REVISTA DE OBRAS PUBLICAS, Junio 1982, Págs. 375 a 394

Orbitas finitas y periódicas producidas por una fuerza central (*)

Por JOSE LUIS DE LA VEGA BENAYAS
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

El descubrimiento de las órbitas descritas bajo la ley de la gravitación universal llevó a Newton y a investigadores posteriores a examinar la posibilidad de otras formas de fuerza central; planteándose también el caso inverso, es decir, hallar la fuerza central que produce una órbita determinada.

El objeto del presente trabajo se centra en la búsqueda de todas las fuerzas centrales que causan órbitas periódicas finitas, sean cerradas o no. Fuerzas que suponemos función exclusiva de la distancia del móvil al centro de fuerzas.

Para ello nos basaremos en las propiedades de la ecuación diferencial que, juntamente con las condiciones iniciales, determina el movimiento.

1. PROPIEDADES DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO O PARTICULA SOMETIDO A UNA FUERZA CENTRAL

Supondremos, sin merma de generalidad, una fuerza atractiva.

1.1. Teorema del momento angular.

$$\frac{d}{dt}\,\bar{r} \wedge m\bar{v} = \bar{r} \wedge \bar{F}$$

como $\bar{r}$ y $\bar{F}$ son coincidentes, $\bar{r} \wedge \bar{F} = 0$

$\bar{r} \wedge m\bar{v} = \text{cte};\ \bar{r} \wedge \bar{v} = \bar{C}$

multiplicando escalarmente por $\bar{r}$

$\bar{r} \cdot \bar{C} = 0$

Ecuación de un plano que pasa por el origen. La trayectoria está contenida en el plano que pasando por el centro de fuerzas es normal al vector $\bar{C}$ definido por el producto vectorial del radio vector y velocidad iniciales ($\bar{C} = \bar{r}_0 \wedge \bar{v}_0$).

Escogeremos coordenadas polares planas r, Θ con origen en el centro de fuerzas.

En este caso, siendo C el módulo de C.

$$/\bar{r} \wedge \bar{v}/ = /\bar{r} \wedge \frac{d\bar{r}}{dt}/ = \frac{1}{dt}\,/\bar{r} \wedge d\bar{r}/ = C;\ /\bar{r} \wedge d\bar{r}/ = C dt$$

como $d\bar{r} = dr \cdot \bar{r}_0 + r d\Theta \cdot \bar{\Theta}_0$

$$/\bar{r} \wedge d\bar{r}/ = r^2 d\,\Theta = C dt$$

Por tanto $r^2\,\dot{\Theta} = C$

De aquí en adelante utilizaremos el punto superpuesto para designar la derivada (o fluxión) respecto al tiempo. Y las comas, para las derivadas respecto a cualquier variable independiente.

$$\left(\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt};\ \dot{r} = \frac{dr}{dt};\ r' = \frac{dr}{d\Theta}\right)$$

1.2. Teorema de la energía cinética.

Para simplificar las expresiones que siguen es clásico utilizar la variable

$$u = \frac{1}{r}.$$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de agosto de 1982.

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\,u = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dt} = -$$

$$= -\frac{1}{u^2}\,u'\,.\,\dot{\Theta} = -Cu'$$

La velocidad absoluta es

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\Theta}^2 = r^2 + r^2\,\frac{C^2}{r^4} = C^2u'^2 + C^2u^2 = C^2(u^2 + u'^2)$$

El teorema de la energía cinética para una fuerza atractiva es:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\bar{F}\,.\,d\bar{r} = -F\,.\,dr;$$

Puesto que, por hipótesis, $F = F(r)$, la fuerza es conservativa. Siendo V el potencial, $dV = +Fdr$

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = E$$

Pero $V = +\int F\,.\,dr = -\int F\frac{1}{u^2}\,.\,du$

Hagamos $\frac{F}{u^2} = f(u) = \frac{1}{2}g'(u)$

$$V = -\frac{1}{2}g(u)$$

La ecuación de la energía se escribe

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}g(u) = E$$

$$u'^2 + u^2 - \frac{1}{mC^2}g(u) = \frac{2E}{mC^2}$$

haciendo $K^2 = mC^2$; $h = \frac{2E}{k^2}$

$$u'^2 = h + \frac{1}{k^2}g(u) - u^2 = P(u)\ [A].$$

Esta es la ecuación que va a presidir este estudio. Es una ecuación diferencial autónoma (no figura la variable independiente Θ) de primer orden y segundo grado.

2. ESTUDIO DE LA ECUACION DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO

Sea $u = u_1$ una solución particular cero del segundo miembro de la ecuación [A]. Se verifica que $u'_1 = 0$, es decir, que u_1 es un extremo de la curva $u = u(\Theta)$: la trayectoria es normal al radio vector en el punto $u = u_1$.

Pues en coordenadas polares se sabe que siendo V el ángulo del radio vector con la tangente

$$\mathrm{tg}\,V = \frac{r}{r'};$$

al anularse u' se anula r' y $V = 90°$.

Por otra parte, como Θ no figura en [A] se tiene que si Θ_1 es el argumento de u_1, la ecuación [A] se verifica para $u(2\Theta_1 - \Theta)$, pues el segundo miembro permanece inalterado y $u'^2(\Theta) = u'^2(2\Theta_1 - \Theta)$ para $\Theta = \Theta_1$.

2.1. Por tanto, la trayectoria es simétrica respecto al radio vector

$r_1 = \frac{1}{u_1}$ tal que u_1 sea una raíz de $P(u) = 0$

2.2. Esto es el resultado de un teorema más general que afirma que si $u_1 = u(\Theta)$ es una solución de una ecuación diferencial autónoma

$$u' = Q(u);$$

también lo es $u(\Theta + s)$; lo cual es evidente, ya que $Q(u)$ no contiene a Θ y, por ende, $Q(u) = Q(u + s)$; con lo que $u'(\Theta) = u'(\Theta + s)$.

En nuestro caso, $u'^2 = P(u)$ y

$u_1 = u(\Theta)$; $u_2 = u(-\Theta)$; $u_3 = u(\pm\Theta + s)$ [1],

son todas soluciones de (A). Por eso son idénticas las soluciones de la forma [1] que tengan un punto común como ocurre para $u_1(\Theta)$ y $u_2(2\Theta_1 - \Theta)$, en el punto $\Theta = \Theta_1$.

2.3. Por cada punto del plano pasa una órbita y sólo una.

Pues si hubiera dos soluciones u_1 u_1 de la ecuación [A] tales que $u = u_1(\Theta_1) = u_2(\Theta_2)$, de las integrales $u_2 = u_2(\Theta)$ y $u_1 = u_1(\Theta + \Theta_1 - \Theta_2)$, la segunda es también solución de la misma ecuación autónoma por el punto anterior. Y como ambas coinciden por hipótesis para el valor $\Theta = \Theta_2$, se tiene, en virtud del teorema de unicidad de la ecuación diferencial, que $u_1 \equiv u_2$.

2.4. Por el apartado anterior sabemos que las diversas soluciones de [A] no tienen puntos comunes. Veamos si una órbita puede cortarse a sí misma. Sea u_o una tal integral, que se iguala para Θ_1 y Θ_2.

$u_o(\Theta_1) = u_o(\Theta_2)$ Sea $\Psi = \Theta_2 - \Theta_1$

Demostraremos que

$$u_o(\Theta) = u_o(\Theta + \Psi)$$

$$u_o(\Theta_1) = u_o(\Theta_2) = u_o(\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_1) = u_o(\Theta_1 + \Psi)$$

Luego la órbita se cortará si es periódica, de ›ríodo principal Ψ.

Si hacemos $\Theta = m\Psi + \alpha$

$u(\Theta) = u(\Theta + m\Psi)$.

