

Después de la supercircunferencia... ¡la superclotoide! (*)

Por SANDRO ROCCI BOCCALERI

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.
Centro de Estudio y Apoyo Técnico de Madrid.
(D.G. Carreteras)

En un artículo anterior se desarrolló una curva en planta utilizable en trazados de carreteras en los que la velocidad sea variable, tales como ciertos ramales de enlace. En dicha curva (que el autor denomina supercircunferencia se presupone que la aceleración centrífuga no compensada por el peralte es constante y por tanto no puede empalmar con una alineación recta. Para ello se requiere una nueva curva, a lo que el autor llama superclotoide, cuyas características se estudian en el siguiente artículo.

1. INTRODUCCION. VARIACION DE LA CURVATURA

En un artículo anterior se ha desarrollado una curva en planta que se puede utilizar para trazados de carreteras en los que la velocidad sea variable (y más precisamente, uniformemente acelerada o decelerada), tales como ciertos ramales de enlace. Se demostró que, manteniendo constante la relación entre la aceleración longitudinal y la aceleración centrífuga varía linealmente con el recorrido, el producto del peralte por el radio de curvatura permanece constante, y el acimut varía logarítmicamente con el recorrido.

La supercircunferencia (que así se ha denominado a esta curva) presupone que la aceleración centrífuga no compensada por el peralte es constante; y por tanto no puede empalmar con una alineación recta, ya que tampoco puede alcanzarse la curvatura nula que ello requiere. Para ello se requiere una nueva curva a la que denominará *superclotoide*, definida por una variación uniforme de la aceleración centrífuga no compensada por el peralte con el tiempo (igual que en el caso de una clotoide):

$$\frac{da_t}{dt} = J \quad (1)$$

Pero, por definición

$$a_t = \frac{v^2}{\rho} - gp \quad (2)$$

Denominado $z = 1/\rho$ a la curvatura, y diferenciando

$$da_t = 2 vzdv + v^2 dz - g dp \quad (3)$$

Sustituyendo en (1) y recordando que $\frac{dv}{dt} = a_l$

$$2 vz a_l + v^2 a_l \frac{dz}{dv} - g a_l \frac{dp}{dv} = J \quad (4)$$

Lo que equivale a la ecuación diferencial

$$v^2 \frac{dz}{dv} + 2 vz = N \quad (5)$$

Con

$$N = \frac{J}{a_l} + g \frac{dp}{dv} \quad (6)$$

Si N es constante (lo cual requiere que la ley de variación del peralte sea la que más adelante se define), la ecuación diferencial (6) tiene la solución

$$z = \frac{1}{\rho} = N \frac{v - v_0}{v^2} \quad (7)$$

La curvatura es nula para $v = v_0$. Al ser, por definición

$$v^2 = v_0^2 - 2 a_l l = v_0^2 (1 + 2KI) = v_0^2 (1 + B) \quad (8)$$

el radio de curvatura resulta ser

$$\rho = \frac{1}{N} \frac{v^2}{v - v_0} = \frac{v_0}{N} \frac{1 + 2KI}{\sqrt{1+2KI}-1} = \frac{1-B}{N \sqrt{1+B-1}} \quad (9)$$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de mayo de 1982.

$$\text{siendo } K = a_l/v_0^2 \quad (10)$$

$$B = 2KI \quad (11)$$

La ecuación (9) define la superclotoide, en cuanto a radio de curvatura (Fig. 1).

