efecto, trata de forma aleatoria la generación de los vehículos y las características a asignar a cada uno de ellos, dentro de las condiciones generales impuestas (intensidad total, porcentajes por categorías, etc.), mientras que ya es determinista el desenvolvimiento de este tráfico en el interior del tramo en función de las relaciones entre sí y con la infraestructura.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de agosto de 1983.

2. DEFINICIONES E HIPOTESIS BASICAS

Para tener una comprensión adecuada de lo que se expondrá más adelante, es preciso definir previamente las variables básicas que se han utilizado en este modelo. Estas variables forman parte de la abstracción realizada para abordar la simulación y se complementan con las hipótesis que definen o relacionan, matemáticamente, estas variables entre sí.

2.1. Definiciones

Las variables básicas utilizadas en el modelo se definen como sigue:

1. Se denomina «velocidad libre en recta y llano», a aquella a la que circula un vehículo cuando no se encuentra coaccionado ni por las características geométricas de la carretera, ni por el tráfico.
2. La «potencia máxima utilizada», es el resultado de aplicar un coeficiente, función de la mentalidad del conductor, a la potencia máxima del vehículo.
3. El «peso real» del vehículo, es la suma de la tara más una cierta cantidad aleatoria de peso transportado.
4. La «velocidad libre en rampa de inclinación dada» es aquella que desarrolla un vehículo en dicha rampa, una vez estabilizado su movimiento, cuando no está coaccionado ni por el tráfico, ni por limitaciones reglamentarias de velocidad.
5. La «longitud del vehículo» es la distancia existente entre los puntos extremos del mismo.
6. Se denomina «categoría de un vehículo» a cada uno de los elementos de la participación que se ha establecido en el conjunto de éstos, de modo que, las características de los distintos vehículos pertenecientes a cada una de ellas (longitud, peso, potencia máxima), tengan un mismo orden de magnitud.

2.2. Hipótesis básicas

Como ya se ha indicado, estas hipótesis pretenden definir, matemáticamente, las varia-

bles enunciadas en el epígrafe anterior. Se consideran las siguientes:

- A) *Con respecto a la "velocidad libre en recta y llano".*

Hipótesis n.º 1. La velocidad libre en recta y llano de los vehículos pertenecientes a una determinada categoría es una variable aleatoria de distribución normal, con parámetros diferentes para cada categoría.

Hipótesis n.º 2. Cuando un vehículo circule libremente (es decir, sin coacción exterior alguna), lo hará con movimiento uniforme y con su «velocidad libre en recta y llano». Si se encuentra afectado por las características de la carretera (curvas, pendientes...) o por el tráfico, su velocidad podrá ser inferior a ésta, pero nunca superior a dicho valor.

- B) *Con respecto a la "potencia máxima utilizada" y al "peso real".*

Hipótesis n.º 3. La «relación potencia máxima utilizada/peso real» de los vehículos pertenecientes a una determinada categoría es una variable aleatoria de distribución normal, con parámetros diferentes para cada categoría.

Hipótesis n.º 4. Para cada vehículo existe una proporcionalidad entre el valor de su «velocidad libre en recta y llano» y el de su «relación potencia máxima utilizada/peso real».

Hipótesis n.º 5. Mientras un vehículo circule libremente, desarrollará una potencia igual a la «potencia máxima utilizada», tanto en llano como en rampa.

- C) *Con respecto a las longitudes de los vehículos.*

Hipótesis n.º 6. La «longitud» de los vehículos pertenecientes a una determinada categoría es una variable aleatoria de distribución uniforme, entre dos ciertos valores límite prefijados y diferentes para cada categoría.

2.3. Comentarios y discusión de hipótesis

De lo anteriormente expuesto puede deducirse que la velocidad libre en rampa de inclinación dada no es una variable independiente, sino que se obtiene, para cada vehículo, a partir

de la velocidad libre en recta y llano y de su relación potencia máxima utilizada/peso real, por aplicación de la hipótesis n.º 5. Tal determinación se detalla en el anejo n.º 1 de este artículo.

Por otra parte es de destacar que las hipótesis de normalidad adaptadas, sin pretensión alguna de su exactitud, se ofrecen intuitivamente como próximas al fenómeno real. En efecto, la velocidad libre en recta y llano depende lógicamente de las características del vehículo y de la mentalidad del conductor. Ambas variables son aleatorias y se comprende que su distribución no se diferenciará de la gaussiana en gran medida y, por tanto, tampoco su conjunción. Análogamente puede decirse de la variable enunciada en la hipótesis n.º 3, ya que depende, además del peso real del vehículo, de las mismas variables anteriores. En cualquier caso la separación por categorías realiza un claro efecto de laminación de los errores en que pudiera incurrirse por aplicación de las citadas hipótesis. Respecto a este último punto —la clasificación por categorías—, hay que indicar que, a pesar de la arbitrariedad que supone la partición de un conjunto que en principio puede suponerse continuo, es práctica habitual en este tipo de estudios al contribuir a acotar los parámetros de las variables estadísticas. En cualquier caso el modelo, en su concepto general, deja amplia libertad a cualquier criterio de partición que pretendiera establecerse.

3. FUNCIONAMIENTO DEL MODELO E HIPOTESIS COMPLEMENTARIAS

El modelo, basándose en las variables e hipótesis anteriormente definidas, puede materializarse en tres partes claramente diferenciadas:

- Geometría de carretera.
- Generación de vehículos.
- Movimiento de vehículos.

Estas partes incluyen, como puede comprenderse, la problemática completa de la circulación que se pretende simular. Como se verá a continuación, no resulta fácil (por no decir imposible), realizar el modelo únicamente a partir de las hipótesis anteriores. Por ello, se

precisará recurrir a otras adicionales, que se irán enunciando en los sucesivos apartados de este epígrafe.

3.1. Geometría de la carretera

El modelo propuesto contempla, en principio, una amplia gama de posibles trazados. Sin embargo, la complejidad del problema ha recomendado la inclusión de hipótesis simplificadoras que, sin suponer un alejamiento considerable de la realidad, alivien la carga de trabajo del ordenador que realiza la simulación.

3.1.1. Tipos de tramo considerados

Se han contemplado cuatro tipos distintos de tramos, cuya longitud es un dato de antemano:

1. *Tramo en recta y llano.*

En él los vehículos están exentos de cualquier tipo de coacción que no sea el tráfico. Se considera como tramo básico para generar los restantes tipos.

2. *Tramos en recta y rampa.*

Estos se definen mediante los parámetros: «porcentaje del tramo en que existe rampa» y «porcentaje de inclinación de la rampa».

3. *Tramos "con curvas" y en llano.*

Vienen éstos definidos por tres parámetros: «porcentaje del tramo en que existe prohibición de adelantamiento», «porcentaje del tramo en que existe limitación de velocidad» y «valor de la limitación de velocidad». Obsérvese que las curvas se han materializado por sus dos características más peculiares: la prohibición de adelantamiento y la limitación de velocidad.

