

# Simulación mediante un modelo numérico del movimiento de la interfaz en acuíferos costeros

Por JOSE FERRER POLO

Dr. Ingeniero de Caminos

FRANCISCO J. RAMOS RAMIS

Dr. Ingeniero de Caminos

*En el presente trabajo, tras una pequeña introducción, se expone el conjunto de ecuaciones diferenciales que constituyen el modelo matemático del movimiento, conjunto del agua dulce y salada en acuíferos costeros, admitiendo la existencia de una interfaz brusca y la hipótesis de Dupuit. Se plantea un modelo numérico, mediante el método de la diferencias finitas, demostrando a continuación su incondicional convergencia y estabilidad. Se indica a continuación el método de resolución elegido, así como el sistema utilizado para acelerar su velocidad de convergencia.*

*Se expone el problema planteado por la determinación de las condiciones de contorno, tanto en la zona de vertido al mar como en el pie de la interfaz, indicando un método para su determinación automática. A continuación se comprueba el citado método mediante la comparación de los resultados calculados por el modelo con soluciones analíticas, exactas o aproximadas.*

## 1. INTRODUCCION

En gran parte del litoral Mediterráneo Español las aguas subterráneas constituyen uno de los recursos más utilizados, habiendo contribuido en gran medida su uso al incremento del nivel de vida en la zona citada. El desarrollo cada vez mayor de esta zona ha provocado una demanda creciente de agua, recurriéndose de una forma masiva al empleo de pozos, por lo que en amplias zonas se está produciendo la salinización sistemática de los pozos debido a la extracción excesiva de agua dulce del acuífero.

Los hechos anteriores han motivado el presente trabajo cuya finalidad es la creación de un modelo numérico que permita el estudio del fenómeno de la intrusión salina de un modo seguro, eficaz y operativo, de forma que sea posible prever la situación futura del acuífero y evaluar los efectos que las distintas alternativas de explotación pueden tener sobre la evolución de la interfaz.

Existen dos formas de abordar el estudio de la intrusión salina, la más rigurosa consiste en considerar un sólo fluido, el agua, cuyo movimiento está regido por la conocida ecuación de flujo en medios porosos, en cuyo seno

se encuentra un soluto, cuyo movimiento está regido por la ecuación del transporte de masa convectivo-dispersivo, relacionándose ambas ecuaciones diferenciales a través de la ecuación que expresa el nivel piezométrico como una función de la presión hidrostática, la cota geométrica y la densidad del fluido, es decir la concentración de soluto en el. Este planteamiento más riguroso tropieza con dos problemas. unas necesidades de tiempo y almacenamiento de ordenador que lo hacen prohibitivo y una falta de suficientes datos reales que permitan su aplicación. Uno de los escasos casos en que se ha abordado el problema, aunque sólo en un plano perpendicular a la costa, es el debido a Segol, Pinder y Gray (1975).

La segunda forma de abordar el estudio de la intrusión salina consiste en considerar dos fluidos agua dulce y agua salada, inmiscibles y separados, por tanto, mediante una interfaz brusca de forma que sobre ella la presión ejercida por los dos fluidos es la misma. Con las suposiciones anteriores es posible reducir mucho los problemas del planteamiento anterior, por lo que, con mayor o menor acierto, es posible citar los trabajos debidos a Bonnet y Sauty (1975), Layla (1980) y Mercer y otros (1981). Este trabajo pretende mejorar a los

autores citados creando un modelo numérico que cumpla los siguiente:

1. Que sea eficiente, tanto desde el punto de vista de la velocidad de cálculo, como de la memoria necesaria.
2. Que sea incondicionalmente convergente y estable.
3. Que genere las condiciones de contorno de la interfaz, tanto en la costa como en el pie de la interfaz.

## 2. EL MODELO MATEMATICO

El modelo matemático que se expone a continuación exige admitir las hipótesis siguientes:

1. El agua dulce y el agua salada se consideran fluidos inmiscibles.
2. Es válida la hipótesis de Dupuit, siendo despreciables por tanto las componentes verticales de la velocidad.
3. Es válida la ley de Darcy.
4. Las propiedades del suelo y los fluidos se mantienen constantes en el tiempo.
5. La permeabilidad y coeficiente de almacenamiento no varían en una misma vertical.

De acuerdo con estas hipótesis el modelo matemático que representa el fenómeno de la intrusión salina en acuíferos costeros viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales y sus correspondientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_d(h^d - h^i) \frac{\partial h^d}{\partial x} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_d(h^d - h^i) \frac{\partial h^d}{\partial y} \right] + q = S_d \frac{\partial h^d}{\partial t} - \\ & - \theta \frac{\partial h^i}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_s(h^i - Z^i) \frac{\partial h^s}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_s(h^i - Z^i) \frac{\partial h^s}{\partial y} \right] = \\ & = S_s \frac{\partial h^s}{\partial t} + \theta \frac{\partial h^i}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} h^i &= \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_d} h^s - \frac{\rho_d}{\rho_s - \rho_d} h^d = \\ &= \alpha_s h^s - \alpha_d h^d \end{aligned} \quad (3)$$

el significado de las distintas variables puede verse en las figuras 1-a y 1-b. Si el acuífero es confinado deberá sustituirse en (1)  $(h^d - h^i)$  por  $(Z^i - h^i)$ .

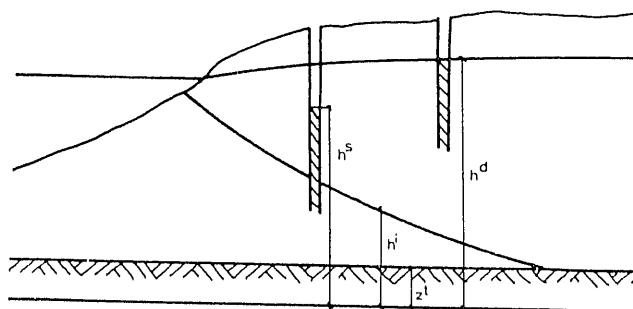


Fig 1-a

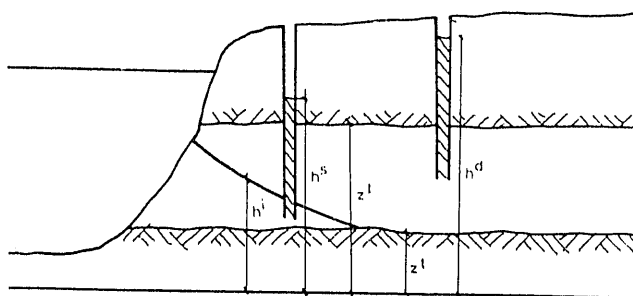


Fig 1-b

Las ecuaciones (1) y (2) son las expresiones matemáticas de la ecuación de la continuidad, aceptando las hipótesis 2 y 3, extendida a las zonas del acuífero ocupados respectivamente por agua dulce y salada. La ecuación (3) es la condición de contorno común a ambas ecuaciones, que expresan la igualdad de presiones, sobre la interfaz, en ambos fluidos.

Admitiendo la hipótesis (5) entre las variables  $k_d$  y  $k_s$ , permeabilidades en agua dulce y salada, y  $S_d$  y  $S_s$ , coeficientes de almacenamiento en agua dulce y salada existen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{\rho_s}{\rho_d} K_d \\ S_s &= \frac{\rho_s}{\rho_d} S_d \quad (\text{en acuíferos confinados}) \end{aligned}$$

$S_d = \theta$  y  $S_s \approx 0$  (en acuífero libre) donde  $\rho$  representa las densidades de los fluidos.