2. VARIACION DEL PERALTE Y LONGITUD MINIMA

Para que N sea constante, el serlo J y a_l se requiere que también lo sea

$$\frac{dp}{dv} = Q \quad (12)$$

Integrando y definiendo como v_0 a la velocidad correspondiente al punto de curvatura nula y peralte inicial p_0

$$p - p_0 = Q (v - v_0) = Qv_0 (\sqrt{1 + 2KI} - 1) \quad (13)$$

La constante Q viene definida por el peralte p al final de la superclotoide ($l = L$)

$$Q = \frac{p_L - p_0}{v_L - v_0} = \frac{p_L - p_0}{v_0 (\sqrt{1 + 2KI} - 1)} \quad (14)$$

y su valor absoluto no debe rebasar una variación del 4 % por segundo

$$|Q| = \left| \frac{dp/dt}{a_l} \right| \leq \left| \frac{4 \text{ \%/seg.}}{|a_l|} \right| \quad (15)$$

Por lo tanto

$$|p - p_0| / 4 \% \leq \frac{v_0 (\sqrt{1 + 2KI} - 1)}{a_l} \quad (17)$$

De donde

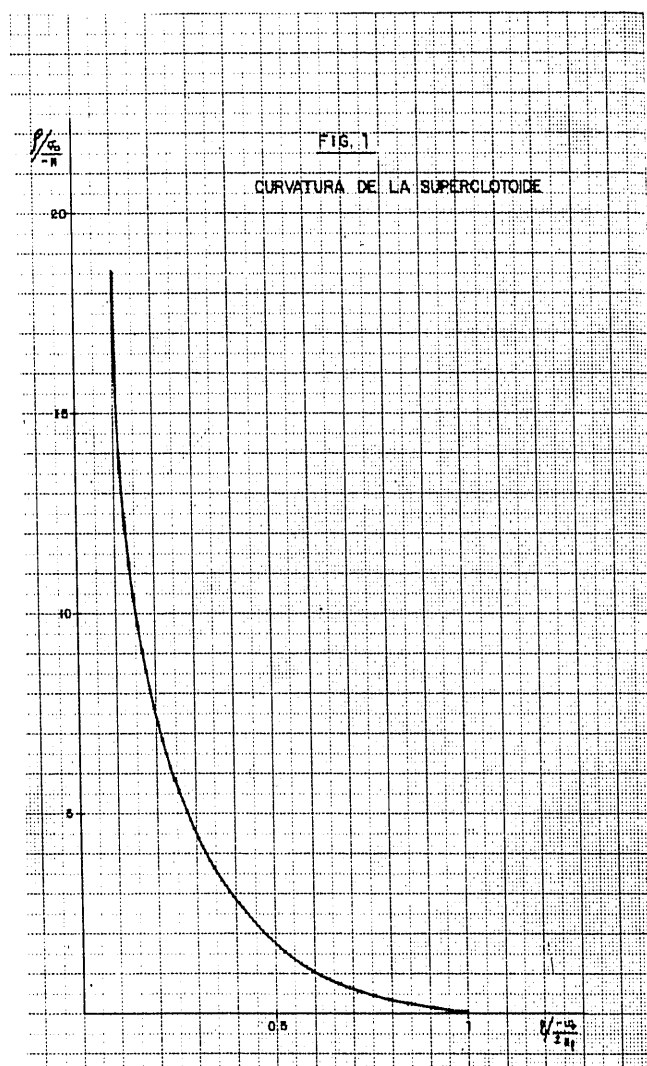
$$1 + 2KI \geq \left[1 + \frac{a_l (p_L - p_0)}{4 v_0} \right]^2 = \left(1 + K v_0 \frac{p_L - p_0}{4} \right)^2$$

$$L \geq \frac{v_0 (p_L - p_0)}{4} \left[1 + \frac{K}{2} \frac{v_0 (p_L - p_0)}{4} \right] = \quad (18)$$

$$= C \left(1 + \frac{K}{2} C \right) \quad (19)$$

que representa la longitud mínima de la superclotoide, siendo

$$C = v_0 \frac{p_L - p_0}{4 \%} \quad (20)$$



3. VARIACION DEL ACIMUT

Al ser, por definición (y diferenciando a la ecuación B)

$$z = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{dv}{dl} \frac{d\varphi}{dv} = \frac{a_l}{v} \frac{d\varphi}{dv} \quad (21)$$

igualando a la expresión (7)

$$d\varphi = \frac{N}{a_l} \left(1 - \frac{v_0}{v} \right) dv \quad (22)$$

ecuación que, integrada, da

$$\varphi = \frac{N}{a_l} (v - v_0 \ln v) + C' \quad (23)$$

La constante C' se obtiene por la condición de borde $\varphi = 0$ para $v = v_0$ (lo cual equivale a situa-

l origen de acimutes en el punto de curvatura
ulo).

