

# Las ecuaciones de Gibbs-Appel.

## Una reivindicación de Gibbs (\*)

Por JOSE LUIS DE LA VEGA BENAYAS

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

*Veinte años antes de que el renombrado matemático francés P. Appell publicara sus famosas ecuaciones del movimiento válidas para cualquier tipo de enlaces, el físico norteamericano J. W. Gibbs llegaba, entre otras, a las mismas fórmulas tras una revisión de los supuestos en que se había basado Lagrange para fundar esa nueva rama de la mecánica desarrollada analíticamente, la Mecánica Analítica.*

*El objetivo del presente artículo no es tanto mostrar la patente primacía de Gibbs en el hallazgo de estas fórmulas, como poner de manifiesto que su investigación es más profunda y de mayor alcance.*

### 1. INTRODUCCION

En 1879, Josiah Willard Gibbs, en un artículo de unas 15 páginas aparecido en el «American Journal of Mathematics», titulado «On the fundamental formulae of Dynamics», estableció unas nuevas ecuaciones diferenciales del movimiento de un sistema sometido a enlaces, basadas en la variación de las aceleraciones en lugar de las de los desplazamientos.

Gibbs conoce profundamente la «Mécanique Analytique» de J. L. Lagrange. En su artículo maneja la edición preparada por J. Bertrand (tercera edición, que se publicó en los años 1853 a 1855), y en la que colaboraron, entre otros, Lejeune-Dirichlet, Poincot y Serret.

Y esto es así porque Gibbs va a modificar la fórmula fundamental que Lagrange erigió como principio de toda la mecánica, «el principio de las velocidades verticales», mediante el cual dio forma y contenido a todo el desarrollo de esta ciencia físico-matemática del movimiento en su versión analítica.

Aparentemente Gibbs maneja solamente enlaces holónomos. Una lectura atenta de su artículo permite deducir que las fórmulas generales

que establece son válidas también cuando entre las coordenadas de los puntos del sistema existen relaciones no integrables entre las diferenciales de las mismas. Nuestro autor vislumbra la máxima generalidad para los enlaces del sistema. Y en todo caso es un claro catacronismo hablar de enlaces no holónomos en 1879, cuando la introducción formal de los mismos fue realizada por H. Hertz en su obra póstuma, aparecida en 1894, «Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt».

Pero sigamos con esta breve introducción histórica para enmarcar a los principales protagonistas implicados en el descubrimiento de unas fórmulas, las más generales, válidas para todo tipo de sistemas, con cualesquiera ligaduras.

En 1896 Appell publica la primera edición del segundo tomo de su extraordinario «Traité de Mécanique rationnelle». Esta obra contenía un serio e importante error. La lagrangiana de un sistema no holónimo aparece como función de las derivadas generalizadas que definen los grados de libertad del sistema en estudio. Y las ecuaciones de Lagrange se aplican también a estas coordenadas. Este paralogismo (o error involuntario) se ha repetido varias veces más en otros textos de mecánica, posteriormente al desliz de Appell.

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 29 de febrero de 1984.

Advertido de su error se propuso la tarea de hallar unas ecuaciones válidas para sistemas holónomos y anholónomos. Su solución apareció en las *Comptes Rendues de l'Academie de Sciences de París* en 1899 y en la segunda edición del segundo tomo del *Traité* de 1904. En ningún sitio cita a Gibbs como adelantado en esta materia. Creemos que, antes al contrario, lo menciona falazmente. Así, en ediciones posteriores de este segundo tomo aparece el nombre del eminente físico norteamericano en un epígrafe dedicado al principio de la mínima construcción de Gauss, del siguiente modo: «M. Willard Gibbs, dans un beau travail: "On the fundamental formulae of Dynamics" ("American Journal of Mathematics". t. II, 1879), a donné, de cet énoncé analytique du principe de Gauss, des applications a divers problèmes, notamment a la question de la rotation des corps solides».

La falacia de Appell es abrumadora: conoce el trabajo de Gibbs y lo desvirtúa. Es un claro alegato pro *domo sua* de poca honradez científica.

Digamos, de pasada, que el principio de Gauss apareció en el «*Journal für Mathematik*» de Crelle, tomo 4, en 1829. Y lo deduce intentando exponer de otro modo el principio de D'Alembert, pero basándose literalmente en él, pues Gauss pensaba que nada nuevo se podía hacer en mecánica después de D'Alembert.