4. *Tramos con "curvas" y en rampa.*

Estos constituyen un tipo mixto de los anteriormente expuestos, por lo que, obviamente, vendrán definidos por los cinco parámetros enunciados.

3.1.2. Hipótesis simplificadoras adoptadas.

Como ya se ha comentado, estas hipótesis están encaminadas a facilitar el trabajo de simulación. Son las siguientes:

Hipótesis n.º 7.—Se supone que los tramos son «cerrados», en el sentido que todos los

vehículos que acceden por un extremo deben abandonarlo por el otro. Esto equivale a decir que no existen puntos de entrada o salida en ninguna sección intermedia de los mismos.

Hipótesis n.º 8.—La circulación en el tramo es ininterrumpida. Tal supuesto equivale a considerar éste lo suficientemente alejado de los núcleos urbanos como para no verse influenciado por ellos, así como desechar cualquier detención de los vehículos por accidentes u otras causas.

Hipótesis n.º 9.—En ninguno de los dos sentidos del tramo se considerará puede existir otro tipo de circulación paralela que los adelantamientos. No se considera, por tanto, la posibilidad de existencia de «vías lentas» u otros carriles de circulación paralela.

Hipótesis n.º 10.—Se supone que las curvas y las rampas, cuando existan, se encuentran localizadas al final del tramo.

Hipótesis n.º 11.—En todas las secciones en que exista limitación de velocidad, estará prohibido el adelantamiento.

Hipótesis n.º 12.—Se supone que la sección origen del tramo está situada en recta y llano y que justamente en dicho punto finaliza una prohibición de adelantamiento. Por tanto, los vehículos no podrán ingresar en el tramo realizando maniobras de adelantamiento, aunque puedan iniciarlas inmediatamente.

3.2. Generación de vehículos

La generación de los vehículos que han de ser estudiados en el modelo consta de tres partes claramente diferenciadas:

1. Definición de las variables básicas del móvil considerado.
2. Definición del instante de aparición en el tramo.
3. Determinación de la velocidad de entrada en el tramo.

El primer punto se resuelve fácilmente mediante la extracción de números aleatorios de un ordenador digital que, como se sabe, tienen una distribución uniforme entre 0 y 1. Así pueden obtenerse valores de la función de distribución

de las distintas variables aleatorias y, a partir de éstos, determinar los correspondientes a las variables en cuestión. Mención aparte merece el método de simulación de las variables aleatorias con distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Para ello se obtienen mediante el ordenador dos números aleatorios N_1 y N_2 (con distribución uniforme entre 0 y 1), y se aplica la conocida expresión:

$$N_3 = \cos(2\pi N_1) \sqrt{-2\ln N_2} \quad (1)$$

con lo que N_3 tiene distribución normal $N(0,1)$.

A partir de ahí el paso a la distribución $N(\mu, \sigma)$ es inmediato.

De esta forma se determinan:

- La categoría del vehículo (variable aleatoria discreta).
- La longitud del vehículo (variable aleatoria uniforme).
- La «velocidad libre en recta y llano» (variable aleatoria normal).
- La relación «potencia máxima utilizada/peso real» (variable aleatoria normal).

Mayores dificultades ofrece la parte segunda, hasta el punto de haber supuesto uno de los más importantes escollos para la realización de este modelo. A primera vista puede parecer que la aparición de vehículos en el origen del tramo debe aproximarse a una distribución de Poisson. Sin embargo, la citada distribución conduce a diferencias de tiempo entre sucesos consecutivos (los cuales, como se sabe, siguen una distribución exponencial) que pueden ser prácticamente nulas. Esta circunstancia se aleja considerablemente de la realidad, ya que dos vehículos consecutivos deben aparecer conservando una distancia entre sí que tiene que ser, como mínimo, igual a la longitud del primero más un cierto espacio de seguridad, función de la velocidad de ambos.

Esta «distancia mínima» da origen a un «tiempo mínimo», que debe transcurrir entre dos apariciones consecutivas. El estudio de dicho «tiempo mínimo» es engorroso y relativamente complejo. Por ello se ha optado por separarlo del texto y presentarlo como anejo n.º 2.

Una solución que, partiendo de la distribución poissoniana, permite tener en cuenta la

existencia de los «tiempos mínimos» consiste en la siguiente actuación conjunta:

1. Modificar los instantes de entrada en el tramo de aquellos vehículos cuya diferencia de tiempo de aparición respecto de su precedente fuera inferior a ese valor mínimo, en el sentido de asignarle dicho «tiempo mínimo».
2. Mantener los instantes de aparición de aquellos que cumpliesen la condición de «tiempo mínimo» ya comentado.

Sin embargo, hay que hacer notar que modificaciones, en el sentido de lo descrito en el punto 1 pueden afectar a tiempos entre sucesos que inicialmente cumplían la segunda condición y que ahora deberán a su vez ser corregidos. Cuando esta serie de modificaciones se hace infinita (lo que ocurre cuando prácticamente todas las diferencias sucesivas son pequeñas, es decir, cuando el tráfico medio propuesto es muy alto), resulta imposible conducir el flujo propuesto en las condiciones establecidas. Es decir, se ha alcanzado la «capacidad del tramo».

Por lo anteriormente expuesto se incluye la siguiente hipótesis:

Hipótesis n.º 13.—Se supone que las apariciones de los vehículos en el origen del tramo siguen una distribución de Poisson, modificada de tal forma que, manteniendo todos los instantes de aparición que sea posible, las diferencias de tiempo entre dos vehículos consecutivos a la entrada en el tramo sea igual o mayor que el «tiempo mínimo» que corresponda a cada caso.

Sin embargo, en la realización de este modelo se ha trabajado con diferencias de instantes de aparición y, por tanto, con distribuciones exponenciales, aunque siempre siguiendo la hipótesis anteriormente expuesta.

Así, pues, para cada vehículo se determinará su «tiempo teórico de aparición» mediante la simulación de una variable aleatoria de distribución exponencial por el método descrito anteriormente. Se calculará, por otra parte, su «tiempo mínimo», por debajo del cual no es posible su entrada en el tramo. En base a estos dos valores se determinará su instante real de aparición.

El punto final consiste en definir la velocidad de entrada del vehículo en el tramo. En este aspecto pueden ocurrir dos casos:

- a) Que la velocidad libre del vehículo que hace su entrada en el tramo sea inferior a la que en este instante posea el vehículo que le precede. En este caso, la velocidad de entrada coincidirá con su propia velocidad libre.
- b) Que no se dé el supuesto a). De ocurrir así pueden presentarse tres posibilidades:
 - b₁) Que la diferencia de tiempo de aparición respecto del anterior sea igual al tiempo mínimo. En este caso entrará en el tramo con una velocidad igual a la que posee el vehículo anterior, ya que se encuentra a la distancia mínima.
 - b₂) Que no dándose el supuesto b₁), la distancia al vehículo que le precede sea suficiente como para permitir una maniobra de frenado, como se expondrá más adelante. En este caso el vehículo hará su entrada a su propia velocidad libre.
 - b₃) Que no se cumplan los supuestos b₁) ni b₂), en cuyo caso el vehículo se encontrará en situación de frenado y su velocidad tomará un valor intermedio entre su «velocidad libre», y la que posee realmente en ese instante el vehículo anterior.