El sistema de ecuaciones formado por (1), (2) y (3) puede reducirse a un sistema de dos ecuaciones, que son:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_d \frac{\partial h^d}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_d \frac{\partial h^d}{\partial y} \right) + q = S_d(1 + \alpha) \frac{\partial h^d}{\partial t} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_s \frac{\partial h^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_s \frac{\partial h^s}{\partial y} \right) &= \\ &= (S_s + \theta \alpha_s) \frac{\partial h^s}{\partial t} - \theta \alpha_d \frac{\partial h^d}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

donde:

$$T_d = K_d(h^d - h'), T_s = K_s(h' - Z') \text{ (acuífero libre).} \quad (6)$$

$$T_d = K_d(Z' - h'), T_s = K_s(h' - Z') \text{ (acuífero confinado).}$$

$$\alpha = \frac{\theta}{S_d} \left[ \alpha_d - \alpha_s \left( \frac{\partial h^s}{\partial t} / \frac{\partial h^d}{\partial t} \right) \right] \quad (7)$$

Por comparación de (1) y (4) puede comprobarse que (7) puede expresarse también como:

$$\alpha = - \frac{\theta}{S_d} \left( \frac{\partial h^i}{\partial t} / \frac{\partial h^d}{\partial t} \right) \quad (8)$$

dado que las derivadas de  $h^i$  y  $h^d$  son de signos contrarios, el signo de  $\alpha$  será necesariamente positivo y por tanto será posible escribir las ecuaciones (4) y (5) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_d \frac{\partial h^d}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_d \frac{\partial h^d}{\partial y} \right) &= \\ &= \theta_d \frac{\partial h^d}{\partial t} - q \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_s \frac{\partial h^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_s \frac{\partial h^s}{\partial y} \right) &= \\ &= \theta_s \frac{\partial h^s}{\partial t} - q_s \end{aligned} \quad (10)$$

donde:

$$\theta_d = S_d(1 + \alpha) > 0 \quad (11)$$

$$\theta_s = S_s + \theta \alpha_s > 0 \quad (12)$$

$$q_s = \theta \alpha_d \frac{\partial h^d}{\partial t} \quad (13)$$

Las ecuaciones (9) y (10) son formalmente idénticas, lo cual permitirá un tratamiento numérico similar. En las citadas ecuaciones puede apreciarse el efecto que la variación de la interfaz tiene sobre cada una de las dos partes del sistema, sobre el agua dulce actúa aumentando su coeficiente de almacenamiento mediante el coeficiente de almacenamiento ficticio  $\theta_d$ , sobre el agua salada actúa no sólo aumentando el coeficiente de almacenamiento mediante el coeficiente de almacenamiento ficticio  $\theta_s$ , sino mediante un caudal ficticio  $q_s$ .

### 3. EL MODELO NUMERICO

La obtención de un modelo numérico que permita aproximar el modelo matemático definido por las ecuaciones (9) y (10), utilizando el método de las diferencias finitas exige discretizar la zona a estudiar mediante un mallado rectangular formado por celdas de dimensiones  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , nombrándose cada celda por un conjunto de dos subíndices  $i, j$ . El subíndice  $i$  es creciente en el sentido creciente de las  $x$ , y el  $j$  lo es respecto a las  $y$ .

Si las aproximaciones de las derivadas de  $h^d$  y  $h^s$  respecto al tiempo se efectúa mediante un esquema de diferencia hacia atrás, las aproximaciones numéricas de (9) y (10) en la celda  $i, j$  vienen dadas por (Ferrer y Ramos, 1981).

$$\begin{aligned} & - \frac{T_x^d(i-1, j)}{\Delta x^2} \frac{\Delta t}{\theta_d(i, j)} h^d(i-1, j) - \\ & - \frac{T_y^d(i, j-1)}{\Delta y^2} \frac{\Delta t}{\theta_d(i, j)} h^d(i, j-1) + \\ & + \left[ 1 + \left( \frac{T_x^d(i-1, j)}{\Delta x^2} + \frac{T_y^d(i, j-1)}{\Delta y^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{T_y^d(i, j)}{\Delta y^2} + \frac{T_x^d(i, j)}{\Delta x^2} \right) \frac{\Delta t}{\theta_d(i, j)} \right] h^d(i, j) - \\ & - \frac{T_y^d(i, j)}{\Delta y^2} \frac{\Delta t}{\theta_d(i, j)} h^d(i, j+1) - \\ & - \frac{T_x^d(i, j)}{\Delta x^2} \frac{\Delta t}{\theta_d(i, j)} h^d(i+1, j) = h^d(i, j) + q^d(i, j) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{T_x^s(i-1, j)}{\Delta x^2} \frac{\Delta t}{\theta_s(i, j)} h^s(i-1, j) - \\
& - \frac{T_y^s(i, j-1)}{\Delta y^2} \frac{\Delta t}{\theta_s(i, j)} h^s(i, j-1) + \\
& + \left[ 1 + \left( \frac{T_x^s(i-1, j)}{\Delta x^2} + \frac{T_y^s(i, j-1)}{\Delta y^2} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{T_x^s(i, j)}{\Delta y^2} + \frac{T_x^s(i, j)}{\Delta x^2} \right) \frac{\Delta t}{\theta_s(i, j)} \left. \right] h^s(i, j) - \\
& - \frac{T_x^s(i, j)}{\Delta y^2} \frac{\Delta t}{\theta_s(i, j)} h^s(i, j+1) - \\
& - \frac{T_x^s(i, j)}{\Delta x^2} \frac{\Delta t}{\theta_s(i, j)} h^s(i+1, j) = h_1^s(i, j) + q^s(i, j)
\end{aligned} \quad (15)$$

donde el subíndice 1 indica valores pertenecientes al intervalo de tiempo anterior y:

$$\theta_d(i, j) = S_d(i, j) [1 + \alpha(i, j)] \quad (16)$$

$$\theta_s(i, j) = S_s(i, j) + \theta(i, j) \alpha_s \quad (17)$$

$$q^d(i, j) = \Delta t q(i, j) / \theta_d(i, j) \quad (18)$$

$$q^s(i, j) = \alpha_d \theta(i, j) [h^d(i, j) - h_1^d(i, j)] / \theta_s(i, j) \quad (19)$$

$$\alpha(i, j) = \frac{\theta(i, j)}{S_d(i, j)} \left( \alpha_d - \alpha_s \frac{h^s(i, j) - h_1^s(i, j)}{h^d(i, j) - h_1^d(i, j)} \right) \quad (20)$$

El significado de las variables  $T$ , transmisividades, es el usual en los modelos de flujo en diferencias finitas y puede verse, entre otros, en Prickett y Lonquist (1971) aunque deberán considerarse algunas particularidades que se indicarán posteriormente.

El planteamiento de las ecuaciones (14) y (15) en las  $N$  celdas en que se ha dividido la zona de estudio conduce a las siguientes expresiones en forma matricial:

$$A h^d = h_1^d + q^d \quad (21)$$

$$B h^s = h_1^s + q^s \quad (22)$$

Para obtener los valores de  $h^d$  y  $h^s$  correspondientes a cada intervalo de tiempo bastaría, aparentemente, resolver los sistemas líneas de ecuaciones que representan las expresiones (21) y (22), sin embargo, debe considerarse el hecho de que para definir las matrices  $A$  y  $B$  y los vectores  $q^d$  y  $q^s$  es necesario conocer los valores de las incógnitas. Esta última condición obliga a seguir un sistema iterativo de resolución, de forma que

los valores de  $h^d$  y  $h^s$  utilizados en  $A$ ,  $B$ ,  $q^d$  y  $q^s$  son, en cada iteración, los de la iteración anterior.