$$r = \frac{N}{a_1} (v_0 - v_0 \ln v_0) + C' \quad (24)$$

ie donde

$$r = \frac{N}{a_1} v_0 \left[(v/v_0) - 1 - \ln (v/v_0) \right] \quad (25)$$

o, lo que es lo mismo, al ser por la ecuación (8)

$$v/v_0 = \sqrt{1+B}$$

y recordando (11)

$$\frac{Kv_0}{N} \varphi = (1+B)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2} \ln (1+B) = \psi' (B) \quad (\text{fig.2}) \quad (26)$$

Hallaremos las derivadas en el origen ($B=0$) de $\psi' (B)$:

$$\psi' (0) = \left| (1+B)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2} \ln (1+B) \right|_{B=0} = 1 - 1 - 0 = 0 \quad (27)$$

$$\psi'' (0) = \frac{1}{2} \left| (1+B)^{-1/2} - (1+B)^{-1} \right|_{B=0} = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0 \quad (28)$$

$$\psi''' (0) = \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} (1+B)^{-3/2} + (1+B)^{-2} \right|_{B=0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4} \quad (29)$$

$$\psi^{(4)} (0) = \frac{1}{2} \left| \frac{3}{4} (1+B)^{-5/2} - 2 (1+B)^{-3} \right|_{B=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - 2 \right) = -\frac{5}{8} \quad (30)$$

$$\psi^{(5)} (0) = \frac{1}{2} \left| -\frac{15}{8} (1+B)^{-7/2} + 6 (1+B)^{-4} \right|_{B=0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{15}{8} + 6 \right) = \frac{33}{16} \quad (31)$$

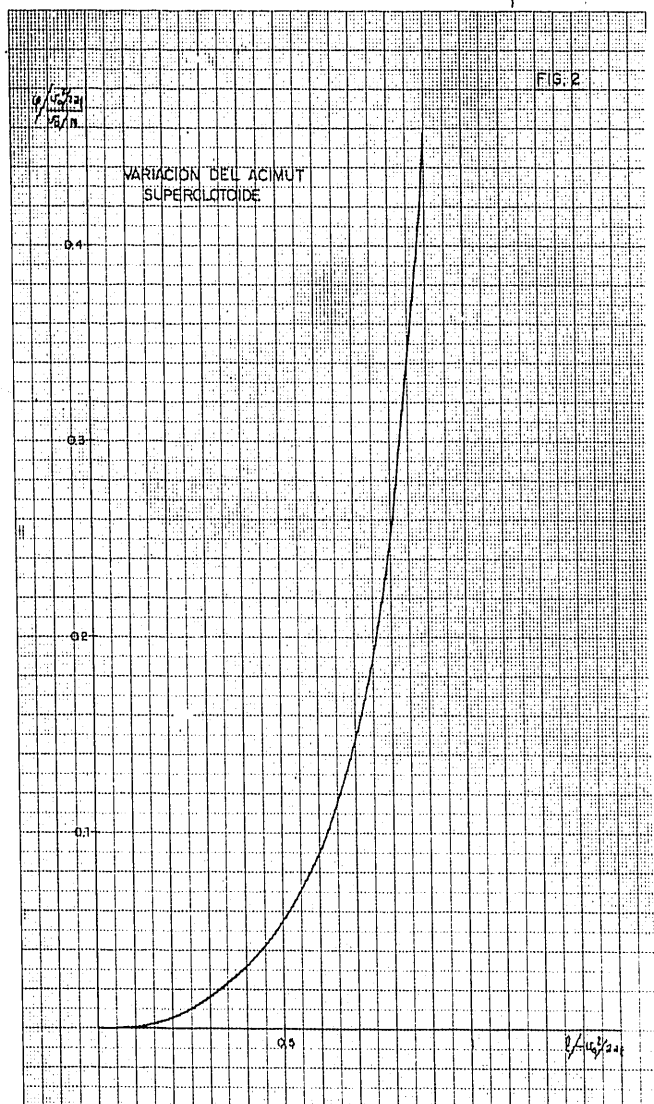
$$\psi^{(6)} (0) = \frac{1}{2} \left| \frac{105}{16} (1+B)^{-9/2} - 24 (1+B)^{-5} \right|_{B=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{105}{16} - 24 \right) = \frac{-279}{32} \quad (32)$$