3.3. Movimiento de los vehículos

Una vez definida la geometría de la carretera y generado los vehículos, es necesario simular su movimiento en el interior del tramo de estudio. Para ello, deben resolverse de la forma más próxima a la realidad posible los movimientos que realmente se producen en la carretera y las decisiones que en cada momento van tomando los conductores. En este sentido, la técnica de simulación consiste en que el ordenador vaya incrementando la variable tiempo en un cierto intervalo, y analizando la posición, velocidad y posibles decisiones (frenado y adelantamiento) de cada uno de los vehículos.

Se describen a continuación los movimientos elementales que puede tener un móvil, para

estudiar, posteriormente, la maniobra de adelantamiento.

Los distintos tipos de movimiento contemplados en el modelo pueden incluirse en dos grandes grupos: Movimiento uniforme y movimiento variado.

3.3.1. Movimiento uniforme

Un vehículo circulará con movimiento uniforme en tres posibles circunstancias distintas:

1. *Cuando no esté coartado por el tráfico ni por limitaciones reglamentarias.* En ese caso su velocidad será igual a la llamada «velocidad libre», bien sea «en llano», o «en rampa». Si en su recorrido se encuentra un vehículo más lento que él y se verifican las condiciones necesarias para el adelantamiento que posteriormente se describirán, efectuará tal maniobra con movimiento uniforme. En caso contrario, se verá obligado a frenar.
2. *Cuando esté totalmente condicionado por otro (u otros) vehículos más lentos que él,* de tal suerte que, tras sucesivos frenados, haya adoptado la velocidad de éstos. Caso que, posteriormente, se reúnan las condiciones necesarias para el adelantamiento, dicho vehículo podrá liberarse, iniciando un movimiento acelerado en un intento de alcanzar su velocidad libre.
3. *Cuando exista una limitación exterior de velocidad inferior a la velocidad libre del móvil en cuestión.* A partir de esta situación puede darse la posibilidad de un movimiento decelerado, motivado por otros vehículos que circulan a velocidad inferior a la reglamentada. Por el contrario no puede producirse un movimiento acelerado ya que, por hipótesis, la maniobra de adelantamiento está prohibida en esos casos.

3.3.2. Movimiento variado

Puede ser de dos tipos, según que la aceleración sea positiva (movimiento acelerado), o negativa (frenado).

A) *Movimiento acelerado.*

De las hipótesis anteriormente expuestas se desprende que el movimiento acelerado de un vehículo solamente se produce en aquellos casos en que el móvil logra liberarse de la coacción impuesta por otros, e inicia un adelantamiento. Por otro lado se ha visto que los adelantamientos sólo son posibles en aquellos tramos denominados «en recta», es decir, en «recta y llano» y «recta y rampa». Se aborda aquí el planteamiento de la aceleración desarrollada por un vehículo en «recta y llano», habida cuenta que el planteamiento para el caso de «recta y rampa» sería análogo sin más que sustituir el concepto de «velocidad libre en recta y llano», por el de «velocidad libre en rampa de inclinación dada».

Sea v_0 la «velocidad libre en recta y llano» del móvil y sea v la velocidad de coacción. Se hace la hipótesis que, desde el instante de su liberación, el vehículo eleva su potencia a la llamada «potencia máxima utilizada». Esto se consigue mediante un brusco aumento de su esfuerzo tractor (F_t), el cual irá disminuyendo al ir aumentando la velocidad del vehículo, mientras que, paralelamente, va incrementándose el esfuerzo resistente (F_r). Al igualarse ambos esfuerzos el vehículo alcanza su velocidad libre, y el movimiento pasa a ser uniforme.

La aceleración, que es función de la velocidad del móvil en cada instante, viene dada por la expresión:

$$a_{m,t}(v) = \frac{F_t - F_r}{\text{masa}} = \frac{g}{G} (F_t - F_r) \quad (2)$$

(g : aceleración de la gravedad; G : peso del vehículo).

Sin embargo, por simplicidad de cálculos, se ha adoptado para la aceleración un valor medio, constante durante todo el tiempo de duración del movimiento acelerado (Fig. 1). Dicho valor viene dado por la expresión:

$$a_m = \frac{\int_v^{v_0} a(v) dv}{v_0 - v} = \frac{g}{G} \cdot \frac{\int_v^{v_0} (F_t - F_r) dv}{v_0 - v} \quad (3)$$

Dado que tanto el esfuerzo tractor como el resistente, como el propio peso real del vehícu-

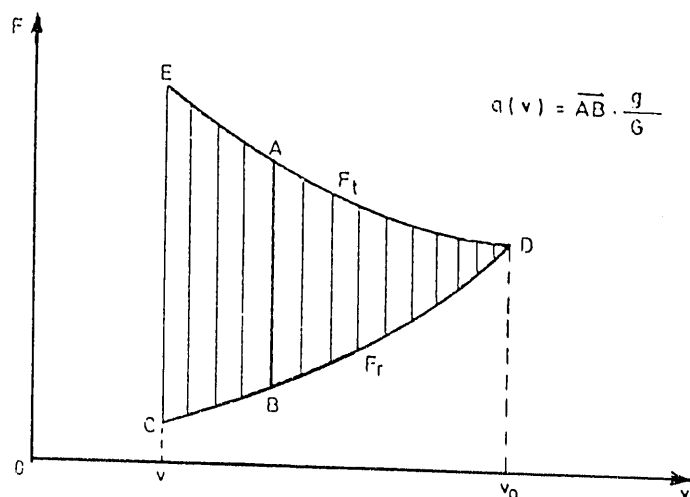


Figura 1.

lo pueden expresarse en función de las variables básicas de dicho móvil (ver anejo n.º 1), será suficiente conocer la velocidad de coacción (v) para asignar a éste el valor de la aceleración que mantendrá a lo largo de una maniobra de adelantamiento concreta.

B) Movimiento decelerado.

Si el vehículo « $i+1$ », se encuentra ante el vehículo anterior « i » que circula a menor velocidad y la separación entre ambos es inferior a un cierto valor mínimo, el vehículo posterior deberá adoptar una decisión entre adelantar o frenar. Caso de no ser posible el adelantamiento, el móvil iniciará una maniobra de frenado, cuya deceleración viene dada por la expresión:

$$A_{i+1} = \frac{v_i^2 - v_{i+1}^2}{2 (S_i^* - S_i)} \quad (4)$$

siendo v_i , v_{i+1} las velocidades de los vehículos « i » e « $i+1$ », s_i^* la separación bruta real entre ambos en este instante y S_i la separación bruta mínima entre dos vehículos que circulen a la misma velocidad, es decir:

$$S_i = l_i + S_0 + t_r \cdot v_{i+1} \quad (5)$$

donde:

l_i : longitud del vehículo anterior.