Para efectuar cada iteración en las expresiones (21) y (22) pueden utilizarse dos métodos, bien obtener en forma directa las matrices inversas de  $A$  y  $B$  en cada iteración y con ello los valores de  $h^d$  y  $h^s$  necesarios para la iteración siguiente, o bien utilizar para resolver los sistemas de ecuaciones (21) y (22) un método iterativo de forma que no se complete el proceso iterativo para unas matrices  $A$  y  $B$  dadas sino que en cada iteración se corrijan  $A$  y  $B$  de acuerdo con los valores de  $h^d$  y  $h^s$  obtenidos. El segundo método es naturalmente mucho más eficiente, pues salvo que es necesario redefinir en cada iteración  $A$ ,  $B$ ,  $q^d$  y  $q^s$  el número de iteraciones es prácticamente el mismo que si los sistemas (21) y (22) fueran realmente lineales. Naturalmente para poder utilizar este sistema de resolución es necesario comprobar que las matrices  $A$  y  $B$  cumplen alguna condición que permita asegurar que es posible, en todos los casos, su resolución por métodos iterativos, en este caso puede comprobarse por simple inspección de (14) y (15) que se cumple una condición suficiente como es (Isaccson y Bishop, 1966) que para todo  $i$ :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left| \frac{b_{ij}}{b_{ii}} \right| < 1 \quad (23)$$

### 3.1. Estabilidad y convergencia

La utilización correcta de cualquier modelo numérico exige conocer el conjunto de condiciones bajo las que dicho modelo constituye una aproximación estable y convergente al modelo matemático que pretende representar. En este caso las expresiones (14) y (15) constituyen una aproximación numérica de (9) y (10).

Un modelo numérico se dice que es estable cuando su solución para unas condiciones de contorno dadas, es una función continua de los datos. Sobre la estabilidad de un modelo numérico influye no sólo el esquema numérico utilizado sino el método de resolución utilizado. En este caso, de acuerdo con (23), si se utiliza para la resolución un

método iterativo será posible obtener, en todos los casos, la solución de (21) y (22) por lo que el modelo numérico será incondicionalmente estable.

Un modelo numérico se dice que es convergente cuando los errores numéricos, que necesariamente se producen en cada intervalo de tiempo, son eliminados por el propio proceso de cálculo, impidiendo de esta forma su acumulación a lo largo del proceso. Esta eliminación se produce cuando las matrices que multiplicadas por los valores de las variables en el intervalo anterior nos dan los valores en el intervalo actual cumplen (Isaccson y Bishop, 1966) que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0 \quad (24)$$

donde O es la matriz nula.

Las expresiones (21) y (22) pueden también escribirse teniendo en cuenta (14), (15) y (19) como:

$$h^d = A^{-1} h^d + A^{-1} q^d \quad (25)$$

$$h^s = B^{-1} h^s + B^{-1} D (A^{-1} - I) h^d \quad (26)$$

El cumplimiento de (24) en (25) y (26) supone que deben cumplirse simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A^{-1})^n = 0 \quad (27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B^{-1})^n = 0 \quad (28)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [B^{-1} D (A^{-1} - I)]^n \quad (29)$$

La condición necesaria y suficiente para que se cumplan (27), (28) y (29) es que (Isaccson y Bishop, 1966) el máximo módulo de los autovalores de las matrices cuyo límite se trata de hallar sea menor que 1. Esta misma condición se puede expresar para sus matrices inversas de forma que el módulo del autovalor que lo tenga menor sea mayor que 1, puesto que las matrices inversas tienen los autovalores inversos.

La localización en el plano complejo, de los autovalores puede hacerse utilizando el teorema de Gerschgorin (Durand, 1972) que sitúa los autovalores en el interior del dominio formado por la unión de los N círculos de

centro los términos de la diagonal principal y radio la suma de los valores absolutos de los términos de cada fila que no pertenecen a la diagonal principal.

Por simple inspección de las expresiones (14) y (15) puede comprobarse que las matrices A y B cumplen para toda la fila i que:

$$a_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} |a_{ij}| = 1 \quad b_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} |b_{ij}| = 1 \quad (30)$$

es decir, que el centro menos el radio de los círculos indicados anteriormente es igual a 1, lo cual supone, puesto que  $a_{ii}$  y  $b_{ii}$  son reales y positivos, que el mínimo módulo posible de los autovalores es uno.

Para comprobar lo anterior en la expresión (29) será suficiente con comprobar que las tres matrices que allí aparecen lo cumplen separadamente, pues entonces su producto también lo cumplirá. De ellas la primera  $B^{-1}$  lo cumple, pues ya se ha demostrado. La matriz D puede comprobarse mediante (15), (19) y (26) que es una matriz diagonal, cuyos términos y por tanto sus autovalores cumplirán, teniendo en cuenta que  $S_s(i, j)$  corresponde a un coeficiente de almacenamiento de acuífero confinado, que:

$$d_{11} = \frac{\alpha_d \theta(i, j)}{S_s(i, j) + \theta(i, j) \alpha_s} \approx \frac{\alpha_d}{\alpha_s} < 1$$

por lo que la matriz D cumplirá la condición (24).

Dado que los autovalores de A se encuentran según (30) situados en el semiplano complejo tal que la parte real sea mayor o igual a 1, los autovalores de  $A^{-1}$  se encontrarán limitados a la zona del plano complejo definida por los números  $a + bi$  tales que  $0 \leq a \leq 1$  y  $-0,5 \leq b \leq 0,5$ . La matriz de  $A^{-1} - I$  se diferencia de la  $A^{-1}$  en que los términos de la diagonal principal son de la forma  $a_{ii} - 1$ , por lo que estarán situados sobre la zona de eje real comprendida entre  $-1$  y  $0$ , siendo el resto de los términos y, por tanto el radio de citados círculos, el mismo, con lo que los autovalores de  $A^{-1} - I$  estarán comprendidos en la zona de los números  $a + bi$ , tales que  $-1 \leq a \leq 0$  y  $-0,5 \leq b \leq 0,5$ , y dado que dentro de ella se inscriben los citados círculos de lo-

calización de los autovalores el máximo módulo posible de estos es 1.

De lo anterior se deduce que las matrices que aparecen en las expresiones (27), (28) y (29) son tales que el máximo módulo posible de sus autovalores es 1. Aunque el cumplimiento de las anteriores expresiones exigiría que el máximo módulo fuera menor que 1, esto no supone un incumplimiento de las anteriores expresiones puesto que al no ser las matrices anteriores una única matriz, sino una familia de matrices cada una de las cuales corresponde a un intervalo de tiempo basta con que la condición menor que 1 se cumpla en la mayoría de las matrices, lo cual ocurrirá puesto que la condición igual que 1 es sólo una cota superior del módulo de los autovalores. Por tanto el esquema numérico es incondicionalmente convergente.

#### 4. METODO DE RESOLUCION

Como se indica en 3, los métodos más eficientes para resolver los dos sistemas de  $N$  ecuaciones que aparecen en las expresiones (21) y (2) son los iterativos, en este caso se recomienda la utilización del ADI modificado con predictor (Prickett y Lonquist, 1971), debido a sus buenos resultados desde el punto de vista de velocidad y almacenamiento en el cálculo con ordenador.