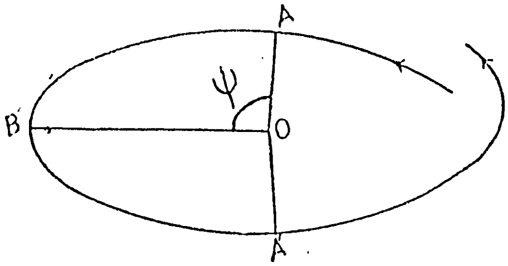
Sean ahora $\Psi_1\ \Psi_2\ \Psi_3 \ldots$ los posibles períodos. S› tendrá:

$u(\Theta) = u(\Theta + \Psi_1) = u(\Theta + \Psi_2) = u(\Theta + \Psi_1 + \Psi_2 \ldots)$

En conclusión, las órbitas son simétricas respecto de los radios vectores extremos de la función $u = u(\Theta)$, se cortan si son periódicas y quedan definidos por un punto del plano (condiciones iniciales) (1).

2.5. Líneas apsidales y ángulo apsidal de la trayectoria.

Si $u = u_2$ es otro valor de u_2 perteneciente a la curva integral $u = u(\Theta)$ que anula el segundo miembro de [A] estamos ante otro extremo, cuyo radio vector correspondiente es otro eje de simetría de la trayectoria. Los radios vectores que van a esos puntos, cuya tangente les es perpendicular, se denominan líneas apsidales o absidales. Son los extremos de u, máximos o mínimos. Es evidente que con dos líneas apsidales queda definida la trayectoria, pues basta con ir haciendo simetrías respecto a ellas. El ángulo entre dos líneas apsidales es el ángulo apsidal, y es una constante de la órbita.



› trayectoria se desarrolla entre dos círculos co›éntricos correspondientes a dos raíces conse-cu›as de $P(u) = 0$. Más adelante habrá ocasión de an› zar cuáles son las raíces de $P(u)$ que intervie›n y su significado físico.

3. ›OLUCIONES DE LA ECUACION ›IFERENCIAL $u'^2 = P(u)$.

› demuestra en análisis matemático (2) que en el ›mpo complejo las únicas soluciones uniformes de ›sta ecuación diferencial se producen cuando P(es un polinomio de 4.° grado. Cualquier polino›o de grado 5.° o superior, primo con su derivada› s decir, sin raíces múltiples, no admite una inte› l uniforme de la misma.

Con mayor amplitud aún se demuestra (3) que cualquier ecuación autónóma $F(y, y') = 0$, donde F es una ecuación algébrica, exige para dar funciones uniformes, que considerando $F(y\ y') = 0$, como la ecuación de una curva con las variables y y', que ésta sea de género cero o uno.

3.1. Género de una ecuación diferencial algébrica.

Recordaremos con rapidez que una curva de grado n queda determinada por $\frac{n(n+3)}{2}$ puntos o parámetros y que el número máximo de puntos dobles es $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Si posee realmente d puntos dobles su genero es

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$$

Una curva de género cero posee

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

puntos dobles y la de primer género

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Las *cónicas* dependen de 5 parámetros y son de género cero o unicursales: sus coordenadas pueden expresarse racionalmente en función de un parámetro.

Las *cúbicas* se determinan por 9 puntos y admiten como máximo un punto doble. En este caso también son unicursales: toda recta variable que pase por el punto doble le corta solamente en otro punto.

Las *cuárticas* dependen de 14 puntos y pueden tener como máximo 3 puntos dobles. Si es de género cero basta cortarla por un haz de cónicas que pasen por los tres puntos dobles y otro punto cualquiera de la cuártica. El quinto punto de intersección se expresará en función del parámetro de este haz de cónicas de un modo racional.

Esta consideración de la ecuación diferencial $F(y\ y') = 0$ como una curva de coordenadas y e y', estudiando el género de la relación entre esas variables, da un punto de vista muy amplio y permite predecir el tipo de solución que se va a obtener para la curva integral.

Efectivamente, si $F(y\ y')=0$ es de género cero, esta ecuación es equivalente a una paramétrica de funciones racionales

$y=f(z) \qquad y'=g(z)$

Su integral se obtiene del modo siguiente

$$dx=\frac{1}{y'}\cdot dy=\frac{f'(z)}{g(z)}\,dz;$$

$$x+c=\int\frac{f'(z)}{g(z)}\,dz; \qquad y=f(z)$$

La ecuación diferencial $y'^2=P_4(y)$, donde P_4 es un polinomio de 4.° grado en y entraña una relación de primer género entre y e y', pues considerando la curva $y^2=P_4(x)$, tiene un punto singular en el punto impropio del eje y, siendo tangentes en él dos ramas de la curva (como la $y^2=x^4$ en el origen). Equivale este punto singular impropio, pues, a 2 puntos dobles. Basta cortarla por la parábola $y'_1=\sqrt{a_0}\,x^2+y_1$; $y=Xy_1$ para que se transforme en $y_1{}^2=P_3(y)$, que es una cúbica sin puntos dobles, es decir, de género uno por lo dicho anteriormente.

En cambio, la ecuación $y'^2=(y-a)^2(y-b)(y-c)$ es de género cero, pues añade a los dos puntos dobles impropios anteriores el punto doble $y=a$, $y'=0$. Considerando y y' como coordenadas de un punto, la curva es unicursal. Basta cortarla por un haz de cónicas tangentes a la cuártica en el punto impropio (parábola del tipo $y'=my^2$) y que pase por otro punto de la misma ($y'=0$ $y=a$ ó $y=b$). En efecto, el cambio $y'=z(y-a)\ (y-b)$ da $z^2(y-b)=y-c$; que permite expresar y e y' como funciones racionales de z.

En general, si la relación representada por la función $F(y\ y')=0$ es de primer género, ambas variables pueden expresarse mediante funciones elípticas de un parametro

$$u=\int\frac{dy}{Y}=\int\frac{dy}{\sqrt{P(y)}}$$

donde P(y) es un polinomio de tercer o cuarto grado.

4. ESTUDIO DE LAS FORMAS POSIBLES DE LA ECUACION DIFERENCIAL

$$u'^2=P(u)=h+\frac{1}{k^2}g'(u)-u^2$$

Hemos dicho antes que las únicas soluciones uniformes de esta ecuación diferencial son aquellas donde P(u) es un polinomio de 4.° grado como máximo.

Se llega así a las siguientes formas posibles.

I) $Au'^2=(u-a)(u-b)$
II) $Au'^2=(u-a)(u-b)^2$
III) $Au'^2=(u-a)^2(u-b)(u-c)$
IV) $Au'^2=(u-a)\dfrac{2p+1}{p}(u-b)\dfrac{2p-1}{p}$
V) $Au'^2=(u-a)^3(u-b)$
VI) $Au'^2=(u-a)(u-b)(u-c)$
VII) $Au'^2=(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)$

Que se deducen del estudio realizado por Goursat, por el cual la multiplicidad de las raíces de P(u) tiene que ser, o bien superior a 2 o bien de la forma $2(1-\frac{1}{i})$, siendo i un número entero mayor que 1 (5).

En el campo real, que es donde nos desenvolvemos, el estudio tiene plena validez con las limitaciones de que las expresiones deben ser reales y u'^2 siempre positivo: no se tienen en cuenta los períodos imaginarios de las funciones integrales y sus puntos singulares son también reales.

Supondremos a, c, b reales y $a < c < b$, salvo en el caso VII, donde c y d pueden ser imaginarios conjugados.