Resulta, pues, paradójica esta curiosa cita de Appel teniendo en cuenta que Gibbs conoce perfectamente el principio de Gauss, que lo cita expresamente en su artículo con un comentario a pie de página, y que demuestra que no es sino un caso particular de su formulación más general.

Appell, pagado de su descubrimiento, remacha ya, a partir de su error, sobre este punto, dedicándole, en posteriores ediciones de su obra, un apartado sobre la imposibilidad de aplicar directamente las ecuaciones de la dinámica al número mínimo de parámetros, y exponiendo sus fórmulas que se deriven directamente, tras meras operaciones analíticas, de la misma fórmula general que utilizó como principio fundamental Lagrange en su «*Mécanique Analytique*».

No es éste, precisamente, el camino que siguió su auténtico descubridor, como expondre-

mos a continuación. Para ello nada mejor que dejar hablar al propio Gibbs, quien tras establecer su fórmula general, dice así en una nota a pie de página:

«Puede parecer a algunos lectores de la "*Mécanique Analytique*" que el tratamiento de los problemas dinámicos no es completamente análogo al de los estáticos. La cuestión estática, es decir, si un sistema permanecerá en equilibrio en una determinada configuración, es resuelta por Lagrange considerando todos los posibles movimientos del sistema y preguntándose si hay alguna razón para que el sistema adopte una de ellas. Un método semejante en dinámica estaría basado en la comparación de un cierto movimiento con otros compatibles con las condiciones cinemáticas.

«En lugar de esto, Lagrange reduce prácticamente la dinámica a la estática; y no tiene en cuenta las posibles variaciones del movimiento a estudiar; antes bien, los movimientos que serían posibles si el sistema estuviera en equilibrio. Esta reducción de un problema a otro más simple, que ya ha sido resuelto, tiene ventajas, pero no se corresponde con el estilo del autor de la "*Mécanique Analytique*". Pues lo que más caracteriza a su tratado es la aplicación directa del principio general a cada caso particular.

«Quizá esto tenga poca importancia, y sea en cierto modo opinable, pero lo menciono aquí debido a que fue esta consideración (justificada o no), y el deseo de expresar la fórmula del movimiento por medio de unas condiciones de máximo o mínimo compatibles con los enlaces, lo que me condujo a las fórmulas que aquí presento».

(Se ha omitido una mención a Gauss, desconocido por el autor mientras descubría sus fórmulas, y al principio de mínima acción, que lo juzga insatisfactorio como tal.)

Estas palabras reflejan bien claramente el ambicioso proyecto de Josiah Willard Gibbs.

## 2. LAS APORTACIONES DE GIBBS

Parte de un sistema sometido a enlaces del tipo  $A(xyz) = A(t)$ ;  $B(xyz) = B(t)$ ; etcétera.

# LAS ECUACIONES DE GIBBS-APPEL. UNA REIVINDICACION DE GIBBS

Forma las ecuaciones:

$$\ddot{A} = \frac{\partial A}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial A}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial A}{\partial z} \ddot{z}$$

$$\ddot{A} = \frac{\partial A}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial A}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial A}{\partial z} \ddot{z} + H(\dot{x} \dot{y} \dot{z} x y z t)$$

Considerando constantes el tiempo, la posición y las velocidades toma variaciones infinitesimales respecto de las aceleraciones

$$\delta \ddot{A} = \frac{\partial A}{\partial x} \delta \ddot{x} + \frac{\partial A}{\partial y} \delta \ddot{y} + \frac{\partial A}{\partial z} \delta \ddot{z} = 0$$

(La expresión general  $\frac{\partial A}{\partial x} \delta \ddot{x}$  debe to-

marse equivalente a la suma  $\sum \frac{\partial A}{\partial x_i} \delta \ddot{x}_i =$   
 $= \frac{\partial A}{\partial x_i} \delta \ddot{x}_i$  usando las convenciones actuales.

Para simplificar la tipografía y la exposición podemos resumir cada ecuación, así:

$$A_{rs} \cdot \delta \ddot{x}_s = 0; \text{ donde}$$

$$A_{rs} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} \text{ siendo } x_s \text{ la componente cualquiera de una coordenada).}$$

Tenemos, pues, modernizando la escritura de Gibbs:

$$A_{rs} \cdot \delta \ddot{x}_s = 0 \quad \begin{matrix} s = 1, 2, \dots, 3n \\ r = 1, 2, \dots, l \end{matrix}$$

donde «1» es el número de ecuaciones de enlace.