Si se desea conservar la ventaja de la velocidad de cálculo es necesario separar del proceso de iteración las ecuaciones (15) en las que no se de intrusión salina, pues en estas celdas se cumple que:

$$\theta_d(i, j) = S_d(i, j); \theta_s(i, j) = 0; \partial h'/\partial t = 0 \quad (31)$$

Puede comprobarse que la segunda condición de (31) provoca que la ecuación (15) correspondiente deje de ser diagonalmente dominante, disminuyendo entonces notablemente la velocidad de cálculo. Este problema puede solucionarse separando las ecuaciones correspondientes del proceso de cálculo, de forma que el valor de  $h^s$  en ellas se calcula mediante (3) considerando  $h^i = z^i$  tras haber comprobado en cada iteración que para el valor de  $h^d$  actual y el de  $h^s$  de la iteración anterior  $h^i < z^i$ . En el caso en que  $h^i > z^i$  la ecuación (15) correspondiente se trataría a

a partir de esta iteración como las restantes en que existe interfaz. Para permitir el avance y retroceso de la interfaz se mantiene en las celdas en que no existe intrusión salina un valor de  $h^i = z^i + \xi$ , donde  $\xi$  es un valor pequeño como por ejemplo 1 mm., de forma que estas celdas actúan como condición de contorno del resto de celdas donde existe interfaz, puesto que no quedan totalmente desconectadas del resto de la zona de agua salada, manteniendo de esta forma la velocidad de cálculo en valores similares a los correspondientes a un acuífero normal.

#### 5. CONDICIONES DE CONTORNO DE LA INTERFAZ

En todos los modelos basados en las ecuaciones (1), (2) y (3) reseñados en el apartado 1 no se plantea como tratar el problema de las condiciones de control de la interfaz, tanto en su pie como en la costa.

El movimiento del pie de la interfaz no plantea ningún problema, como luego se verá, siguiendo las indicaciones expuestas en el apartado 4, de forma que la condición de contorno para la expresión (15), es en este caso,  $h^s$  conocida, obtenida mediante (3).

Las condiciones de contorno en la costa, si

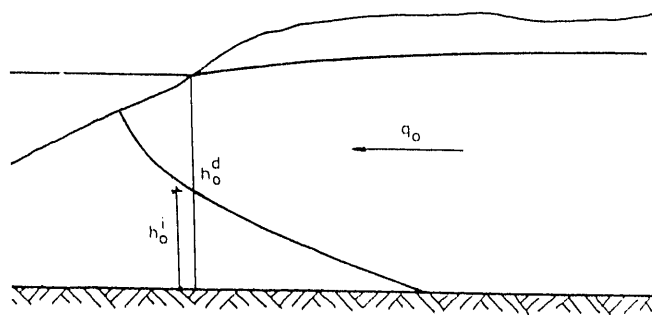


Fig. 2-a

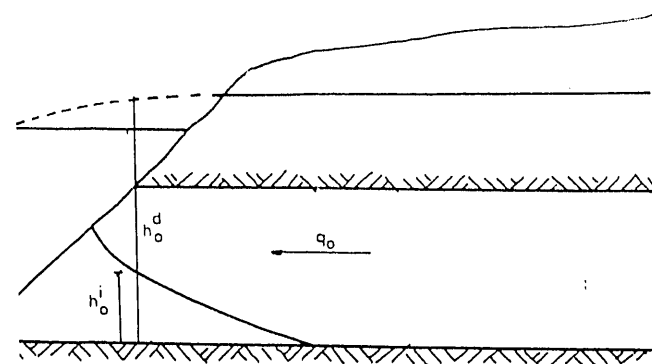


Fig. 2-b

el acuífero es libre, o en el afloramiento al mar, si el acuífero es confinado, son dos, el nivel piezométrico de agua dulce,  $h_g^d$ , y la posición de la interfaz,  $h_b$ , tal que se indica en las figuras 2-a y 2-b. La aceptación como únicas condiciones de contorno en la costa de las dos variables citadas supone admitir que el nivel piezométrico de agua salada en la costa  $h_g^s$  es conocido y si se acepta como hipótesis que su valor es el que corresponde al nivel medio del mar en la zona, lo cual es en la mayor parte de los casos suficientemente aproximado, es posible obtener los valores de las condiciones de contorno en la costa utilizando las soluciones analíticas estacionarias en función del caudal de agua dulce,  $q_o$ , que llega a la costa procedente del interior. Las expresiones de las condiciones de contorno en cada caso son:

a) Acuífero libre

$$h_g^d = h_g^s \quad (32)$$

$$h_b = h_g^s - \sqrt{\frac{\alpha_d - 1}{\alpha_s}} \frac{q_o \alpha_d}{K} \beta \quad (33)$$

b) Acuífero confinado

$$h_g^d = Z_o^i + \frac{\alpha_d}{\alpha_s} (h_g^s - Z_o^i) + \frac{q_o}{K} \beta \quad (34)$$

$$h_b = Z_o^i - \frac{q_o \alpha_d}{K} \beta \quad (35)$$

El parámetro  $\beta$  varía con la pendiente del terreno bajo el mar y se ha obtenido de forma analítica y experimental en los casos extremos, pendiente prácticamente nula y afloramiento vertical. El valor de  $\beta$  es el mismo tanto en el caso de acuífero libre como confinado, siendo  $\beta = 1$  para pendientes pequeñas (Verruijt, 1968 y Glover, 1959) y  $\beta = 0.741$  para afloramiento vertical (Vappicha y Nagaraja, 1975, Rummer y Harleman, 1962). En los casos normales puede tomarse  $\beta = 1$ , interpolando linealmente en función del ángulo que forma el terreno con la vertical.

Dado que las expresiones (32), (33), (34) y (35) son solución analítica en un plano perpendicular a la costa y están referidas a una franja de ancho unidad es necesario determinar, para cada celda situada en la costa, el punto A de la línea de costa que define la perpendicular desde ella al centro de la celda,

para lo cual se hace la hipótesis de que la línea de costa viene definida por la línea que une los centros de las celdas adyacentes según puede verse en la figura 3. Tras obtener el punto A es posible, mediante una interpolación lineal, conocer los valores de  $h^d$ ,  $h^i$ ,  $Z^i$ ,  $Z^i$  y  $k$  en dicho punto, y a través de ellos el caudal unitario que va desde él a la costa y calcular por tanto las condiciones de contorno en ella, condiciones de contorno que son corregidas en cada iteración hasta obtener el grado de ajuste deseado.

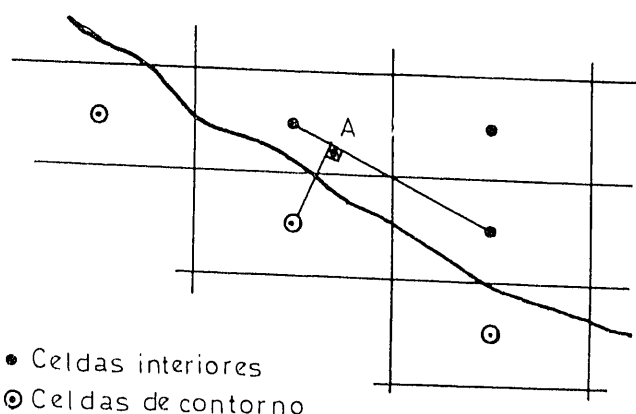


Fig 3

## 6. VALIDACION DEL MODELO

La validación del modelo numérico se ha efectuado en base a la obtención mediante él de las soluciones analíticas de algunos casos de solución conocida. Se han comparado tres casos, el correspondiente a soluciones analíticas estacionarias, el correspondiente a soluciones analíticas transitorias que incluyan variación de las condiciones de contorno en la costa y, por último, el correspondiente a soluciones analíticas transitorias que incluyan sólo una variación del pie de la interfaz.

De las comprobaciones realizadas, que luego se exponen, se ha concluido que la mejor forma de aproximar la permeabilidad entre nudos es la obtenida mediante la media armónica de las permeabilidades, siendo la mejor forma de aproximar los espesores saturados distinta según que el acuífero sea libre, media geométrica, o confinado, media aritmética de los espesores saturados. Las comprobaciones siguientes se ha realizado teniendo en cuenta las conclusiones anteriores.