S_0 : separación, fijada arbitrariamente, entre dos vehículos detenidos.

t_r : tiempo de reacción de un conductor.

Cada vez que la variable tiempo se incrementa en una unidad elemental, se recalcula el valor de la deceleración del vehículo « $i+1$ », ya que ésta puede variar, al modificarse el movimiento del vehículo « i ».

Evidentemente, en sucesivos incrementos de la variable tiempo pueden desaparecer las circunstancias que impedían el adelantamiento, con lo que se finaliza la maniobra de frenado, iniciándose un movimiento acelerado. Si tras sucesivos intentos no fuera posible el adelantamiento, el vehículo « $i+1$ » pasará a poseer la misma velocidad que el « i », lo cual ocurrirá cuando la separación entre ambos sea igual a la distancia mínima de seguridad entre dos móviles que circulan a idéntica velocidad (S_i).

3.3.3. Maniobra de adelantamiento

El modelo contempla dos tipos de adelantamiento: *simple* (el vehículo « $i+1$ » adelanta al vehículo « i »), y *doble* (el « $i+1$ » adelanta simultáneamente al « i » y al « $i-1$ »).

Para que un vehículo pueda realizar un adelantamiento simple es necesario que:

1. No esté en zona de prohibición de adelantamiento.
2. No esté su maniobra impedida por el adelantamiento de otros vehículos contiguos.
3. El vehículo anterior circule libremente. En caso contrario se tanteará adelantamiento doble.
4. La longitud de adelantamiento no sea superior a la máxima permitida.
5. Exista, una vez finalizado el adelantamiento «hueco» suficiente para que el vehículo se integre en su carril. En caso contrario se tanteará adelantamiento doble.
6. Esté lo suficientemente alejado el vehículo opuesto más próximo, de modo que no pueda darse la colisión frontal.

En caso de adelantamiento doble las condiciones son idénticas a las anteriores a excepción de la que establece la obligatoriedad de movimiento libre para el vehículo « i », que aquí pasará al « $i-1$ ».

El movimiento que desarrollará el vehículo que adelanta será *uniforme* (en caso que antes de iniciar la maniobra circulase libremente), o *acelerado* (si anteriormente estaba coaccionado). En este último caso puede ocurrir:

1. Que el tiempo necesario para alcanzar la velocidad libre sea inferior a la duración del adelantamiento. Se tendrá entonces un movimiento mixto: parte acelerado, parte uniforme.
2. Que ocurra lo contrario, con lo que todo el adelantamiento será acelerando, prosiguiendo el movimiento variado una vez finalizada la maniobra, en la pretensión del vehículo de alcanzar su velocidad libre.

4. APLICACION PRACTICA

El modelo que acaba de exponerse ha sido programado en FORTRAN V en un ordenador Data general, Eclipse S-230, perteneciente al Centro de cálculo de la Universidad de Santander.

Se han procesado diversos tipos de trazado, utilizando los siguientes valores de los parámetros anteriormente expuestos:

- *Longitud del tramo*: 1 km.
- *Número de vehículos analizados por sentido*: 1.000.
- *Incremento elemental de la variable tiempo*: 0,5 segundos.
- *Tiempo de reacción de un conductor*: 1 segundo.
- *Máxima deceleración permitida*: 3 m/seg².
- *Máximo recorrido adelantado*: 200 m.
- *Coefficiente de rozamiento a la rozadura*: 0,015.
- *Número de categorías analizadas*: 3 (ligeros, medios y pesados).
- *Composición de tráfico*: 75 por 100, 10 por 100 y 15 por 100 respectivamente para «ligeros», «medios» y «pesados», igual en ambos sentidos.
- *Intensidad de tráfico*: variable desde un valor mínimo (50 vehículos/h. carril), has-

ta uno máximo, función del tipo de tramo, a intervalos de 50 vehículos/h. carril, idéntica para ambos sentidos de circulación.

- *Longitudes de los vehículos*: variable aleatoria con distribución uniforme entre los siguientes valores:
 - Ligeros: Entre tres y cinco metros.
 - Medios y pesados: Entre 5 y 12 metros.
- *Velocidad libre en recta y llano*: variable aleatoria con distribución normal, utilizando los siguientes parámetros:

	Media (km/h.)	Desviación típica (km/h.)
Ligeros.	100	6
Medios.	70	7
Pesados.	55	8

- *Relación potencia máxima utilizada/peso real*:

Variable aleatoria con distribución normal y siguientes parámetros:

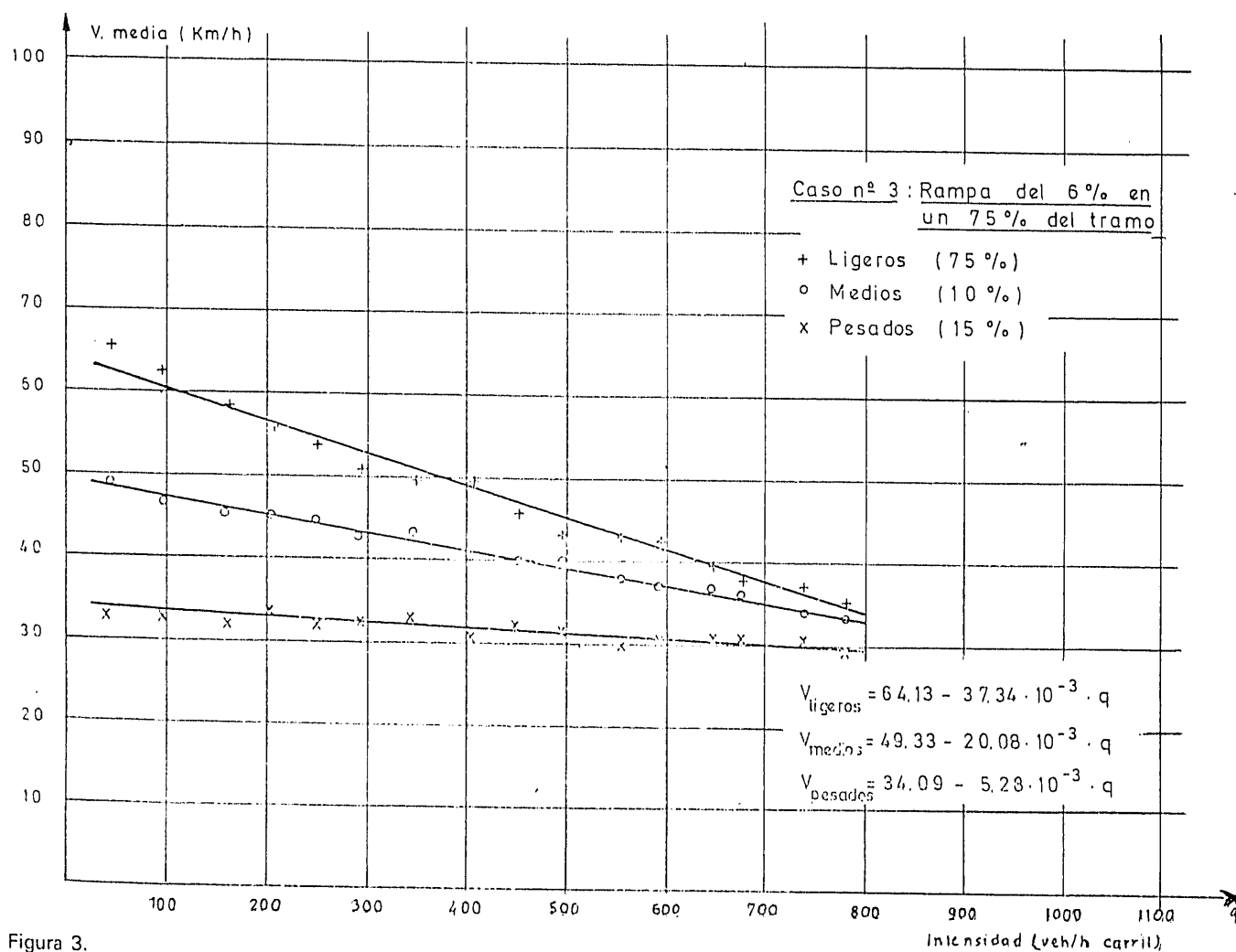
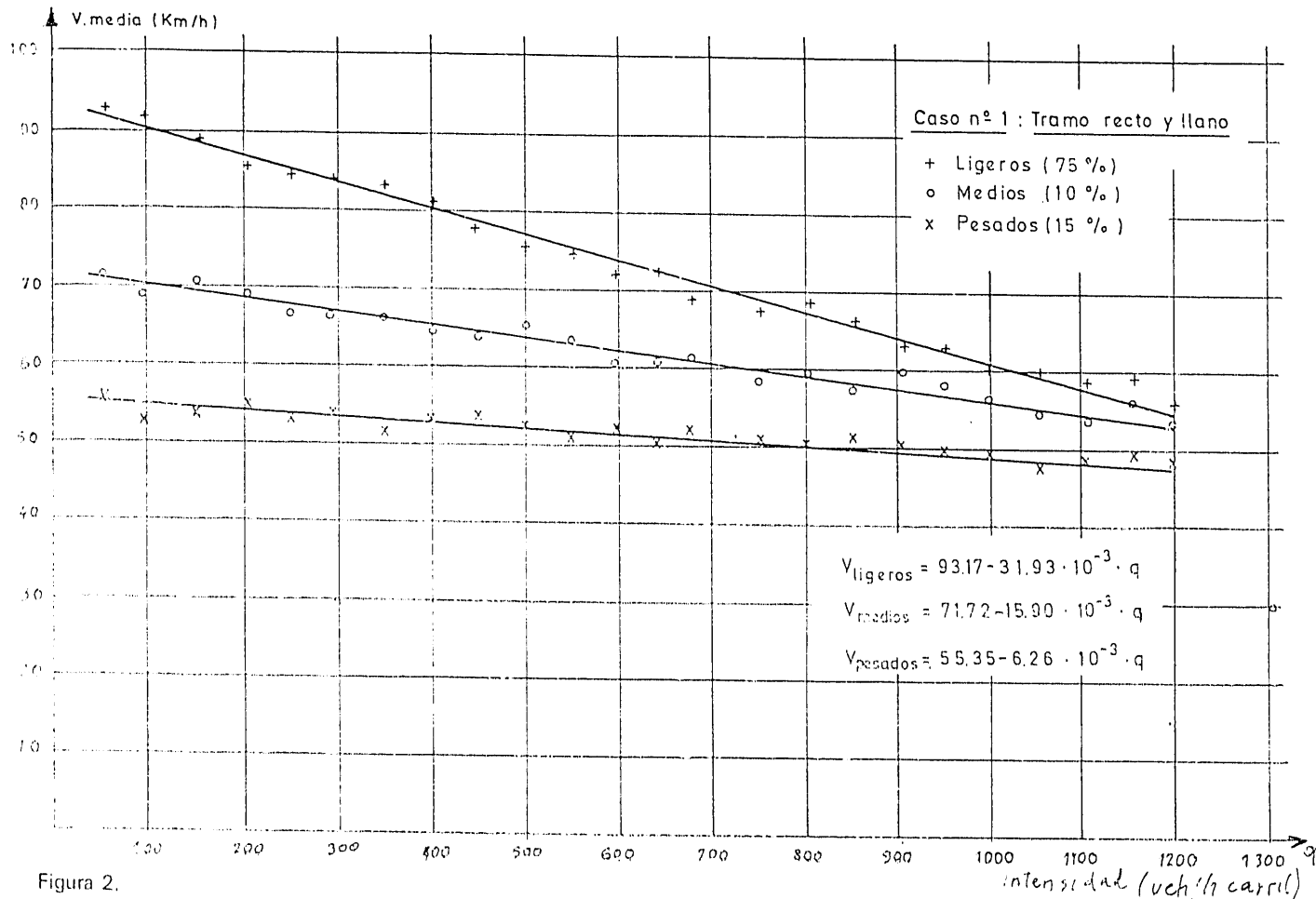
	Media (CV/T)	Desviación típica (CV/T)
Ligeros.	30	4
Medios.	15	2
Pesados.	9	1

5. RESULTADOS OBTENIDOS

De entre los distintos casos analizados se presentan aquí tan sólo tres:

- *Caso n.º 1.*—Tramo recto y llano (Fig. 2).
- *Caso n.º 3.*—Tramo con rampa del 6 por 100 en el 75 por 100 del mismo (Fig. 3).
- *Caso n.º 5.*—Tramo con prohibición de adelantamiento y limitación de velocidad a 60 km/h. en un 50 por 100 de su longitud (Fig. 4).