, en general

$$\psi^{(n)} (0) = \frac{(-1)^n}{2} \left\{ (n-1)! - \frac{(2n-3)!}{2^{2n-3} [(n-2)!]} \right\} \quad (33)$$

El desarrollo en serie de Mac Laurin de $\psi' (B)$
ale

$$\psi' (b) = \sum \frac{B^n}{n!} \psi^{(n)} (0) \quad (34)$$



se obtiene una clotoide de parámetro A dado por

$$A^2 = 4v_0 / KN = \frac{4 v_0^3}{J + gaQ} \quad (37)$$

lo cual justifica el nombre de SUPERCLOTOIDE dado a la curva, pues la clotoide es meramente la curva que se obtiene al tomar el primer término de la serie ψ (B).

4. COORDENADAS CARTESIANAS

Tomando como origen de coordenadas el origen de recorridos y punto de curvatura nula, y como eje de abscisas la tangente de dicho punto ($\varphi = 0$), se obtiene por definición

$$dx = \cos \varphi \, d l \quad (38)$$

$$dy = \sin \varphi \, d l \quad (39)$$

Pero como de la ecuación (11) se deriva que

$$d l = \frac{dB}{2K}$$

Sustituyendo

$$dx = \frac{\cos \varphi}{2K} dB \quad (40)$$

$$dy = \frac{\sin \varphi}{2K} dB \quad (41)$$

y desarrollando $\cos \varphi$ y $\sin \varphi$ en serie

$$\cos \varphi = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\varphi^{2j}}{(2j)!} \quad (42)$$

$$\sin \varphi = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\varphi^{2j+1}}{(2j+1)!} \quad (43)$$

tendremos

$$dx = \frac{dB}{2K} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\varphi^{2j}}{(2j)!} \quad (44)$$

$$dy = \frac{dB}{2K} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\varphi^{2j+1}}{(2j+1)!} \quad (45)$$

y sustituyendo las diversas derivadas

$$\psi(B) = 0 - 0 + \frac{B^2}{8} - \frac{5B^3}{48} + \frac{11B^4}{128} - \dots +$$

$$\frac{(-1)^n}{2(n)!} \left\{ (n-1)! - \frac{(2n-3)!}{2^{2n-3} [(n-2)!]} \right\} B^n \quad (35)$$

Sustituyendo en (26) tendremos el desarrollo en serie de φ en función de $2Kl = B$. Obsérvese que tomando sólo el primer término significativo ($n = 2$)

$$\varphi = \frac{N}{Kv_2} \frac{4K^2 l^2}{8} = \frac{KN}{8 v_0} l^2 \quad (36)$$

pero como

$$\varphi = \frac{N}{Kv_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(n!)} \left\{ (n-1)! - \frac{(2n-3)!}{2^{2n-3} [(n-2)!]} \right\} B^n \quad (46)$$

substituyendo

$$dx = \frac{dB}{2K} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \left[\frac{N}{2Kv_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)} \left\{ (n-1)! - \frac{(2n-3)!}{2^{2n-3} [(n-2)!]} \right\} B^n \right]^{2j} \quad (47)$$

$$dy = \frac{dB}{2K} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+1)!} \left[\frac{N}{2Kv_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)} \left\{ (n-1)! - \frac{(2n-3)!}{2^{2n-3} [(n-2)!]} \right\} B^n \right]^{2j+1} \quad (48)$$