Como las ecuaciones que se obtienen tomando variaciones en las ecuaciones de los enlaces son

$$A_{rs} \cdot \delta x_s = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, l; s = 1, 2, \dots, 3n)$$

las variaciones  $\delta x_s$  y  $\delta \ddot{x}_s$  son proporcionales, por lo que podemos reemplazar a aquéllas en la ecuación fundamental empleada por Lagrange

$$(X_s - m_s \ddot{x}_s) \delta x_s = 0 \quad [1] \\ (s = 1, 2, \dots, 3n)$$

$$\text{quedando } (X_s - m_s \ddot{x}_s) \delta \ddot{x}_s = 0 \quad [2]$$

Que, repetimos, es válida en un cierto instante y para un cierto estado del sistema. Es decir, para las variaciones de las aceleraciones cuando  $\delta t = \delta x = \delta \dot{x} = 0$ .

Tal es la ecuación fundamental que va a presidir el estudio de Gibbs.

Esto concuerda con las palabras antes mencionadas de nuestro autor ya que, como bien dice, en un problema dinámico lo que está en cuestión no es su posición actual que está fuera de toda duda, antes bien, su evolución futura. Y como a partir de una cierta posición la infinitamente próxima queda definida por ecuaciones del tipo

$$x + \dot{x} dt + \frac{1}{2} \ddot{x} dt^2 + \dots$$

es aquí donde debemos tomar variaciones para indagar las posibles futuras trayectorias, teniendo en cuenta qué sumando es constante.

Por tanto, en un cierto instante, y con una configuración determinada, si hay cambios finitos en las velocidades, la variación del sistema vendrá definida por las variaciones finitas de sus velocidades.

Y dado un cierto estado en un determinado momento, la variación del sistema vendrá definida por la variación de sus aceleraciones, tal como resulta de suprimir el factor constante  $1/2 dt^2$  en la expresión  $1/2 \delta \ddot{x} dt^2$ .

Gibbs arranca, pues, de la misma ecuación fundamental empleada por Lagrange, adaptándola a las condiciones dinámicas del sistema y teniendo en cuenta, por supuesto, los enlaces o ligaduras a que está sometido.

Una vez establecida la ecuación fundamental [2] para la Dinámica, la aplica al movimiento impulsivo, al movimiento producido por fuerzas constantes, por fuerzas dependientes del tiempo y de la configuración y por fuerzas dependientes del tiempo, de la configuración y de las velocidades.

De intento no nos detenemos en la deducción de sus fórmulas, pero sí queremos destacar las del movimiento impulsivo que abren un enriquecedor y fecundo punto de ataque para su estudio.

### 3. TRANSFORMACION DE LA NUEVA FORMULA Y NUEVO PRINCIPIO GENERAL DE LA DINAMICA

Reescribiendo la fórmula fundamental de la Dinámica [2] en la forma

$$X_s \delta \ddot{x}_s - m_s \ddot{x}_s \delta \ddot{x}_s = 0 \quad [3]$$

y llamando, como él hace,

$$U = \sum \frac{1}{2} m \ddot{x}'^2$$

$$\text{Tendremos } X_s \delta \ddot{x}_s - \delta U = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, 3n)$$

Como las fuerzas no pueden depender de la aceleración la variación  $\delta$  no afecta a las  $X_s$ , por tanto

$$\delta [X_s \ddot{x}_s - U] = 0$$

De donde se deduce el siguiente principio general: «Las aceleraciones de un sistema son siempre tales que la diferencia entre el producto de las aceleraciones de los puntos y las fuerzas correspondientes y la semisuma del producto de las masas por las aceleraciones tiene un valor estacionario».

(He modificado ligeramente el lenguaje y el contenido de este principio, pero respetando su resultado fundamental.)

Dicho de otro modo: tomando como únicas variables las aceleraciones y como constantes las coordenadas y las velocidades, el movimiento viene definido por el máximo de la función.

$$X_s \ddot{x}_s - U$$

Si en lugar de las coordenadas cartesianas utilizamos parámetros definitorios de la configuración del sistema,  $p$ , y las correspondientes fuerzas expresadas en función de ellos, tendremos que debe ser máxima la función

$$P_i \ddot{p}_i - U \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad [4]$$

( $k$ , número mínimo de desplazamientos).