Cada una de las gráficas que se adjuntan está compuesta por tres nubes de puntos, correspondientes a las categorías analizadas. Por otra parte, cada uno de los puntos representa (para



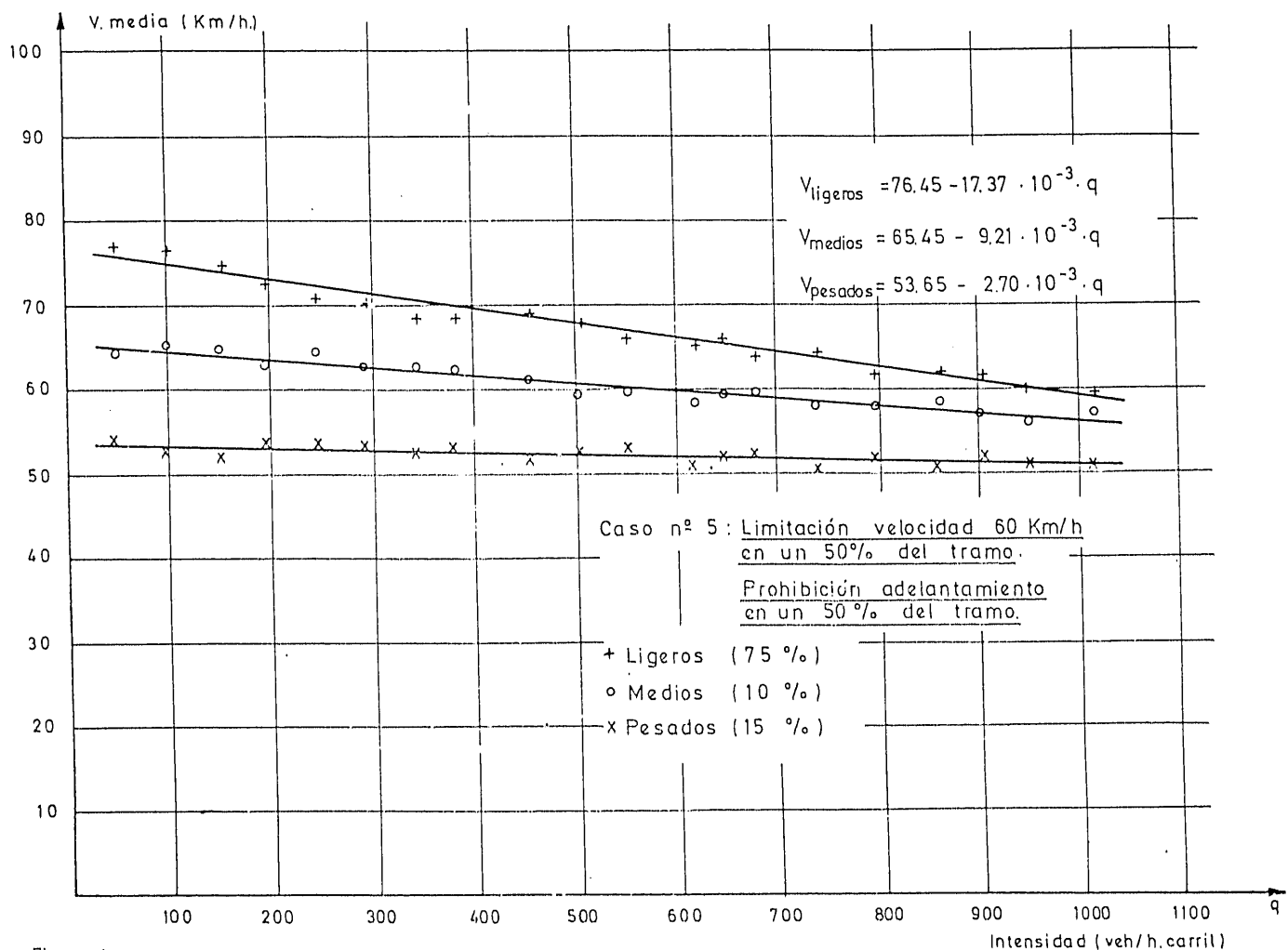


Figura 4.

la categoría que se trate), una pareja de valores «velocidad media de recorrido-intensidad» y ha sido obtenido a partir del ordenador mediante determinación simultánea de:

- Tiempo transcurrido desde que el primer vehículo abandonó el tramo hasta que lo hizo el último.
- Media aritmética de los tiempos empleados en recorrer el tramo por los vehículos correspondientes a la categoría en cuestión.

Del análisis de las figuras presentadas puede deducirse que:

1. Las distintas nubes de puntos se ajustan prácticamente a una recta, para cada una de las categorías.
2. Tales gráficas son, lógicamente, decrecientes, como corresponde a una dismi-

nución de la velocidad media de recorrido frente a un incremento en la intensidad de tráfico.

3. La pendiente es mayor (en valor absoluto), para los vehículos de las categorías más rápidas.
4. La existencia conjunta de prohibición de adelantamiento y limitación de velocidad produce una disminución apreciable en las velocidades medias para intensidades débiles, si bien lamina el efecto del incremento de tráfico.

6. CONCLUSIONES

De todo lo expuesto pueden extraerse las siguientes conclusiones fundamentales:

1. Es factible la simulación, mediante orde-

nador, de la dinámica del movimiento de vehículos en carretera, teniendo en cuenta la mayor parte de los elementos que inciden sobre este complejo fenómeno.

- Un modelo de simulación de tráfico como el que aquí se ha presentado tiene como ventaja su generalidad (en este caso, en lo que a carreteras de dos carriles se refiere), pudiendo ser analizado el movimiento de los vehículos para muy distintos tipos de tráfico, naturaleza de los conductores, características de la carretera, etc... Pueden estudiarse situaciones de tráfico correspondientes a diversos países, e incluso situaciones ficticias, que en un futuro pudieran producirse. Esto es obviamente imposible de lograr a partir de mediciones en la realidad.
- Por el contrario, si se pretende conocer el movimiento de los vehículos en una circunstancia real y concreta, será necesario estudiar previamente los valores de las variables básicas contempladas en el modelo. Para ello será inevitable la realización de ciertas medidas de campo.

ANEJO N.º 1

Velocidad libre en rampa.

La variable denominada «velocidad libre en rampa de inclinación dada» (v_p) es función, para cada vehículo, de su «velocidad libre en recta y llano» (v_0) y de su «relación potencia máxima utilizada/peso real» (γ), tal como se definió en el apartado segundo.

En efecto, cuando un vehículo circula libremente en «recta y llano», su movimiento es uniforme, y su velocidad igual a la velocidad libre (v_0) (hipótesis n.º 2). Además desarrollará una potencia igual a la llamada «potencia máxima utilizada» (hipótesis n.º 5). En esta situación su esfuerzo tractor (F_t) será igual al esfuerzo resistente (F_r), el cual puede expresarse por la conocida ecuación:

$$F_t = F_r = K_r \cdot G + K_v \cdot v_0^3 \quad (6)$$

donde:

K_r : Coeficiente de rozamiento a la rodadura.

G : Peso real del vehículo (tara más carga).

K_v : Coeficiente de resistencia al avance (debido al rozamiento vehículo-aire).