### 6.1. Comprobación de soluciones analíticas estacionarias

Se han comprobado dos casos, uno correspondiente a acuífero libre y otro a acuífero confinado. En ambos casos se parte de unos valores arbitrarios de  $h^d$  y  $h^i$ , obtenido mediante (3)  $h^s$ , y manteniendo las condiciones de contorno constante se considera que se ha alcanzado el estado estacionario cuando en todas las celdas donde existe interfaz  $h^s$  es igual a la correspondiente al nivel del mar.

Dado que las soluciones analíticas de que se dispone corresponden a un problema unidimensional el caso resuelto tanto para acuífero libre como confinado corresponde a un acuífero de dimensión perpendicular a la costa 1.000 m. y dimensión paralela 300 m., las condiciones de contorno son de límite impermeable en los lados mayores y caudal constante en el lado menor opuesto a la costa, creándose las condiciones de contorno en la costa mediante las expresiones (32), (33), (34) y (35), según los casos.

Las soluciones analíticas estacionarias son, para cada caso, las siguientes:

a) Acuífero libre (Verruijt, 1968, Vappicha y Nagaraja, 1975):

$$h^i = h_o^s - \sqrt{\frac{2\alpha_d^2}{K\alpha_s} q_o x + \frac{\alpha_d - 1}{\alpha_s} \left( \beta \frac{\alpha_d}{K} q_o \right)^2} \quad (36)$$

$$h^d = h_o^s + \sqrt{\frac{2}{K\alpha_s} q_o x} \quad (37)$$

b) Acuífero confinado (Glober, 1959, Rummer y Harleman, 1963).

$$h^i = Z' - \sqrt{\frac{2\alpha_d}{K} q_o x + \left( \beta \frac{\alpha_d}{K} q_o \right)^2} \quad (38)$$

$$h^d = Z' + \frac{\alpha_s}{\alpha_d} (h_o^s - Z') + \sqrt{\frac{2}{K\alpha_d} q_o x + \beta \frac{q_o}{K}} \quad (39)$$

Las variables que son comunes a ambos casos son:

$$\begin{aligned} Z' &= 0 \text{ m.} & L_x &= 300 \text{ m.} \\ h_o^s &= 100 \text{ m.} & L_y &= 1.000 \text{ m.} \\ \theta &= 0,1 & \Delta x &= 100 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= 100 \text{ m.} & \rho_s &= 1.025 \text{ kg/m}^3 \\ \Delta t &= 60 \text{ d.} & \rho_d &= 1.000 \text{ kg/m}^3 \\ K_d &= 60 \text{ m/d} \end{aligned}$$

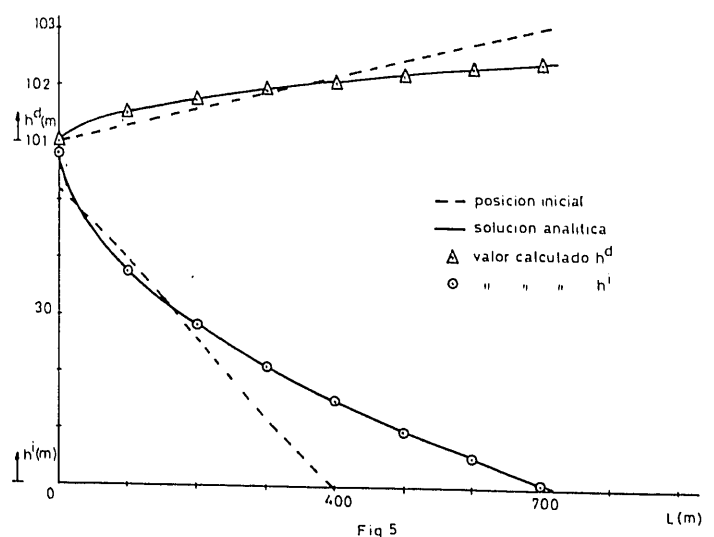
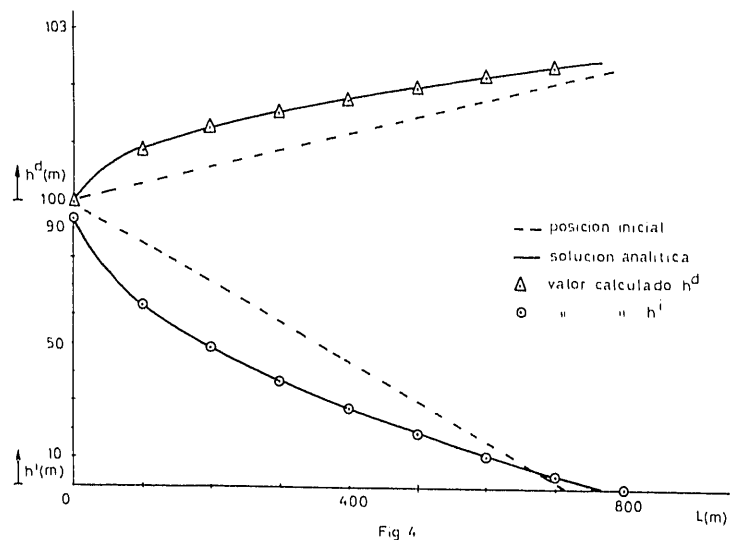
En el caso de acuífero libre se tiene:

$$\beta = 1 \quad q_o = 10 \text{ m}^2/\text{día}$$

En el caso de acuífero confinado se tiene:

$$Z' = 60 \text{ m.} \quad \beta = 0,741 \quad S_d = 10^{-4} \quad q_o = 5 \text{ m}^2/\text{día}$$

En las figuras 4 y 5 puede verse la comparación entre los valores analíticos y calculados así como las condiciones iniciales, como puede observarse el modelo se ajusta muy bien a la solución analítica, lo cual indica



su adecuación para obtener el estado estacionario que corresponde a una alternativa de explotación constante en el tiempo, partiendo de cualquier situación inicial.

## 6.2. Comparación de soluciones analíticas transitorias incluyendo variación de las condiciones de contorno en la costa

La solución analítica de que se dispone no es exacta sino sólo aproximada, pues para el planteamiento de la ecuación diferencial a resolver (Vappicha y Nagaraje, 1975) se han efectuado dos hipótesis, la primera es que la forma de la interfaz coincida, en toda su longitud, con la solución estacionaria dada por (37) ó (39), según los casos, para un valor de  $q_0$  igual al que se está vertiendo al mar en cada momento, la segunda consiste en despreciar la variación en el almacenamiento debido a la variación del nivel piezométrico. Debido a estas dos hipótesis la solución obtenida no es totalmente correcta obteniéndose mayor error en el caso de acuífero libre debida a que, en este caso, la influencia de la segunda hipótesis es mayor.

Con los condicionantes anteriores una solución analítica aproximada del tiempo para el que el espesor de la interfaz en la costa es  $y_c$ , cuando se produce un cambio brusco del caudal sobre el pie de la interfaz  $Q_p = Q_0$ , con un espesor de la interfaz  $y_0^e$ , a otro caudal  $Q_1$  viene dada por:

$$t = -\frac{C}{A} \left( \frac{1}{y_0^e} - \frac{1}{y_c} - \frac{B}{A} \ln \frac{y_c}{y_0^e} \right) - \frac{G}{B} (y_c - y_0^e) - \left( \frac{BC}{A^2} + \frac{E}{B} - \frac{AG}{B^2} \right) \ln \left( \frac{A + B y_c}{A + B y_0^e} \right) \quad (40)$$

donde las constantes que en ella aparecen son:

$$A = -\frac{6 Q_1}{N \theta \beta} \quad B = \frac{6 M K}{N \theta \beta^2 \alpha} \quad C = b^3$$

$$E = 3 b \quad M = N = 1 \quad (\text{acuífero confinado})$$

$$M = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_d - 1}} \quad y$$

$$N = \frac{\sqrt{\alpha_s (\alpha_d - 1)}}{\alpha_d} \quad (\text{acuífero libre})$$