### 4. EL PRINCIPIO DE GAUSS, DEDUCIDO

Se plantea a continuación Gibbs el comportamiento de un sistema cuando respetando los enlaces se le somete a unas fuerzas adicionales,  $X_s$ . Llega a la conclusión de que las nuevas aceleraciones y las nuevas fuerzas responden también a su principio general. Siendo  $Q$  las nuevas fuerzas generalizadas expresadas en función de nuevos parámetros  $q$  de configuración y  $U$  la nueva función  $U$  expresada en función de las aceleraciones  $\ddot{x}'$  relativas o adicionales, la expresión

$$Q_s \ddot{q}_s - U'$$

es también un máximo.

Por consiguiente, si en un sistema se introducen nuevos enlaces, pero no nuevas fuerzas, la expresión

$$U' = \sum \frac{1}{2} m \ddot{x}'^2$$

ha de ser un mínimo respecto de las aceleraciones.

Es decir,

$$\sum \frac{1}{2} m \left( \ddot{x} - \frac{X}{m} \right)^2$$

debe ser mínimo respecto de las aceleraciones, considerando constantes las coordenadas y las velocidades.

Queda, por tanto, probado que el principio de Gauss queda subsumido en la nueva teoría dinámica de Gibbs.

### 5. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Con este epígrafe concluye este breve trabajo de Gibbs.

Supone un sistema definido por los « $k$ » posibles desplazamientos que puede tomar (los grados de libertad), es decir, mediante unos parámetros diferenciales independientes, no necesariamente integrables (lo que hoy denominamos cuasicoordenadas y sus correlatos, las cuasivelocidades, sus derivadas). Las demás

velocidades generalizadas de los parámetros, que definen la configuración del sistema, se expresarán en función de estas cuasivelocidades básicas.

Sean  $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dots, \dot{\omega}_k$  las velocidades generalizadas (o cuasivelocidades) básicas.

Una coordenada  $p$  se expresará en función de ellas así:

$$\dot{p} = \frac{\delta p}{\delta \omega_h} \cdot \dot{\omega}_h \quad (h = 1, 2, \dots, k)$$

Vamos a utilizar la expresión [4] que ha de ser máxima de acuerdo con el principio de Gibbs antes anunciado. (Simbolizaremos la suma  $P_i \cdot p_i$  mediante  $P \cdot p$ )

$$P \cdot \dot{p} = P \cdot \frac{\delta p}{\delta \omega_h} \cdot \dot{\omega}_h = \Omega_h \cdot \dot{\omega}_h$$

$\Omega_h$  será la fuerza generalizada correspondiente a la coordenada  $\omega_h$ . Es decir,

$$\Omega_h = P_i \cdot \frac{\delta p_i}{\delta \omega_h}$$

Derivando  $P \cdot \dot{p}$  y tomando variaciones respecto de las aceleraciones

$$P \cdot \ddot{p} = \Omega_h \cdot \delta \ddot{\omega}_h$$

A su vez,  $U$  se expresará en función de las aceleraciones, velocidades y coordenadas del sistema. Tomando variaciones respecto de las aceleraciones

$$\delta U = \frac{\delta U}{\delta \ddot{\omega}_h} \cdot \delta \ddot{\omega}_h$$

Por tanto, la variación de la expresión [4], que debe anularse, será:

$$\delta (P_i \ddot{p}_i - U) \quad \text{o sea}$$

$$\Omega_h \delta \ddot{\omega}_h = \frac{\delta U}{\delta \ddot{\omega}_h} \delta \ddot{\omega}_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, k)$$

Como las  $\dot{\omega}$  son independientes, las ecuaciones del movimiento son:

$$\frac{\delta U}{\delta \ddot{\omega}_h} = \Omega_h \quad (h = 1, 2, \dots, k)$$

Tantas ecuaciones como grados de libertad posea el sistema.

Y aquí concluye el estudio de Gibbs, con estas ecuaciones generales válidas para cualquier tipo de sistemas.

Tal es la génesis de estas famosas fórmulas universalmente conocidas como ecuaciones de Appell. La función  $U$  de Gibbs es designada  $S$  por Appell. El matemático francés Saint-Germain la bautizará con el nombre de «energía de las aceleraciones».

Como un ejemplo de aplicación práctica de sus fórmulas, que no del empleo del principio de Gauss, como reseña Appell, estudia el movimiento de un sólido con un punto fijo.

Recalca que va a emplear cuasicoordenadas y cuasivelocidades, es decir, velocidades que no son derivadas de ninguna combinación de parámetros. Para ello emplea las componentes de la rotación del sólido según sus ejes principales de inercia.

Es decir, utiliza  $\dot{\omega}_1 = p; \dot{\omega}_2 = q; \dot{\omega}_3 = r$ .