La potencia utilizada será entonces:

$$P = F_t \cdot v_0 = K_r \cdot G \cdot v_0 + K_v \cdot v_0^3 \quad (7)$$

dividiendo por G , resulta:

$$\frac{P}{G} = \gamma = K_r \cdot v_0 + \frac{K_v}{G} v_0^3 \quad (8)$$

Dado que en esta ecuación (8) se conocen los valores de « γ » y « v_0 », (obtenidos por simulación) y que, por otra parte, el coeficiente dimensional K_r se mantiene prácticamente constante con el tipo de firme y la velocidad del móvil, con lo que puede ser introducido como dato, puede despejarse de (8) el valor de K_v/G , resultando:

$$\frac{K_v}{G} = \frac{\gamma - K_r \cdot v_0}{v_0^3} \quad (9)$$

Ahora bien, si este vehículo circula libremente por una rampa de inclinación « i », de longitud suficiente para que su movimiento se haya estabilizado, lo hará a su «velocidad libre en rampa de inclinación dada» (v_p), incógnita del problema. Además, según la hipótesis n.º 5, desarrollará una potencia igual a la «potencia máxima utilizada» y puesto que su movimiento es uniforme podrá escribirse:

$$F_t = F_r = (K_r + i)G + K_v \cdot v_p^3 \quad (10)$$

análogamente se tendrá:

$$\gamma = \frac{P}{G} = \frac{F_t \cdot v_p}{G} = (K_r + i) \cdot v_p + \frac{K_v}{G} \cdot v_p^3 \quad (11)$$

sustituyendo $\frac{K_v}{G}$ de (9) en (11):

$$\gamma = (K_r + i) \cdot v_p + \frac{\gamma - K_r \cdot v_0}{v_0^3} \cdot v_p^3 \quad (12)$$

de donde, operando:

$$v_p^3 + (K_r + i) \cdot \frac{v_0^3}{\gamma - K_r \cdot v_0} \cdot v_p - \frac{\gamma \cdot v_0^3}{\gamma - K_r \cdot v_0} = 0 \quad (13)$$

expresión que representa una ecuación polinómica de tercer grado de la forma:

$$v_p^3 + p \cdot v_p + q = 0$$

cuyas tres soluciones vienen dadas por la fórmula de «Tartaglia»:

$$v_p = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (14)$$

donde:

$$p = \frac{(K_r + i) v_0^3}{\gamma - K_r \cdot v_0} \quad (15)$$

$$q = -\frac{\gamma \cdot v_0^3}{\gamma - K_r \cdot v_0} \quad (16)$$

Ahora bien, como:

$$\gamma - K_r \cdot v_0 = \frac{K_v}{G} v_0^3 > 0$$

resulta:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$

y, por tanto, la expresión (14) tiene una única raíz real, que es la solución buscada.

De esta forma, conocidas para cada vehículo su «velocidad libre en recta y llano» (v_0) y su «relación potencia máxima utilizada/peso real» (γ), y fijado el valor del coeficiente K_r , puede determinarse su velocidad libre en rampa de inclinación « i », por aplicación de la ecuación (14).

ANEJO N.º 2

«Tiempo mínimo» de aparición de un vehículo con respecto del anterior

A efectos de obtener el instante en que el vehículo « i » entra en el tramo de estudio, y tal como se vió en el apartado 3.2., es preciso determinar previamente un valor, que se ha llamado «tiempo mínimo», por debajo del cual se supone que no es posible su aparición. Este «tiempo mínimo» (t_m), será el necesario para que el vehículo anterior (« $i-1$ ») recorra una cierta distancia mínima de seguridad (S_m), a fin de que pueda dejar camino libre al vehículo posterior.

La distancia mínima que acaba de citarse

equivale a la «separación bruta mínima» entre dos vehículos que circulen a idéntica velocidad (v), y viene dada por la expresión:

$$S_m = l_{i-1} + S_0 + t_r \cdot v \quad (17)$$

siendo:

l_{i-1} : longitud del vehículo « $i-1$ ».

S_0 : hipotética separación neta de seguridad entre dos vehículos detenidos. Es fijada arbitrariamente.

t_r : tiempo de reacción de un conductor.

El problema se plantea por el hecho de que el valor « v » representa la velocidad del vehículo « $i-1$ » en el instante de producirse la entrada del vehículo « i ». Pero este instante no es conocido mientras que no lo sea el «tiempo mínimo», valor que para poder ser determinado es preciso el conocimiento de la separación S_m o, lo que es lo mismo, del valor « v ». Se ha cerrado así un círculo, que no permite una solución exacta de la cuestión.

Para obviar este inconveniente se procede al estudio de dos casos extremos:

— *Caso n.º 1.*— El vehículo « $i-1$ » circula, desde su introducción en el tramo, con velocidad uniforme durante un tiempo « t_1 » ($t_1 < t_m$), y el resto del tiempo ($t_m - t_1$) frenando con la máxima deceleración posible (D) (Fig. 5).

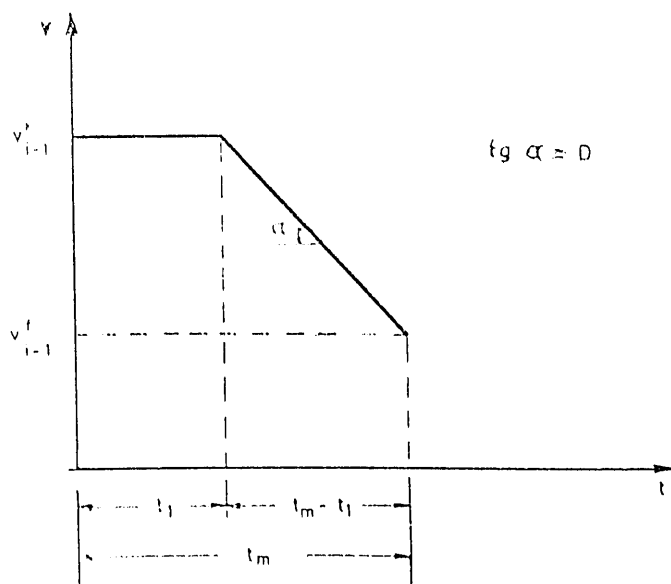


Figura 5.

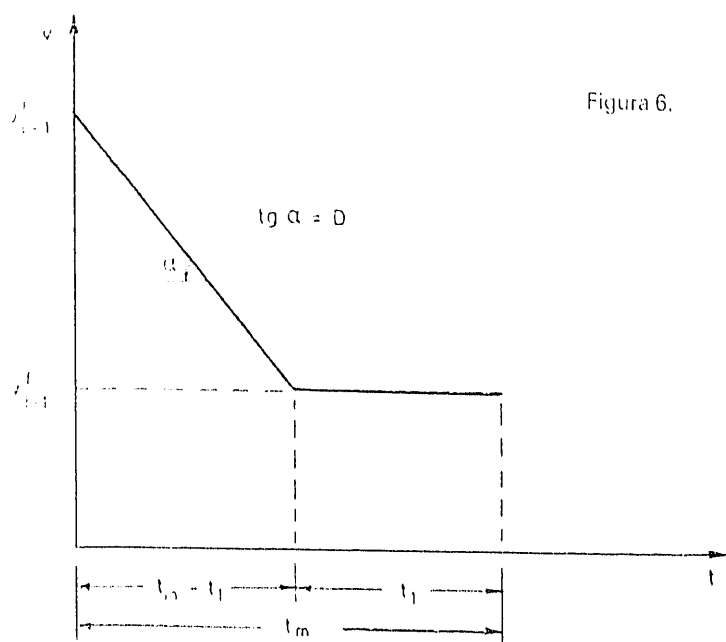


Figura 6.