4.1. Análisis e integral de cada una de las ecuaciones.

* I.—$Au'^2=(u-a)(u-b)=P(u)$

Para que P(u) sea de la forma

$h+\frac{1}{k^2}g(u)-u^2$; $A=-1$

$u'^2=(b-u)(u-a)$; ($h=-ab$; $\frac{1}{k^2}=a+b$; $g(u)=u$)

Su integral es inmediata. Haciendo $u=a$ para $\Theta=0$.

$$\int_a^u\frac{du}{\sqrt{(b-u)(u-a)}}=\int_0^\Theta d\Theta$$

con el cambio $z^2=\dfrac{u-a}{b-u}$ se convierte en

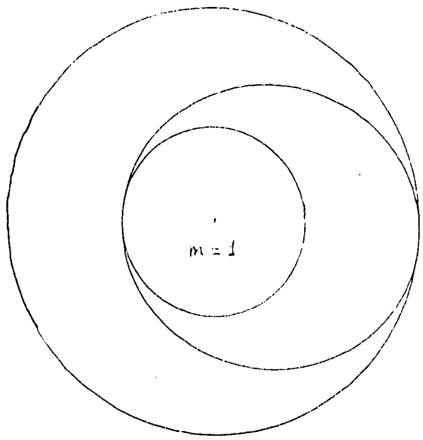
$$\Theta=2\int_0^z\frac{dz}{1+z^2}=2\,\text{arc tg}\,z;$$

$$z^2=\text{tg}^2\frac{\Theta}{2}=\frac{u-a}{b-u}$$

$= a\cos^2\frac{\Theta}{2} + b\,\mathrm{sen}^2\frac{\Theta}{2}$

$= a(1+\cos\Theta) + b(1-\cos\Theta) =$
$(a+b) - (b-a)\cos\Theta,$

…e representa una elipse de foco el centro de fuerz…s tangente a los círculos u = a y u = b



La órbita es cerrada y el ángulo apsidal vale

$$\Psi = \int_b^a \frac{du}{\sqrt{(b-u)(u-a)}} = 2\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2} = \pi$$

Que es también el valor de Θ para $u = b$

Como $g(u) = u$; $F = \frac{1}{2}u^2 g'(u) = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}$

La fuerza atractiva es *newtoniana*.

II. −

II.1. $Au'^2 = (u-a)(u-b)^2$

$a < u < b \qquad A > 0$

…ngamos $A^2u'^2 = (u-a)(b-u)^2$

…ciendo el cambio $u - a = z^2(b-u)$

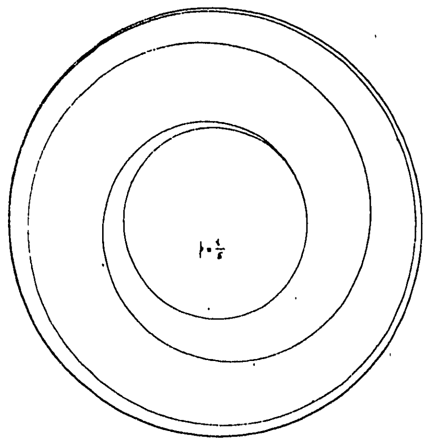
$$4\,\frac{\cdots^2}{\cdots a)}\, z'^2 = 1 + z^2; \text{ con } z = 0 \text{ para } u = a \quad \Theta = 0$$

$$2\,\frac{\cdots}{\cdots -a}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \Theta = 2\frac{A}{\sqrt{b-a}}\ \text{arg shz}$$

$$z = \frac{\sqrt{b-a}}{2A}$$

$$u = a + (b-a)\frac{z^2}{z^2+1} = a + (b-a)\,\mathrm{th}^2\left(\frac{\sqrt{b-a}}{2A}\,\Theta\right)$$

El móvil arranca de $u = a$ y se envuelve en el círculo asintótico $u = b$. $u = b$ para $\Theta \to \infty$



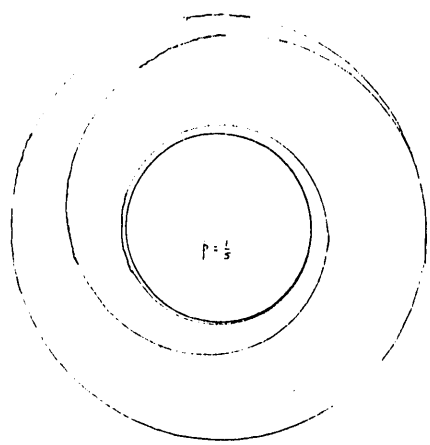
Como $r^2\,\dot{\Theta} = C$; $\quad \dot{\Theta} = Cu^2$; $\quad \frac{d\Theta}{dt} = Cu^2$

El móvil alcanza el círculo $u = b$ en un tiempo infinito. El ángulo apsidal pierde sentido.

II.2. $A^2u'^2 = (u-a)^2(b-u)$ válida para $u < b$, la solución es

$$u = b - (b-a)\,\mathrm{th}^2\left(\frac{\sqrt{b-a}}{2A}\,\Theta\right)$$

El móvil arranca ahora de $u = b$ y va a enrollarse para $\Theta = \infty$, en su tiempo infinito, en el círculo asintótico interior $u = a$.



En este caso II no hay movimiento periódico y carece, por tanto, de interés para el presente estudio.

Desarrollando la ecuación diferencial de este tipo II e identificando con

$$u'^2 = h + \frac{1}{k^2} g(u) - u^2$$

g(u) es el tipo $g(u) = Au^3 - Bu^2 + Cu$

y F(u) será la forma $F = Mu^4 - Nu^3 + Pu^2$

$$F = \frac{M}{r^4} - \frac{N}{r^3} + \frac{P}{r^2}$$

fuerza central que produce órbitas finitas amortiguadas asintóticamente.

* III. Estudiaremos las cinco variantes siguientes, suponiendo siempre $a < c < b$.

III.1.1. $A^2u'^2 = (u-a)^2(u-c)(b-u)$
III.1.2. $A^2u'^2 = (u-a)^2(c-u)(b-u)$
III.2.1. $A^2u'^2 = (u-a)(u-c)(b-u)^2$
III.2.2. $A^2u'^2 = (u-a)(c-u)(b-u)^2$
III.3. $A^2u'^2 = (u-a)(u-c)^2(b-u)$

III.1.1. $A^2u'^2 = (u-a)^2(u-c)(b-u)$

Para que el segundo miembro sea positivo $c < u < b$, es decir, que la trayectoria se desarrollará en la corona comprendida entre los círculos $u = c$ y $u = b$.

Hagamos el cambio $\frac{u-c}{u-a} = z^2$ en la integral

$$\Theta = \int_c^u \frac{A\,du}{(u-a)\sqrt{(u-c)(b-u)}}$$

donde se ha tomado como límite inferior $\Theta = 0$, $u = c$, $z = 0$.

$$du = \frac{2}{c-a}(u-a)^2 z\,dz; \quad u = \frac{c-az^2}{1-z^2}$$

$$\Theta = \frac{2A}{c-a}\int_0^z \sqrt{\frac{u-a}{b-u}}\,dz =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{c-a}}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{b-c-(b-a)z^2}} =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{(c-a)(b-c)}}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{b-a}{b-c}z^2}} =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{(c-a)(b-a)}} \text{ arc sen } \sqrt{\frac{b-a}{b-c}}\,z;$$

Haciendo $n^2 = \frac{(c-a)(b-a)}{4A^2}$; $\quad k^2 = \frac{b-c}{b-a}$

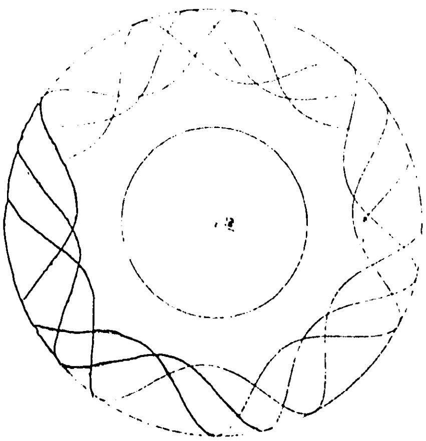
$z = k \text{ sen } n\,\Theta$

$$u = \frac{c-az^2}{1-z^2} = c + (c-a)(b-c) \cdot \frac{\text{sen}^2 n\,\Theta}{(b-a)-(b-c)\,\text{sen}^2 n\,\Theta}$$

u es, pues, una función periódica de período $\frac{2\pi}{n}$

Inicialmente, el móvil arranca de $u = c$ y describe una curva continua, acercándose al círculo exterior $u = b$, que alcanza tangencialmente cuando sen $\Theta = 1$,

o sea, para $\Theta = \frac{\pi}{2n}$. Este es, por tanto, el ángulo apsidad. La trayectoria son una serie de arcos tangentes a los círculos $u = c$ $u = b$. Esta curva múltiple se cerrará cuando n sea un número entero o fraccionario.