Y llega así a las ecuaciones de Euler, en función de los momentos principales de inercia y del momento de las fuerzas según ellos. Con los términos usuales empleados actualmente:

$$A\dot{p} - (B - C)qr = M_1$$

$$B\dot{q} - (C - A)pr = M_2$$

$$C\dot{r} - (A - B)pq = M_3$$

## 6. VALORACION DEL TRABAJO DE GIBBS

Su mérito fundamental es la revisión de la fórmula que utiliza Lagrange combinando el «principio de las velocidades virtuales» con el principio de D'Alembert. La designaremos fórmula de D'Alembert-Lagrange:

$$(X_s - m_s \ddot{x}_s) \delta x_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, 3n)$$

De ella obtiene su fórmula fundamental, válida para las variaciones de las aceleraciones en un instante y estado determinados:

$$(X_s - m_s \ddot{x}_s) \delta \ddot{x}_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, 3n)$$

En un movimiento impulsivo cambia, por integración, las fuerzas en impulsos  $I_s$  y las aceleraciones por los incrementos finitos de las velocidades  $\Delta \dot{x}$ , para una cierta configuración:

$$(I_s - m_s \Delta \dot{x}_s) \delta \Delta \dot{x}_s = 0$$

Establece un Principio general del movimiento, extremando, como función de las aceleraciones, la siguiente expresión:

$$P_i \ddot{p}_i - \sum \frac{1}{2} m \ddot{x}^2 = P_i \ddot{p}_i - U \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

(«k», número mínimo de desplazamientos del sistema).

Y desemboca en unas ecuaciones generales del movimiento:

$$\frac{\delta U}{\delta \ddot{p}} = P$$

tantas como grados de libertad posea el sistema.

Y, como hemos mostrado, el Principio de Gauss queda subsumido en su nueva teoría.

Sus fórmulas son todas válidas para sistemas no holónomos, no hace falta decirlo. Y como en sus ecuaciones finales solamente aparecen las velocidades (o cuasivelocidades) básicas que definen los grados de libertad de un sistema, podemos afirmar que vislumbró *avant la lettre* el tratamiento general de los sistemas holónomos y no holónomos.

En cuanto a las ecuaciones de Appell, estimamos que lo más plausible es conceder a su autor su parte de mérito como profundo estudioso del trabajo de Gibbs y el demérito, inexcusable en todo científico y maestro como él lo fue, y en alto grado, de no mostrar paladinamente las fuentes de sus trabajos e información.

Entre los autores citados en la bibliografía queremos mencionar especialmente a L. A. Pars, a cuya madura y muy meditada obra debemos el estímulo y la orientación para la redacción del presente artículo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- APPEL, P.: «Traité de mécanique rationnelle». Tome II. 1.<sup>a</sup> ed. París. Gauthier-Villars. 1986.
- «Traité de mécanique rationnelle». Tome II. 6.<sup>a</sup> ed. París. Gauthier-Villars. 1953.
- «Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences». Séances del 7 y 28 agosto 1899. Tomo 129, números 6 y 9. 1899.
- GIBBS, J. W.: «On the fundamental formulae of Dynamics». American Journal of Mathematics, vol. II, 1879. pp. 49-64.
- «The Scientific Papers of J. W. Gibbs». 2 vol. New York. Dover. 1961.
- HERTZ, H.: «Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt». 2.<sup>a</sup> ed. Leipzig. Ambrosius Barth. 1910.
- JOUGUET, E.: «Lectures de Mécanique». 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup> parte. París. Gauthier-Villars. 1908-1909. (Hay una reimpresión de Johnson Reprint. New York. 1966.)
- MARCH, E.: «Desarrollo histórico-crítico de la mecánica». Buenos Aires. Espasa-Calpe. 1949.
- PARS, L. A.: «A Treatise on Analytical Dynamics». Woodbridge. Ox Bow Press. 1979.
- SAINT-GERMAIN, A.: «Sur la fonction S introduite par M. Appell dans les equations de la Dynamique». Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, tomo 130, 1901, p. 1174.

José Luis de la Vega Benayas



Doctor ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Licenciado en Filosofía por la Universidad Complutense. Profesor adjunto de mecánica en la Universidad Politécnica de Madrid. Ha publicado en esta misma Revista un trabajo sobre *Orbitas finitas y periódicas producidas por una fuerza central* (junio de 1982) y está pendiente de aparecer un estudio físico y filosófico sobre *La polémica de las fuerzas vivas*.