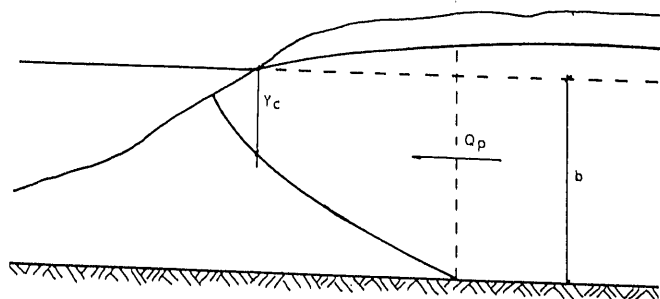


Fig 6-a

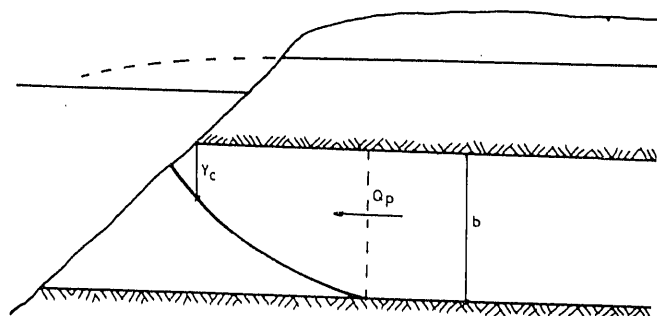


Fig 6-b

El significado de algunas variables puede verse en las figuras 6-a y 6-b.

Se han comprobado dos casos, tanto para acuífero libre como confinado uno de avance de la interfaz,  $Q_0 = 10 \text{ m}^2/\text{d}$  y  $Q_1 = 5 \text{ m}^2/\text{d}$ , y otro de retroceso  $Q_0 = 5 \text{ m}^2/\text{d}$  y  $Q_1 = 10 \text{ m}^2/\text{d}$ . Los datos comunes a ambos casos son:

|                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| $Z' = 0 \text{ m.}$         | $\theta = 0,2$                  |
| $h_s^0 = 100 \text{ m.}$    | $K_d = 60 \text{ m/día}$        |
| $\beta = 0,741$             | $L_x = 300$                     |
| $L_y = 1.000 \text{ m.}$    | $\Delta t = 10 \text{ d}$       |
| $\Delta x = 100 \text{ m.}$ | $\rho_d = 1.000 \text{ kg/m}^3$ |
| $\Delta y = 100 \text{ m.}$ | $\rho_s = 1.025 \text{ kg/m}^3$ |

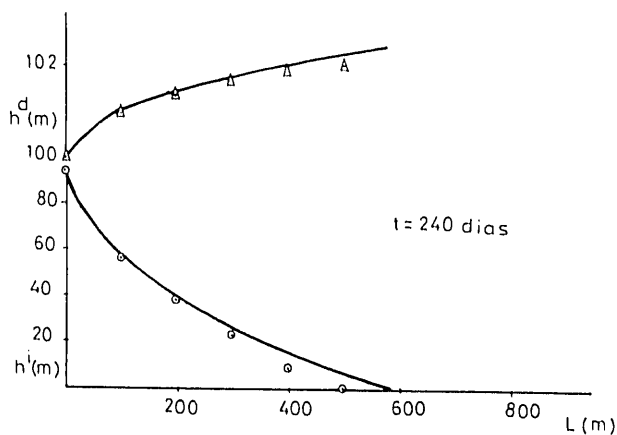
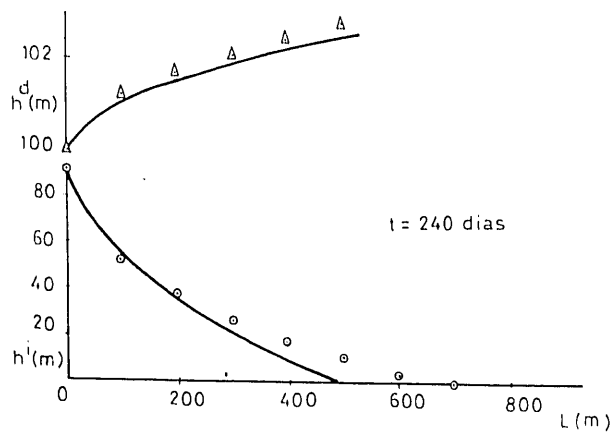
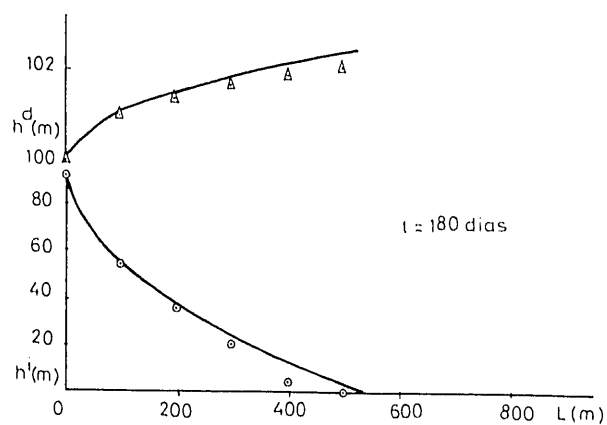
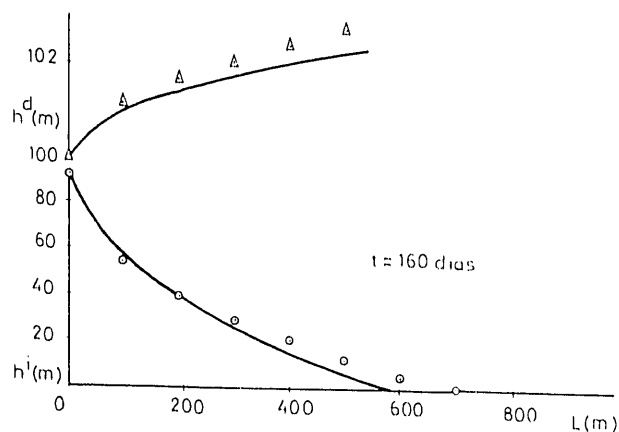
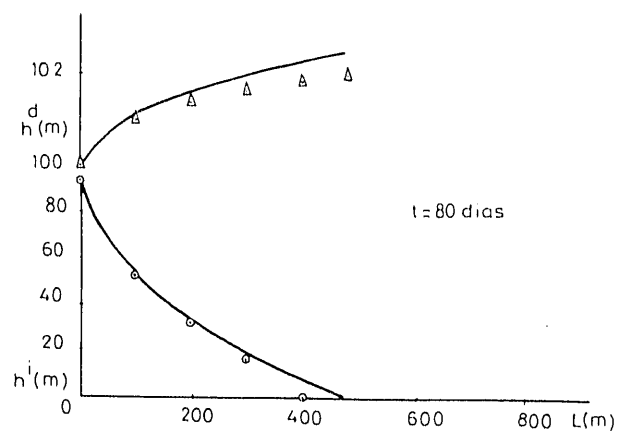
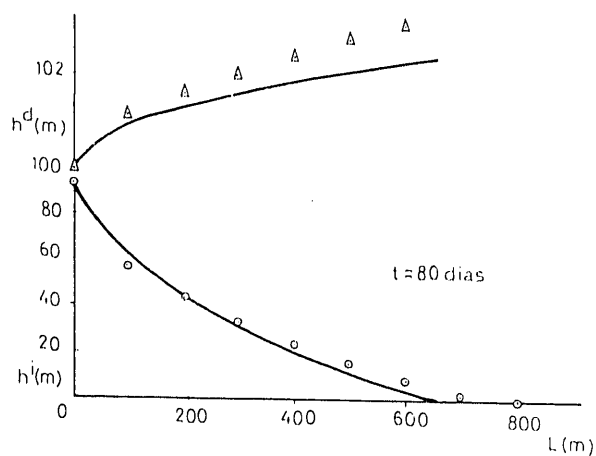
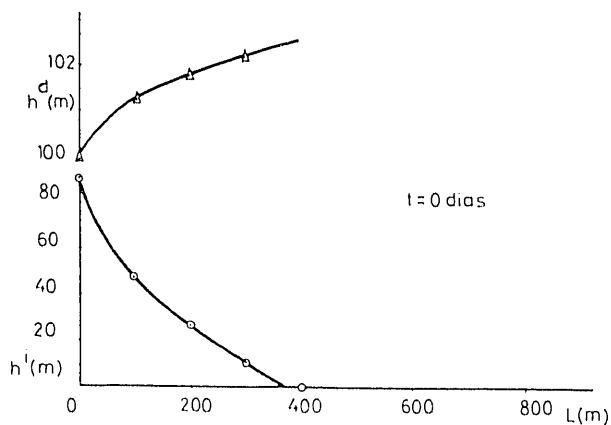
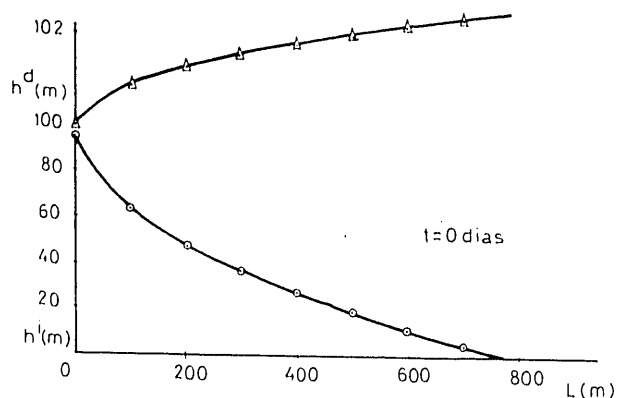
para el acuífero confinado:

$$Z' = 60 \text{ m.} \quad S_d = 10^{-4}$$

Para el caso de acuífero libre puede verse la comparación entre los valores analíticos aproximados y los calculados, para cuatro instantes distintos, en las figuras 7, para interfaz retrocediendo, y en las figuras 8 para interfaz avanzado. Análogamente para el caso de acuífero confinado pueden verse las figuras 9 y 10.

Como puede comprobarse, por simple

# SIMULACION MEDIANTE UN MODELO NUMERICO DEL MOVIMIENTO DE LA INTERFAZ



— solución analítica aproximada  
 $\Delta$  valor calculado de  $h^d$   
 $\circ$  " " "  $h^i$

Fig 7

— solución analítica aproximada  
 $\Delta$  valor calculado de  $h^d$   
 $\circ$  " " "  $h^i$

Fig 8

# SIMULACION MEDIANTE UN MODELO NUMERICO DEL MOVIMIENTO DE LA INTERFAZ

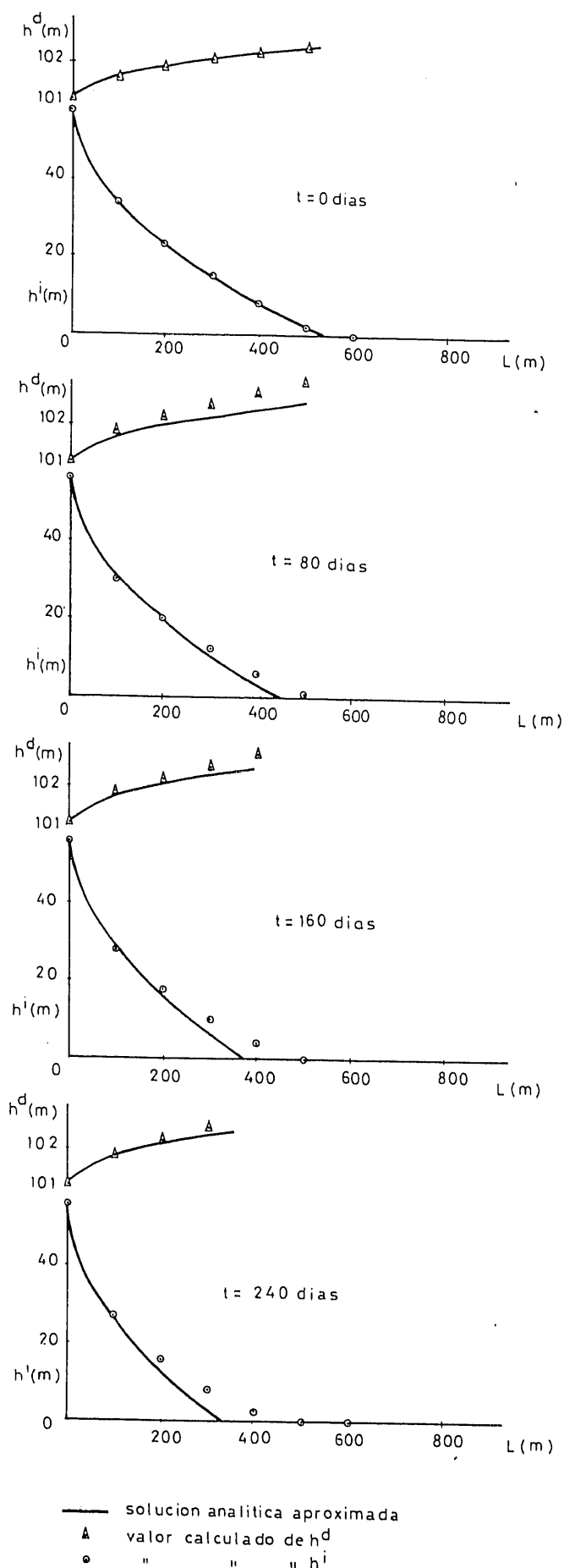


Fig 9

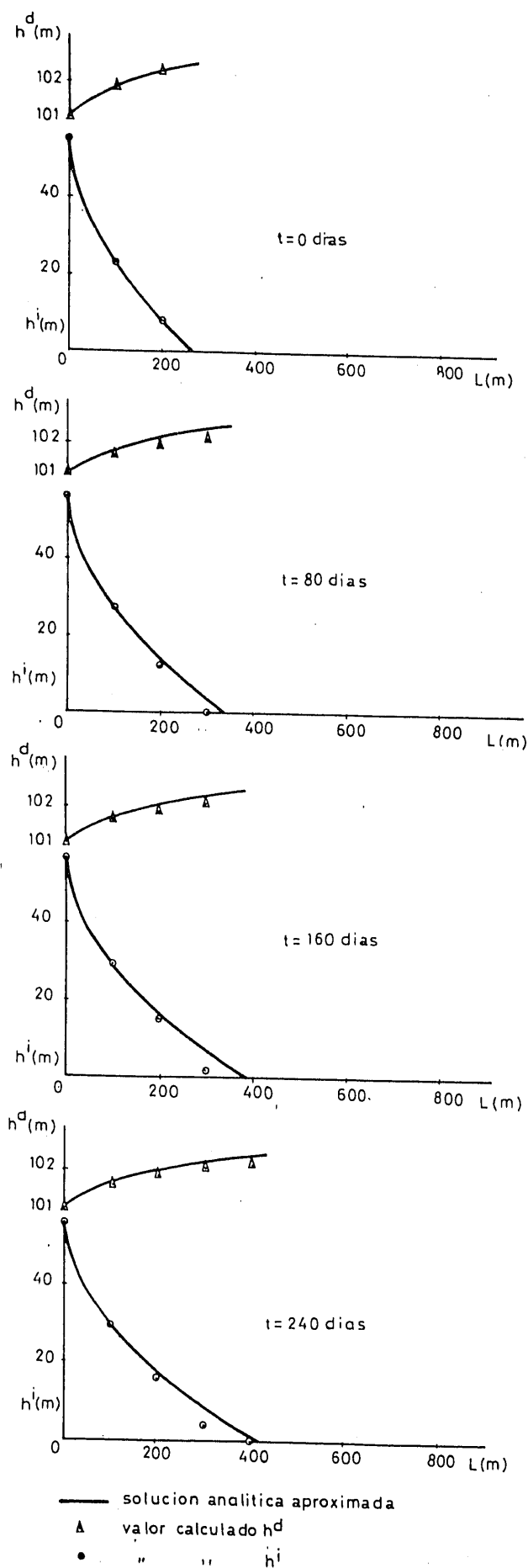


Fig 10

inspección de las figuras citadas en el párrafo anterior, el ajuste es total en la costa, punto donde las dos hipótesis hechas para obtener (40) son totalmente válidas, produciéndose un distanciamiento entre los valores analíticos y calculados que aumenta con la distancia a la costa, puesto que a mayor distancia tanto más incorrectas son las hipótesis realizadas para obtener (40). Como ya se indica el ajuste es mejor en el caso de acuífero confinado, pues en el la segunda hipótesis es prácticamente válida en todos los puntos del acuífero.

Debe indicarse que las discordancias observadas entre las dos soluciones y en el mismo sentido, movimiento más lento de la interfaz calculada, ya fueron comprobadas mediante experimentos realizados en el laboratorio por Vappichia y Nagaraja (1975), lo cual es otro punto a favor del método indicado en el apartado 5 para establecer las condiciones de contorno de la interfaz en la costa.

### 6.3. Comprobación de soluciones analíticas transitorias sin incluir una variación de las condiciones de contorno en la costa

Como última comprobación y para confirmar que el modelo es capaz de reproducir satisfactoriamente el movimiento del pie de la interfaz, se utiliza la solución analítica debida a Keulegan (1954), la cual corresponde al caso de un acuífero confinado con nivel constante de agua dulce y salada en ambos extremos e interfaz inicial vertical. Dado que no se produce vertido en la costa las condiciones de contorno en ella no intervienen, permitiendo comprobar como reproduce el modelo el movimiento del pie de la interfaz, el cual viene dado en función del tiempo y tomando como origen de medidas la posición inicial de la interfaz por:

$$S(t) = \sqrt{\frac{t K_d (Z' - Z'')}{\theta \alpha_d}} \quad (41)$$

La interfaz es en todo momento un plano.

La comprobación se ha efectuado partiendo de  $t = 0$ , momento en el cual la interfaz es vertical.

Los datos utilizados en este caso son:

$$\begin{aligned} Z' &= 0 \text{ m.} & K_d &= 40 \text{ m/d} \\ Z'' &= 10 \text{ m.} & \rho_d &= 1.000 \text{ kg/m}^3 \\ \theta &= 0,2 & \rho_s &= 1.025 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

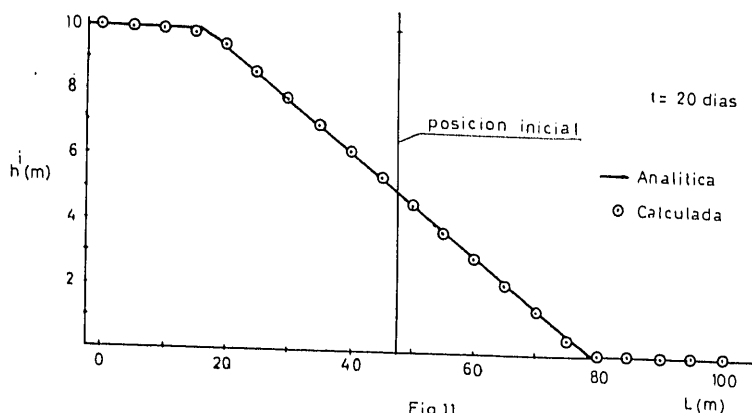