III.1.2. $A^2 u'^2 = (u-a)^2 (c-u)(b-u)$

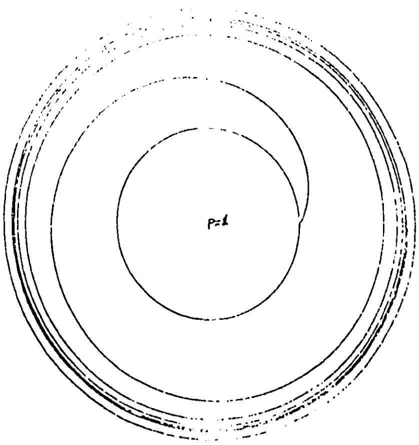
Aparte de las soluciones singulares $u=a$, $u=b$, $u=c$ la curva integral sólo será real cuando $u < c$, es decir, que la trayectoria se desenvolverá entre los círculos $u=a$ y $u=b$, pues suponemos $a < c < b$.

Y aquí sí podemos avanzar de antemano que al ser $u=a$ un punto singular de la ecuación diferencial que hace infinita la integral, el círculo $u=a$ es asintótico: se alcanza cuando $\Theta \rightarrow \infty$, o sea, en un tiempo infinito (6). La trayectoria arranca, pues, de $u=c$ y se aproxima a $u=a$ en un tiempo infinito. Es un movimiento aperiódico asintóticamente amortiguado.

III.2.1. $A^2 u'^2 = (u-a)(u-c)(b-u)^2$

La integral tiene validez para $u \gtrless c$.

Por tanto, u estará entre c y b. Como $u=b$ es un círculo asintótico, por las razones apuntadas en el apartado anterior, el móvil ejecutará un movimiento aperiódico, que partiendo de $u=c$ va a envolverse asintomáticamente en el círculo $u=b$.



III.2.2. $A^2 u'^2 = (u-a)(c-u)(b-u)^2$

La integral tiene una validez para $a > u > c$. Como $u=a$ y $u=c$ no son círculos asintóticos, la integral va a ser análoga a la del apartado III.1.1.

Hacemos el cambio $\dfrac{u-a}{b-u} = z^2$;

$$du = \frac{2}{b-a}(b-u)^2 z\,dz$$

Tomando como posición inicial $\Theta = 0$; $u=a$, $z=0$ la integral

$$\Theta = A \int_a^u \frac{du}{(b-u)\sqrt{(u-a)(c-u)}}$$

se convierte en

$$\Theta = \frac{2A}{b-a} \int_0^z \sqrt{\frac{b-u}{c-u}}\,dz =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{b-a}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{c-a-(b-c)z^2}} =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{(b-a)(b-c)}} \ \text{arc sen} \sqrt{\frac{b-c}{c-a}}\, z$$

Haciendo $p^2 = \dfrac{(b-a)(b-c)}{4A^2}$; $\quad k'^2 = \dfrac{c-a}{b-c}$

$z = k' \text{ sen } p\,\Theta$

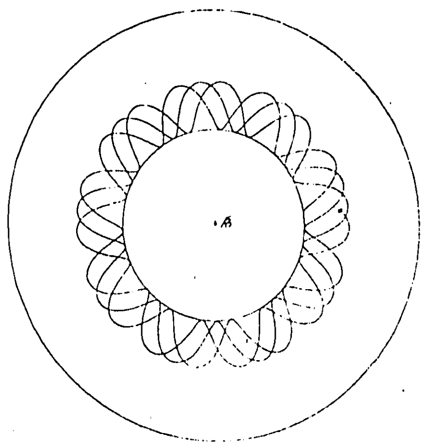
$$u = a + b - a \frac{z^2}{1+z^2} = a +$$

$$+ (b-a)(c-a) \frac{\text{sen}^2\, p\,\Theta}{(b-c) + (c-a)\text{sen}^2\, p\,\Theta}$$

Función periódica de período $\dfrac{\pi}{p}$

El móvil arranca de $u=a$ y alcanza el círculo $u=c$ tangencialmente cuando sen $p\,\Theta = 1$, o sea, para $\Theta = \dfrac{\pi}{2p}$, que es precisamente el ángulo apsidal.

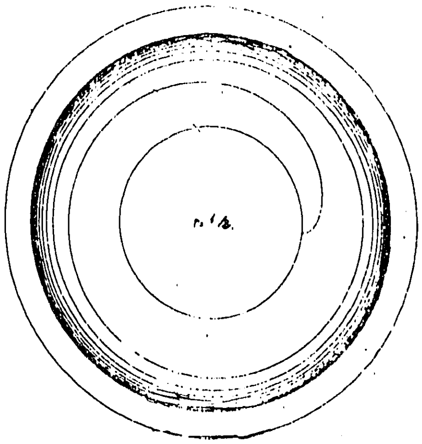
La trayectoria es múltiple: se compone de una serie de arcos simétricos respecto a las líneas apsidales $\Theta = 0$, $\Theta = \dfrac{\pi}{2p}$, que son tangentes sucesivamente a los círculos $u=a$ y $u=c$. La trayectoria se cerrará si p es conmensurable con π, es decir, para p entero o número fraccionario.



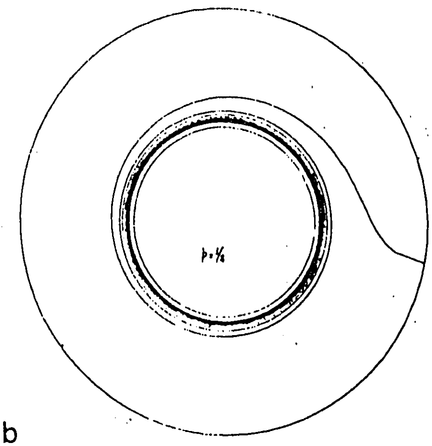
III.3. $A^2 u'^2 = (u-a)(u-c)^2 (b-u)$

La curva integral será real siempre, pero tiene un círculo asintótico en $u = c$ intermedio entre a y b. Si inicialmente arranca de $u = a$, finalizará en un tiempo infinito, envolviéndose en $u = c$. Y si, por el contrario, empieza en $u = b$ acabará aproximándose asintóticamente al círculo $u = c$.

En ambos casos no hay solución periódica.



$a < u < c$



$c < u < b$

* IV.—

IV.1. $A^2 u'^2 = (u-a)^{\frac{2p+1}{p}} (b-u)^{\frac{2p-1}{p}}$

p, número entero

$$d\Theta = A \int \frac{du}{(u-a)^{\frac{2p+1}{2p}} (b-u)^{\frac{2p-1}{2p}}}$$

Como el exponente de $u-a$ es mayor que 1, $u = a$ es un círculo asintótico (7).