— Caso n.º 2.—El vehículo «i-1» frena desde el mismo instante de su introducción en el tramo durante un tiempo « $t_m - t_1$ », con la máxima deceleración D , y continúa con movimiento uniforme (Fig. 6).

Puede verse que, cualquiera que fuere el tipo de movimiento que de hecho desarrollase el vehículo «i-1», estaría comprendido entre los dos citados. Imponiendo, para ambos casos, que la distancia recorrida por el vehículo «i-1» durante el «tiempo mínimo» (de momento, desconocido) sea igual a la mencionada distancia mínima, (también incógnita), resultan las siguientes ecuaciones:

Caso n.º 1:

$$\frac{1}{2} D \cdot t_m^2 - (v + D(t_1 + t_i)) \cdot t_m + l_{i-1} + S_0 + t_i \cdot v + \frac{1}{2} D \cdot t_i^2 + D \cdot t_i \cdot t_1 = 0 \quad (18)$$

Caso n.º 2:

$$\frac{1}{2} D \cdot t_m^2 - (v + D \cdot t_i) \cdot t_m + l_{i-1} + S_0 + t_i \cdot v + D \cdot t_i \cdot t_1 - \frac{1}{2} D \cdot t_i^2 = 0 \quad (19)$$

representado ahora « v » la velocidad del vehículo «i-1» a la entrada del tramo, conocida.

Se conocen pues: v , D , t_i , l_{i-1} y S_0 , siendo las incógnitas t_1 y t_m .

Las ecuaciones (18) y (19) representan funciones implícitas de la forma $f(t_m, t_1) = 0$. La ecuación (18) presenta un único extremo relativo (mínimo), para $t_1 = t_m - t_i$, de valor:

$$t_{m,1} = \frac{l_{i-1} + S_0 + t_i \cdot v - 1/2 D \cdot t_i^2}{v} \quad (20)$$

Análogamente la ecuación (19) presenta un único extremo relativo (máximo), para $t_1 = t_i$, de valor:

$$t_{m,2} = \frac{v + D \cdot t_i - \sqrt{v^2 - 2D(l_{i-1} + S_0)}}{D} \quad (21)$$

Nótese que no resulta fácil afirmar cual de los dos valores ($t_{m,1}$ o $t_{m,2}$) es superior al otro, con el fin de obtener una cota superior del «tiempo mínimo».

Sin embargo, es evidente que los extremos izquierdos de las funciones dadas por (18) y (19) coinciden, ya que representan el caso de movimiento uniformemente decelerado durante todo el tiempo t_m ($t_i = 0$). Resulta así el valor:

$$t_{m,1} = \frac{l_{i-1} + S_0 + t_i \cdot v}{v} \quad (22)$$

Análogamente coinciden los extremos derechos de ambas funciones, ya que para $t_1 = t_m$ se tiene el caso de movimiento uniforme. Se obtiene:

$$t_{m,2} = \frac{v + D \cdot t_i - \sqrt{v^2 - 2D(l_{i-1} + S_0) + D^2 \cdot t_i^2}}{D} \quad (23)$$

El hecho de la coincidencia de ambas funciones en los extremos del intervalo $(0, t_m)$, unido a la concavidad de la función dada por (18) y convexidad de la representada por (19), en todo el citado intervalo, es suficiente para demostrar que el máximo relativo (dado por 21) es la cota superior del «tiempo mínimo», y el mínimo relativo (dado por 20) es una cota inferior de dicha incógnita que pretende determinarse. Tal circunstancia queda plasmada gráficamente en la figura n.º 7.

Para la gama de valores habituales de las variables V , D , t_i , l_{i-1} y S_0 puede comprobarse que la diferencia entre $t_{m,1}$ y $t_{m,2}$ es pequeña

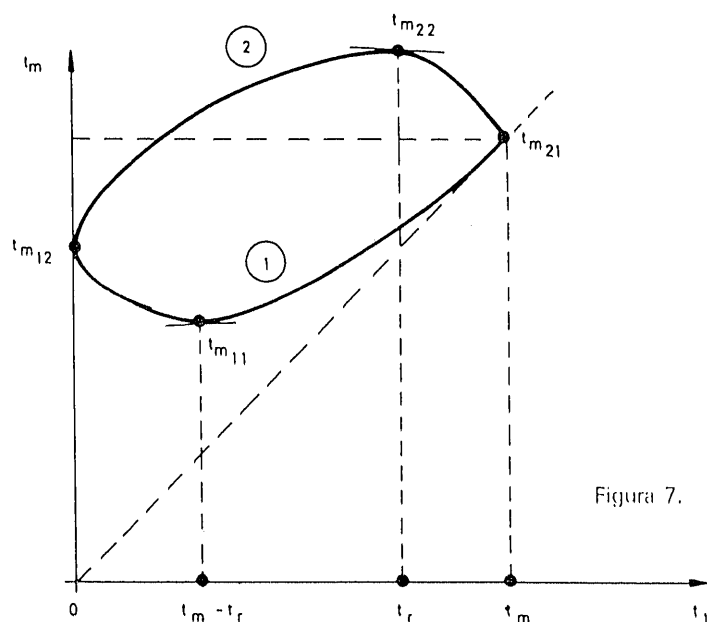


Figura 7.

comparada con dichos valores. Esta circunstancia aconseja la adopción de $t_{m_{12}}$ como «tiempo mínimo» ya que garantiza el cumplimiento de las condiciones exigidas sin por ello establecer diferencias sensibles con los valores exactos.

AGRADECIMIENTO

Queremos expresar nuestra gratitud a los Departamentos de Matemáticas y Transportes de la E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander, así como al personal del Centro de Cálculo de esta Universidad.

BIBLIOGRAFIA

- CAÑIZAL, F. 1981. «Análisis y evaluación del coste marginal social de congestión en carreteras de dos carriles». Tesis doctoral. Dirigida por Rafael Izquierdo de Bartolomé. Universidad de Santander.
- CASTILLO, E. 1978. «Introducción a la estadística aplicada».
- CONGRESO MUNDIAL DE LA CARRETERA (XVI). Viena, 1979. «Informe del Comité Técnico de Carreteras».
- O.C.D.E. 1972. Recherche Routière. «Routes a deux voies en rase campagne».