$$\begin{aligned} L_x &= 15 \text{ m.} & \Delta y &= 5 \text{ n. m.} \\ L_y &= 100 \text{ m.} & \Delta t &= 1 \text{ d.} \\ \Delta x &= 5 \text{ m.} \end{aligned}$$

y en las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad x < 47,5 \quad h' &= 10 \text{ m.} \\ h^s &= 20 \text{ m.} \quad h'' = 20,25 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 0 \quad x > 47,5 \quad h' &= 0 \text{ m.} \\ h^s &= 20 \text{ m.} \quad h'' = 20,50 \text{ m.} \end{aligned}$$

En la figura 11 puede verse la comparación entre los valores analíticos y calculados para  $t = 20$  días, pudiendo observarse que el grado de ajuste alcanzado es muy satisfactorio, por lo que queda comprobada la capacidad del modelo propuesto para reproducir adecuadamente el movimiento del pie de interfaz.



## 8. CONCLUSIONES

Como resumen de lo expuesto anteriormente pueden citarse como conclusiones más importantes del presente trabajo las siguientes:

1. El modelo numérico propuesto es incondicionalmente convergente y estable.
2. Su tiempo de cálculo y exigencias de almacenamiento son del orden de las necesarias para un modelo de flujo sin intrusión salina.

3. El propio modelo crea las condiciones de contorno correspondientes a la interfaz en la costa, obteniéndose un ajuste satisfactorio a soluciones analíticas transitorias.
4. El movimiento del pie de la interfaz, tanto avanzando como retrocediendo, es resuelto satisfactoriamente por el propio proceso de cálculo obteniéndose un ajuste adecuado a soluciones analíticas transitorias.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BONNET, M. y J. P. SAUTY: «Un modele simplifie pour la simulation des nappes avec intrusion saline». Proceedings of the Bratislava Symposium, septiembre, 1975.

DURAND, E.: «Solutions numeriques des équations Algébriques», Masson & Cie, 1972.

FERRER, J. y F. J. RAMOS: «Un modelo quasi-tridimensional para el estudio de la intrusión salina en acuíferos costeros en régimen transitorio». Servicio de

Publicaciones Universidad Politécnica de Valencia, 1981.

GLOVER, R. E.: «The pattern of fresh water flow in a coastal aquifer», Jour. Gro. Res. n.º 64, pp. 439-475, 1959.

ISACCSON, E. y H. BISHOP: «Análisis of numerical methods», Ed. John. Wiley and Sons, 1966.

LAYLA, R.: «Numerical analysis of transient salt/fresh-water interfase in coastal aquifers», Tesis Ph. D. Colorado State University, 1980.

KEULEGAN, H. G.: «An example report on models laws for density currents», U. S. National Bureau of Standards, Gaithersbury, Maryland.

MERCER, J. W., LARSON, S. P. y FAUST, C. R.: «Simulation of salt-water interface motion» Ground Water, Vol. 18, n.º 4, julio-agosto, 1980.

RUMMER, R. R. y HARLEMAN, D. R. F.: «Intruded Salt Water wedge in porous media», Professional Paper 450-B, U. S. Geological Survey, 1962

SHAMIR, V. y PANGN, G.: «Motion of the seawater interface in coastal aquifer: a numerical solution», Water Resour. Res. Vol. 7, n.º 3, pp. 644-657, 1971.

VAPPICHA, V. N. y NARAJA, S. H.: «An aproximate solution for the transient interface in a coastal aquifer», Jour. of Hydrology, n.º 31, pp. 161-173, 1976.

VERRUIJT, A.: «A note on the Ghyben. Herzberg formula», Bull. Jash. XIII, pp. 43-45, diciembre 1978.