Estas expresiones responden a la estructura

$$dx = \frac{dB}{2K} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=4}^{\infty} c'_{xjk} \left(\frac{N}{Kv_0} \right)^{2j} B^k + 1 \right] \quad (49)$$

$$dy = \frac{dB}{2K} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c'_{yjk} \left(\frac{N}{Kv_0} \right)^j B^k \quad (50)$$

e, integradas término a término y teniendo en cuenta que la constante de integración es nula por el origen que se ha tomado para las coordenadas ($x = y = 0$ para $B = 0$), resultan en:

$$x = l + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=5}^{\infty} c_{xjk} \frac{N^{2j} a_l^{k-2j}}{v_0^{2k-2j}} l^k \quad (51)$$

$$y = \frac{1}{2K} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} c_{yjk} \frac{N^{2j+1} a_l^{k-4j-2}}{v_0^{2k-2j-1}} l^{k+1} \quad (52)$$

5. RESOLUCION POR PROGRAMA

Con objeto de agilizar los cálculos, especialmente los de las coordenadas cartesianas, se ha preparado un programa para micro-ordenador Hewlett-Packard HP-97, que presenta un enfoque más directo, puesto que a partir del valor de φ dado directamente por la ecuación (26), se integran directamente por diferencias finitas las ecuaciones (38) y (39) que proporcionan las coordenadas cartesianas.

El intervalo de integración Δl se almacena en

el registro A, y los datos preliminares se introducen por el orden siguiente:

Q en %/(km/h)
J en m/seg³
a_l en unidades "g" y con signo negativo
V₀ en km/h

luego se teclea E y aparece calculado 1/N en seg.

Para cada punto, definido por su l (distancia al punto de curvatura nula, en m), se teclea A y aparecen, por orden:

x_l abscisa del punto, en m
y_l ordenada del punto, en m
α_l variación del acimut entre l=0 y l, en grados centesimales
V velocidad en el punto, en km/h
p-p₀ variación del peralte respecto del punto de curvatura nula, en %
ρ radio de curvatura, en m
x₀ abscisa del centro del círculo osculador, en m
y₀ ordenada del centro del círculo osculador, en m
Δp retranqueo del centro del círculo osculador, en m

Se acompaña copia del listado del programa.