La trayectoria arrancará de $u = b$ y se aproximará indefinidamente al círculo asintótico $u = a$. No hay solución periódica.

$$u = \frac{b + a M \Theta^{2p}}{1 + M \Theta^{2p}}$$

IV.2. $A^2 u'^2 = (u-a)^{\frac{2p-1}{p}} (b-u)^{\frac{2p+1}{p}}$

En este caso el círculo asintótico es el $u = b$. Tampoco hay solución periódica

$$u = \frac{a + b M \Theta^{2p}}{1 + M \Theta^{2p}}$$

* V. Es un caso particular del IV para $p = 1$. No tiene interés para el presente estudio, pues las curvas integrales no son periódicas.

* VI. $A^2 u'^2 = (u-a)(u-c)(u-b)$

Puesto que el polinomio del segundo miembro es una cúbica, estamos ante una integral elíptica.

Hagamos el cambio $u = a + (c-a) \operatorname{sen}^2 \varphi$

$du = 2(c-a) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi$.

$$A \int \frac{du}{\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)}} =$$

$$= \frac{2A}{(c-a)\sqrt{b-a}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} :$$

s ·ndo $k^2 = \dfrac{c-a}{b-a}$

c e es la expresión canónica de la integral elíptica c 1.ª especie.

La función elíptica φ vale $\varphi = \mathrm{am}(M\ \Theta)$

d nde $M = \dfrac{(c-a)\sqrt{b-a}}{2A}$

por tanto, como $\mathrm{sen}\ \varphi = \mathrm{sn}(M\ \Theta)$

$u = a + (a-a)\mathrm{sn}^2\ (M\ \Theta)$

como sn o = o y snK = 1 la órbita se desarrolla entre $u = a$ y $u = c$ con un ángulo apsidal $\dfrac{K}{M}$

La «integral completa»

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d}{\sqrt{1-K^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}} = K$$

define el período real de sn(M Θ) que es 4K.

Por tanto, u es una función periódica; su período, $\dfrac{2\ K}{M}$, depende de a, b, c y A.

Las órbitas múltiples se cerrarán si $\dfrac{4\ K}{M}$, es múltiplo o fracción de π.

$$\left(\frac{4K}{M} = \pi\,\frac{p}{q}\right)$$

H y que tener en cuenta que K contiene el número π 8).

I. $A^2\,u'^2 = (u-a)(u-c)(u-d)(u-b)$.

S ponemos reales las raíces del segundo mie bro y $a < c < d < b$.

E a ecuación diferencial de primer género en u, u' d ugar también a una integral elíptica de 1.ª espec es decir, finita para cualquier valor de u.

L forma más cómoda para integrarla se consigue reduciendo el segundo miembro a una ecu ón bicuadrada del tipo

$(z^2 \ldots)(z^2-r_2^2)$.

Para ello partimos de una transformación involutiva que tenga como puntos conjugados (a,b) y (c,d) (9). Se tendrá:

$$u_1u_2 + M(u_1+u_2) + N = 0$$
$$ab + M(a+b) + N = 0$$
$$cd + M(c+d) + N = 0$$

Eliminando M y N, la ecuación de la involución es

$$\begin{vmatrix} u_1u_2 & u_1+u_2 & 1 \\ ab & a+b & 1 \\ cd & c+d & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Y los puntos dobles salen de

$$\begin{vmatrix} D^2 & 2D & 1 \\ ab & a+b & 1 \\ cd & c+d & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La involución referida a los puntos dobles es

$$\frac{u_1-D_1}{u_1-D_2} + \frac{u_2-D_1}{u_2-D_2} = 0$$

Haciendo ahora la transformación

$$z = \frac{u-D_1}{u-D_2}$$

los homólogos de dos puntos conjugados verificarán $z_1 + z_2 = 0$.

Los transformados de a, b, c, d serán

$$+r_1 = \frac{a-D_1}{a-D_2},\ -r_1 = \frac{b-D_1}{b-D_2};$$

$$+r_2 = \frac{c-D_1}{c-D_2},\ -r_2 = \frac{d-D_1}{d-D_2}$$

Aplicando este cambio de variables a la ecuación diferencial, tomando como punto de partida $\Theta = 0$, $z = 0$, $u = D_1$;

$$\Theta = A \int_{D_1}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u-a)(u-c)(u-d)(u-b)}} =$$

$$= \frac{-A(D_2-D_1)}{\sqrt{(D_2-a)(D_2-c)(D_2-d)(D_2-b)}}$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-r_1^2)(z^2-r_2^2)}}$$

Como $r_1 > r_2$ por ser $a < c$ y $d < b$

hagamos el nuevo cambio $z = r_2 \operatorname{sen} \varphi$, denominando:

$$k = \frac{r_2}{r_1} \quad y \quad B^2 = \frac{(D_2-a)(D_2-c)(D_2-d)(D_2-b)}{A^2(D_2-D_1)^2} r_1^2$$

$$-B\,\Theta = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad ;$$

con lo que $\varphi = \mathrm{am}(-B\,\Theta) = -\mathrm{am}(B\ )$

y, por tanto, $z = r_2 \operatorname{sen} \varphi = -r_2 \operatorname{sen} \mathrm{am}(B\,\Theta) = -r_2 \operatorname{sn} B\,\Theta$.

La «integral completa» es, como siempre

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Por la relación entre z y u

$$u = \frac{D_2 z - D_1}{z-1} = + \frac{D_2 r_2 \operatorname{sn} B\,\Theta + D_1}{1 + r_2 \operatorname{sn} B\,\Theta}$$

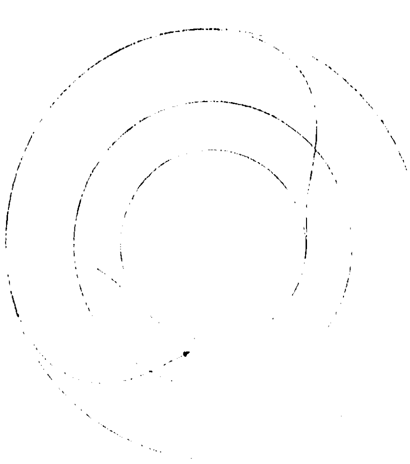
u es una función elíptica del período $\frac{4K}{B}$. Estudiemos su evolución en un período.

$B\,\Theta$	Θ	$\operatorname{sn} B\,\Theta$	z	u
0	0	0	0	D_1
K	K/B	1	$-r_2$	c
2K	2K/B	0	0	D_1
3K	3K/B	-1	r_2	d
4K	4K/B	0	0	D_1

Como D_1 está entre c y d, la trayectoria se desarrolla entre los círculos $u = c$ $u = d$, en cuyos puntos de tangencia están los sucesivos ápsides. El ángulo apsidal es

$$\frac{3K}{B} - \frac{K}{B} = \frac{2K}{B}$$

un semiperíodo, que será mayor o igual que $\frac{\pi}{B}$.



4.2. Conclusiones del estudio de las integrales de las ecuaciones diferenciales

Puesto que nuestro objeto es la búsqueda de todas las trayectorias finitas y periódicas de un móvil en un campo central de fuerzas, solamente son válidas las que se derivan de las ecuaciones siguientes:

* I $u'^2 = (u-a)(b-u)$
* III $A^2 u'^2 = (u-a)(c-u)(b-u)$ $c \ll u \ll b$
$A^2 u'^2 = (u-a)(c-u)(b-u)^2$ $a \ll u \ll c$
* VI $A^2 u'^2 = (u-a)(u-c)(u-b)$
* VII $A^2 u'^2 = (u-a)(u-c)(u-d)(u-b)$

Han desaparecido todas las ecuaciones diferenciales que entrañaban un valor de u que diera lugar a un infinito logarítimico, o sea, más geométrica y físicamente, a un círculo asintótico o, lo que es lo mismo, a un movimiento de amortiguación asintótica: aproximación en un tiempo infinito a un círculo apsidal.