Program Listing

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
001	LELE	21 05		113	RCLB	36 12		169		-24	
002	PCOL	36 11		114		-55		170	RCL4	36 04	
003	PCOL	36 13		115	GT00	22 00		171		-35	
004		45		116	LELE	21 02		172	PRTX	-14	
005		-35		117	F10	16 23 01		173	STOE	35 15	
006	PCOL	36 45		118	GT04	22 04		174	PFS	16-51	
007	PCOL	36 11		119	ENT1	-21		175	RCL7	36 07	
008		-35		120	COS	42		176	RCL6	36 06	
009		-55		121		06		177	PFS	16-51	
010	PFT1	-14		122	STO1	35 46		178	RCLD	36 14	
011	PFS	16-51		123	R1	-31		179	SIN	41	
012	STO1	35 45		124	GSB5	23 05		180	RCL5	36 15	
013	PFS	16-51		125	R4	-31		181		-35	
014	STO1	16 26 46		126	SIN	41		182		-45	
015	PFS	24		127	GSB5	23 05		183	PRTX	-14	
016	LELE	21 02		128	SF1	16 21 01		184	R1	-31	
017	STO1	-41		129	RCLB	36 12		185	RCL5	36 14	
018	PCOL	36 11		130	RCLH	36 11		186	COS	42	
019		-45		131		02		187	RCL5	36 15	
020	STOE	35 00		132		-24		188		-35	
021	GT00	22 00		133		-45		189		-55	
022	LELE	21 01		134	GT00	22 00		190	PRTX	-14	
023		02		135	LEBL4	21 04		191	RCL5	36 15	
024		-35		136	CF1	16 22 01		192		-45	
025	PCOL	36 11		137	CF0	16 22 00		193	PRTX	-14	
026		-55		138	STO0	35 14		194	SPC	16-11	
027	PCOL	36 03		139		02		195	RTN	24	
028		-35		140		00					
029		01		141		00					
030		-55		142		-35					
031		54		143	F1	16-24					
032	STO1	35 01		144		-24					
033		32		145	DSF4	-63 04					
034	LELE	16-63		146	PFTX	-14					
035		-45		147	DSF3	-63 03					
036		01		148	RCL1	36 01					
037		-55		149	RCL5	36 05					
038	LELE	-22		150		-35					
039	PCOL	36 03		151		03					
040		-24		152		-62					
041	PCOL	36 04		153		06					
042		-24		154		-35					
043	STO1	21 15		155	PFTX	-14					
044	STO4	35 04		156	LST1	16-63					
045	STO5	35 05		157	RCL5	36 05					
046	R4	-31		158		-35					
047		-24		159		-45					
048	LST1	16-63		160	RCL5	36 02					
049	R1	16-31		161		-35					
050		53		162	COS	-22					
051		-24		163	PFT	-14					
052		07		164	RCL1	36 01					
053		-62		165		53					
054		06		166	LST4	16-63					
055	ST+4	35-24 04		167		01					
				168		-45					

REGISTERS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
0	1	1+2	Q	K
1	2	Q	K	
2	3	K		
3	4	5/N		
4	5			
5	6	EW P		
6	7	ESM V		
7	8			
8	9			
9	10			
10	11			
11	12			
12	13			
13	14			
14	15			
15	16			
16	17			
17	18			
18	19			
19	20			
20	21			
21	22			
22	23			
23	24			
24	25			
25	26			
26	27			
27	28			
28	29			
29	30			
30	31			
31	32			
32	33			
33	34			
34	35			
35	36			
36	37			
37	38			
38	39			
39	40			
40	41			
41	42			
42	43			
43	44			
44	45			
45	46			
46	47			
47	48			
48	49			
49	50			
50	51			
51	52			
52	53			
53	54			
54	55			
55	56			
56	57			
57	58			
58	59			
59	60			
60	61			
61	62			
62	63			
63	64			
64	65			
65	66			
66	67			
67	68			
68	69			
69	70			
70	71			
71	72			
72	73			
73	74			
74	75			
75	76			
76	77			
77	78			
78	79			
79	80			
80	81			
81	82			
82	83			
83	84			
84	85			
85	86			
86	87			
87	88			
88	89			
89	90			
90	91			
91	92			
92	93			
93	94			
94	95			
95	96			
96	97			
97	98			
98	99			
99	100			

LABELS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
0	1	1+2	Q	K
1	2	Q	K	
2	3	K		
3	4	5/N		
4	5			
5	6	EW P		
6	7	ESM V		
7	8			
8	9			
9	10			
10	11			
11	12			
12	13			
13	14			
14	15			
15	16			
16	17			
17	18			
18	19			
19	20			
20	21			
21	22			
22	23			
23	24			
24	25			
25	26			
26	27			
27	28			
28	29			
29	30			
30	31			
31	32			
32	33			
33	34			
34	35			
35	36			
36	37			
37	38			
38	39			
39	40			
40	41			
41	42			
42	43			
43	44			
44	45			
45	46			
46	47			
47	48			
48	49			
49	50			
50	51			
51	52			
52	53			
53	54			
54	55			
55	56			
56	57			
57	58			
58	59			
59	60			
60	61			
61	62			
62	63			
63	64			
64	65			
65	66			
66	67			
67	68			
68	69			
69	70			
70	71			
71	72			
72	73			
73	74			
74	75			
75	76			
76	77			
77	78			
78	79			
79	80			
80	81			
81	82			
82	83			
83	84			
84	85			
85	86			
86	87			
87	88			
88	89			
89	90			
90	91			
91	92			
92	93			
93	94			
94	95			
95	96			
96	97			
97	98			
98	99			
99	100			

SET STATUS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
0	1	1+2	Q	K
1	2	Q	K	
2	3	K		
3	4	5/N		
4	5			
5	6	EW P		
6	7	ESM V		
7	8			
8	9			
9	10			
10	11			
11	12			
12	13			
13	14			
14	15			
15	16			
16	17			
17	18			
18	19			
19	20			
20	21			
21	22			
22	23			
23	24			
24	25			
25	26			
26	27			
27	28			
28	29			
29	30			
30	31			
31	32			
32	33			
33	34			
34	35			
35	36			
36	37			
37	38			

ELECCION DE PARAMETROS

El valor absoluto de a_l no debe rebasar los límites siguientes, ya establecidos en el Artículo sobre la Supercircunferencia:

$$|a_l| \leq 0,117 + \frac{V_0}{6667} + \frac{V_c}{303} - \frac{V_0 V_c}{38771} \text{ en } \text{aceleración} \quad (53)$$

$$|a_l| \leq 0,184 + \frac{V_0}{317} + \frac{V_c}{188} - \frac{V_0 V_c}{36774} \text{ en } \text{deceleración} \quad (54)$$

siendo

V_0 la velocidad en el punto de curvatura nula,
 V_c la velocidad en el punto de curvatura finita mayor.

Por otro lado, J no debe rebasar el valor $\frac{49}{V}$,

que concuerda con los límites dados por la Instrucción española 3.1-IC.

Por último, el valor absoluto de Q debe ser, por la ecuación (15), inferior a

$$\frac{4 \text{ \%/seg} \cdot \frac{1}{3,6} \text{ (m/seg)/(km/h)}}{|a_l| \cdot 9,8 \text{ m/seg}^2} = \frac{0,113}{|a_l|} \text{ \%/km/h}$$

Con estas limitaciones se puede elegir el parámetro

$$N = \frac{J}{9,8 a_l} + 0,098 Q$$

más conveniente.

7. EJEMPLO

Un lazo en aceleración de velocidad específica 30 km/h se pretende conectar con una calzada principal en curva de radio 1076,921 m., cuyo peralte es el 2,5 %, y a la que corresponde una velocidad específica de 100 km/h. Se toma como radio mínimo del lazo 25 m. y su peralte el 8 %.