De todas ellas, solamente la primera responde a la acción de una fuerza newtoniana y su trayectoria es una elipse con un foco en el centro de fuerzas.

Las demás son rosetas que se inscriben en dos círculos tangenciales y cuyo desfase da lugar a un círculo apsidal bien definido.

Para hallar las fuerzas de las que derivan estos movimientos basta comparar cada una de las ecuaciones con la de la energía cinética, o fórmula [A], que ha presidido y preside este estudio:

$$u'^2 = h + \frac{1}{k^2} g(u) - u^2; \quad (A)\ (k^2 = mC^2; \quad hk^2 = 2E)$$

Recordando que $F(u) = \frac{1}{2} u^2 g'(u)$

*I $u'^2 = -ab + (a+b)u - u^2$

$g(u) = Mu;\ g'(u) = M$

$$2F(u) = \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{r^2} \quad \text{ley newtoniana.}$$

*II. $A^2 u'^2 = -a^2bc + (a^2b + a^2c + 2abc)u -$
$-(a^2 + 2ab + 2ac + bc)u^2 + (2a + b + c)u^3 - u^4$

$$g'(u) = M - Nu + Pu^2 - \frac{4u^3}{A^2}$$

$$2F(u) = \frac{M}{r^2} - \frac{N}{r^3} + \frac{P}{r^4} - \frac{Q}{r^5}$$

siendo M, N y P funciones de a, b, c y de un parámetro arbitrario A.

*VI. $A^2 fu'^2 = u^3 - (a+b+c)u^2 + (ab+ac+bc)u - abc$

$$g'(u) = M - Nu + \frac{3u^2}{A^2}$$

$$F(u) = \frac{M}{r^2} - \frac{N}{r^3} + \frac{P}{r^4}$$

M, N, P funciones de a, b, c y de un parámetro A

* VII. $A^2u'^2 = (u-a)(u-c)(u-d)(u-b)$

$A^2 fu'^2 = u^4 - (a+b+c+d)u^3 + (ab+ac+ad+bc+$
$+bd+cd)u^2 - (abc+abd+acd+bcd)u + abcd$

$$g'(u) = -M + Nu - Pu^2 + \frac{4}{A^2}u^3$$

$$2F(u) = -\frac{M}{r^2} + \frac{N}{r^3} - \frac{P}{r^4} + \frac{Q}{r^5}$$

M, N, P, Q, funciones de a, b, c, d y de un parámet A.

5. MPLIACION DEL ESTUDIO N BUSCA DE FORMULACIONES AS COMPLETAS DE LA LEY E FUERZAS

H ta aquí el estudio se ha basado en las propied les de la ecuación diferencial del movimiento (fórr la [A]) y en la búsqueda de soluciones uniformes ara la misma, es decir, en hallar una solución u = f 9), que, cumpliendo las condiciones iniciales, sea una integral de dicha ecuación diferencial para cualquier valor real de Θ.

En el campo complejo una relación $z = f(x)$ puede dar valores muy diferentes para z, según el camino que sigue x para ir de un valor x_0 a otro x_1. Por eso se llaman funciones uniformes o monódromas aquellas cuyo valor final z (x_1) no depende del camino seguido por x para pasar de x_0 a x_1.

En el campo real, tal camino es único y sólo se atiende a la continuidad y al valor real o imaginario de la variable dependiente.

Consideremos $z^4 = x$.

En el plano complejo si x pasa de x_0 a x_1, rodeando el origen de coordenadas, el módulo de z no varía, pero sí su argumento que se incrementa en $\frac{2\pi}{4}$ por cada vuelta completa. Pues

$$z^4 = r\,e^{(\Theta + 2k\pi)i}$$

$$z = r^{1/4}\ e^{\frac{\Theta}{4}i + \frac{2k\pi i}{4}}$$

En el campo real $z = x^{1/4}$ tiene un valor constante y sólo está en juego su realidad cuando x es negativo.

Por estas consideraciones parece razonable y con significado físico ceñirnos al campo real de un lado; y de otro ampliar el alcance de las ecuaciones diferenciales ya aprobadas para nuestros fines, haciendo la sustitución de u por u^m, siendo m un número real cualquiera racional o irracional. Procederemos después, a la vista de los resultados obtenidos, a estudiar su campo de validez y la continuidad y regularidad de las funciones obtenidas si procede.

5.1. Paso a un mayor campo de variación de la variable u, es decir, del inverso del radio vector r de la ecuación polar de las trayectorias centrales.

Si en la ecuación $u'^2 = P(u)$ cambiamos u por u^m tendremos $(u^m)'^2 = P(u^m)$. Como P(u) es de 4.° grado como máximo, $m^2u^{2m-2}u'^2 = P_4(u^m)$.

Por tanto, la ecuación que nos planteamos ahora es

$$u'^2 = \frac{a_0 + a_1u^m + a_2u^{2m} + a_3u^{3m} + a_4u^{4m}}{u^{2m-2}}$$

Si u'^2 se anula para u = a, b, c, d pondremos

$$Au'^2 = \frac{(u^m - a^m)(u^m - c^m)(u^m - d^m)(u^m - b^m)}{u^{2m-2}}$$

Considerando, como siempre, $a < c < d < b$

5.2. Análisis de las ecuaciones diferenciales posibles.

5.2.1. I'. $$u'^2 = \frac{(u^m - a^m)(b^m - u^m)}{u^{2m-2}}$$

Con el cambio $y = u^m$ la ecuación se convierte en

$$\frac{1}{m^2} y'^2 = (b^m - y)(y - a^m)$$

Tomando como punto de partida $\Theta = 0$, $u = a$, $y = a^m$

$$\int_0^\Theta m d\Theta = \int_{a^m}^{y} \frac{dy}{\sqrt{(b^m - y)(y - a^m)}} =$$

$$= \text{arc sen} \frac{2y - b^m - a^m}{b^m - a^m} + \frac{\pi}{2}$$

$$2y = b^m + a^m - (b^m - a^m) \cos m\Theta$$

Trayectoria:

$$2u^m = b^m + a^m - (b^m - a^m) \cos m\Theta$$

$$2u^m = a^m(1 + \cos m\Theta) + b^m(1 - \cos m\Theta)$$

Tanto la ecuación $y = y(\Theta)$ como la $u^m = y(\Theta)$ representan curvas periódicas. Como $r^2 \dot{\Theta} = C$;

$$\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt} = Cu^2 > 0.$$ La trayectoria se desarrolla creciendo δ.

Como u es siempre positiva, el valor $u = y^{1/m}$ tiene, pues, pleno sentido sin restricción alguna.

El período de la curva es $\frac{2\pi}{m}$. El ángulo apsidal será el valor de δ para $u = b$, es decir, cuando $\cos m\Theta = 1$, $\Psi = \frac{\pi}{m}$. Valor que se deduce también tomando b^m como límite superior de la integral. Es decir, cuando pasa de un apside al otro.

Hallemos la fuerza que causa este movimiento.

$$u'^2 = \frac{(u^m - a^m)(b^m - u^m)}{u^{2m-2}} = \frac{(ab)^m}{u^{2m-2}} + \frac{b^m + a^m}{u^{m-2}} - u^2$$

Identificando esta ecuación con la [A].

$$g(u) = k^2 \left(\frac{b^m + a^m}{u^{m-2}} - \frac{(ab)^m}{u^{2m-2}} \right) - 2E$$

$$g'(u) = k^2 \left(\frac{(2m-2)(ab)^m}{u^{2m-1}} - (m-2) \frac{b^m + a^m}{u^{m-1}} \right)$$

$$F(u) = \frac{k^2}{2} \left(\frac{(2m-2)(ab)^m}{u^{2m-3}} - (m-2) \frac{b^m + a^m}{u^{m-3}} \right)$$

Siendo s_m la media armónica de a^m y b^m,

$$\frac{2}{s_m} = \frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m};$$

la ecuación de la fuerza puede escribirse:

$$F(u) = B \left(s_m \frac{m-1}{u^{2m-3}} - \frac{m-2}{u^{m-3}} \right) \quad \text{ó}$$

$$F(u) = A \frac{m-1}{u^{2m-3}} - B \frac{m-2}{u^{m-3}};$$

con $A = Bs_m$

Esta fórmula de la fuerza juntamente con la trayectoria

$$2u^m = a^m(1 + \cos m\delta) + b^m(1 - \cos m\delta)$$

permiten la obtención de un sinnúmero de órbitas finitas periódicas.

Por lo pronto puede establecerse una primera clasificación en el tipo de fuerzas centrales atractivas delimitada por el valor $m = \frac{3}{2}$

Para $m > \frac{3}{2}$ la fuerza es proporcional a la distancia, r, al centro

$$F = A(m-1) r^{2m-3} - B(m-2) r^{m-3}$$

ara $m<\frac{3}{2}$ la fuerza es inversamente proporcional
a r

$$F = A\,\frac{m-1}{m^{3-2m}} - B\,\frac{m-2}{r^{3-m}}$$

5.2.1.1. $m=\frac{3}{2}$

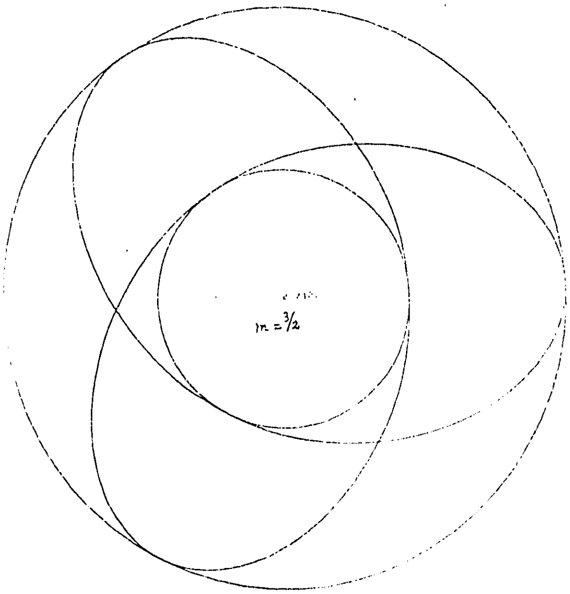
Fuerza: $F=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\;\frac{1}{r^{3/2}}$

Orbita:

$$2u^{3/2}=a^{3/2}\left(1+\cos\frac{3}{2}\Theta\right)+b^{3/2}\left(1-\cos\frac{3}{2}\Theta\right)$$

Angulo apsidal: $\Psi=\frac{2\pi}{3}$

La órbita es cerrada y su período es $T=\frac{4\pi}{3}$



.2.1.2. $m>\frac{3}{2}$

ara $\underline{m=2}$

uerza: $F=Ar$

rbita: $2u^2=a^2(1+\cos 2\Theta)+b^2(1-\cos\Theta)$

Angulo apsida: $\Psi=\frac{\pi}{2}$

Período: $T=\pi$

La ecuación de la órbita

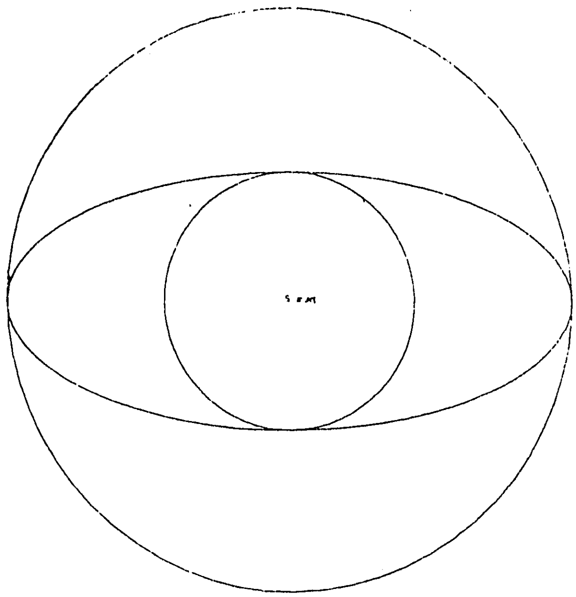
$2u^2=a^2\,(1+\cos\,2\,\Theta)+b^2\,(1-\cos\,2\,\Theta)=2a^2\,\cos^2\Theta+2b^2\,\mathrm{sen}^2\,\Theta$

pasando a coordenadas cartesianas

$\cos\Theta=ux$; $\mathrm{sen}\,\Theta=uy$

$1=a^2x^2+b^2y^2$

Ecuación de una elipse de centro el de fuerzas.



Este movimiento es el armónico elíptico.

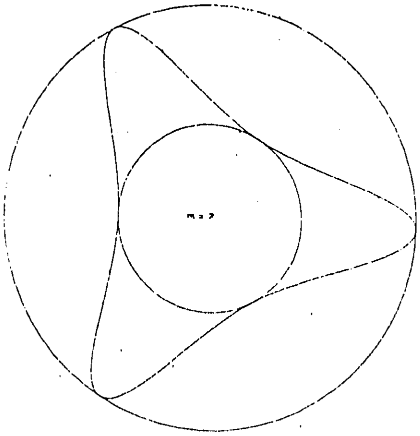
$m=3$

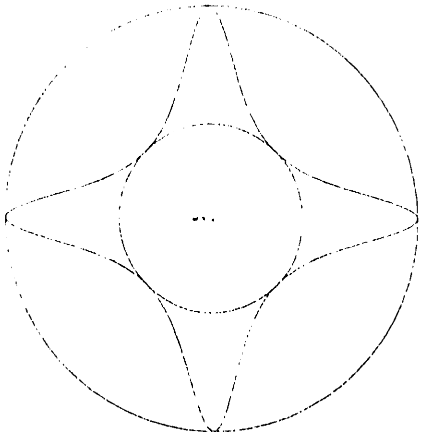
Fuerza: $F=2A\,r^3-B$

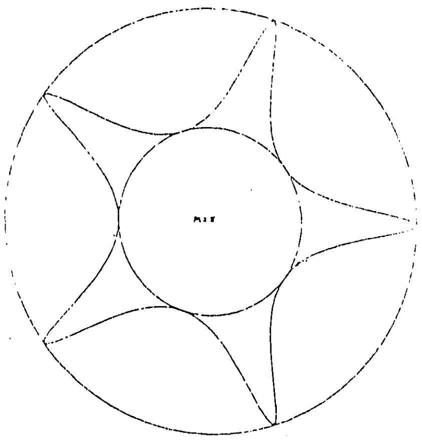
Orbita: $2u^3=a^3\,(1+\cos 3\,\Theta)+b^3\,(1-\cos 3\,\Theta)$

Angulo apsidal $\Psi=\frac{\pi}{3}$

Período $T=\frac{2\pi}{3}$







Como estas órbitas carecen de interés físico nos limitamos a incluir su dibujo para $m=4$ y $m=5$

5.2.1.3. $\quad m < \dfrac{3}{2}$

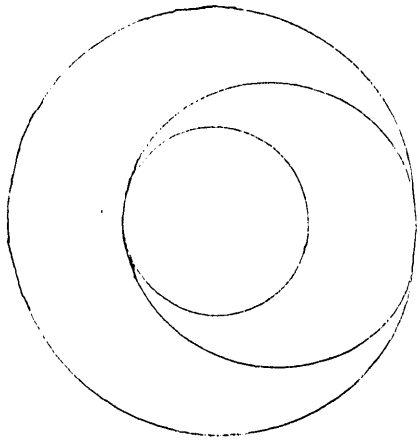
$\underline{m=1}$

Fuerza: $F = B \dfrac{1}{r^2}$ es la ley newtoniana que volvemos a encontrar de nuevo como caso particular de esta familia de curvas periódicas.