Por la ecuación (7) ha de ser

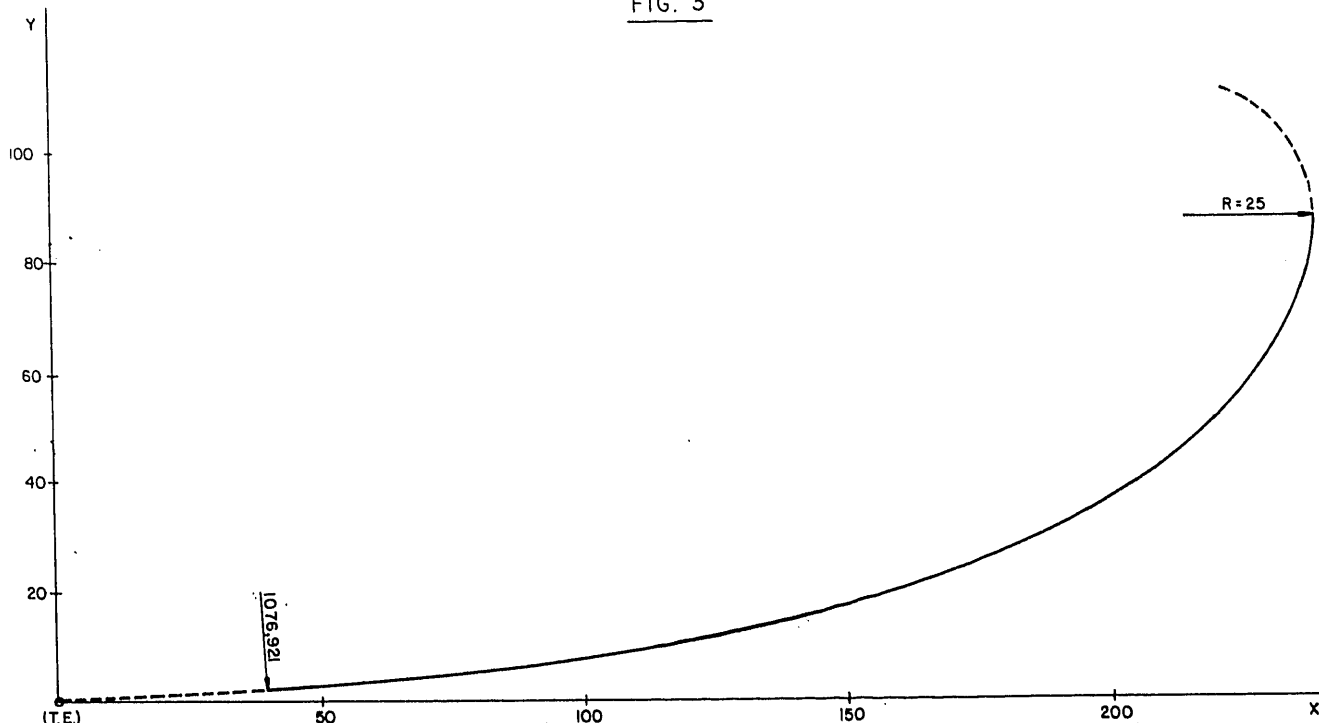
$$\frac{V_0 - 30}{30^2} = \frac{(-1/N)}{3,6 \cdot 25}$$

$$\frac{V_0 - 100}{100^2} = \frac{(-1/N)}{3,6 \cdot 1076,921}$$

siendo V_0 la velocidad en el punto de curvatura nula. Este sistema de ecuaciones admite las soluciones

$$V_0 = 124,3 \text{ km/h} \quad 1/N = -9,433 \text{ seg}$$

FIG. 3



Por otro lado, por la ecuación (14)

$$Q = \frac{8-2,5}{100-30} = 0,079 \text{ \%/(km/h)}$$

y por la ecuación (6)

$$\frac{J}{a_i} = N - gQ = -0,106 - 0,098 \cdot 0,079 = - \\ = -0,1137 \text{ seg}^{-1}$$

Como por la ecuación (53) - a i no puede superar, el caso de aceleración, el valor

$$0,117 + \frac{100}{6667} + \frac{30}{303} - \frac{30 \cdot 100}{38771} = 0,154$$

si tomamos el valor máximo para la

superclotoide salga lo más corta posible

$$J = -0,1137 \cdot 9,8 \cdot (-0,154) = 0,172 \text{ m}$$

que es un valor aceptable según la Instrucción (e máximo para 30 km/h es 0,7 m/seg³).

Las distancias a la tangente de entrada (punto de curvatura nula) correspondientes a los dos radios son, por la ecuación (8)

$$I(25) = \frac{124,3^2 - 30^2}{3,6^2 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot 0,154} = 372,161 \text{ m}$$

$$I(1076,921) = \frac{124,3^2 - 100^2}{3,6^2 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot 0,154} = 139,543$$

resultando así una rama de superclotoide de 232,627 m.

La figura 3 representa esta superclotoide.