Orbita: $2u = a \ (1+\cos \ \Theta) + b \ (1-\cos \ \Theta) = a + b - (b-a) \cos \Theta$ ecuación de una elipse con foco en O.

Angulo apsidal: $\Psi = \pi$

Período: $T = 2\pi$



$\underline{m = \dfrac{5}{4}}$

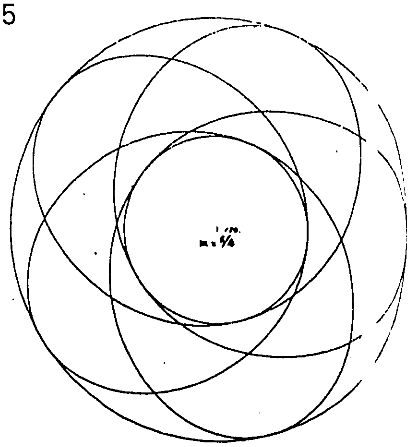
Fuerza: $$F = \frac{A}{4} \frac{1}{r^{1/2}} + \frac{3}{4} B \frac{1}{r^{7/4}}$$

Orbita:

$$2u^{5/4} = a^{5/4} \ (1+\cos \frac{5}{4}\Theta) + b^{5/4} \ (1-\cos \frac{5}{4}\Theta)$$

Angulo apsidal: $\Psi = \dfrac{4\pi}{5}$

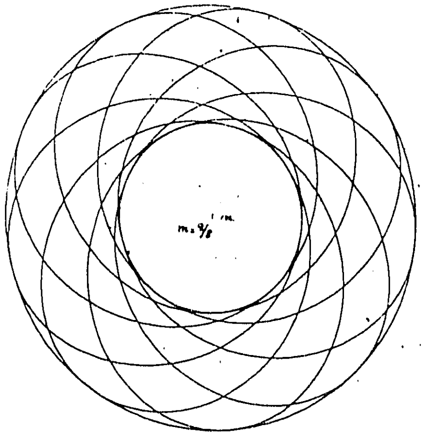
Período: $T = \dfrac{8\pi}{5}$

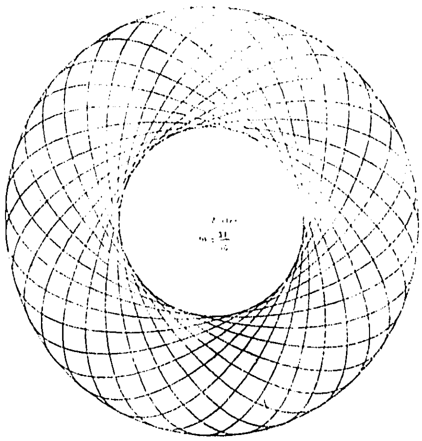


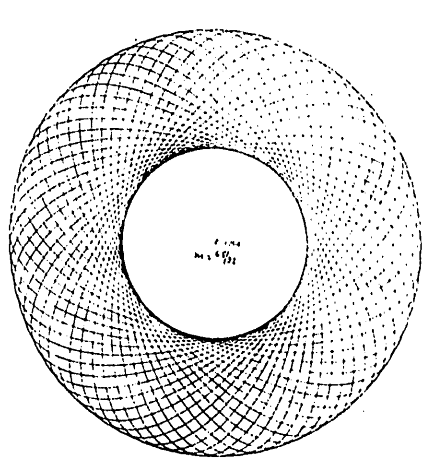
Análogamente pueden obtenerse las características de las órbitas que obedecen al exponente

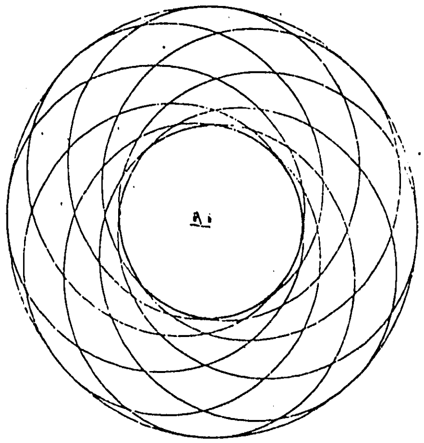
$$m < \frac{3}{2}$$

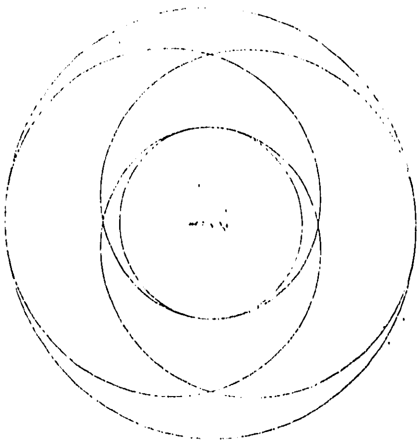
Nos limitamos, como en el caso anterior, a recoger su dibujo para distintos valores de m, escogidos del tipo fraccionario para que la órbita sea cerrada.











5.2.1.4. Conclusión parcial de las órbitas obtenidas de la ecuación diferencial:

$$u'^2 = \frac{(u^m - a^m (b^m - u^m)}{u^{2m-2}}$$

Todas las curvas integrales $u = u\ (\Theta)$ son periódicas. Su ángulo apsidal es $\frac{\pi}{m}$; su período $\frac{2\pi}{m}$. Normalmente se componen de rosetas tangentes a los círculos $u = a$ y $u = b$, excepto en dos casos muy especiales: para $m = 1$ se obtiene el movimiento kepleriano, es decir, una elipse con foco en el centro de la fuerza que sigue la ley de atracción universal descubierta por Newton, y para $m = 2$, que da lugar al movimiento armónico elíptico, con una fuerza proporcional a la distancia.

Fuerza de estos dos casos no hay más órbitas simples cerradas, es decir, en forma de óvalo.

Bastará probar: a) que todas las órbitas rodean al centro de fuerzas; b) que solamente algunas tienen constante el signo de su curvatura.

a) En la ecuación general de estas trayectorias

$$2u^m = \frac{2}{r^m} = a^m(1+\cos m\Theta) + b^m(1-\cos m\Theta)$$

a un valor de Θ corresponde un solo valor de r: toda recta pasando por el centro $O(\Theta=\Theta_1)$ sólo corta a la curva en un punto r_1.

b) Como sabemos $F = -mc^2u^2(u+u'')$.

Y siendo R el radio de curvatura, se demuestra fácilmente que

$$u+u'' = \frac{u^3}{R}\left(\frac{ds}{d\Theta}\right)^3$$

Como $\frac{1}{R}$ y $u+u''$ tienen el mismo signo y contrario al de F, la fuerza estará siempre dirigida hacia la concavidad de la trayectoria. Los puntos de inflexión se deducen de la ecuación $u+u''=o$ y se producirá en aquellos puntos donde la fuerza central se anule.

La fuerza se expresa así en este caso

$$F = B\left(s_m\frac{m-1}{u^{2m-3}} - \frac{m-2}{u^{m-3}}\right) =$$

$$= \frac{B}{u^{m-3}}\left(\frac{s_m}{u^m}(m-1) - m+2\right)$$

(s_m media armónica de a^m y b^m)

Para valores de m $1 \leqslant m \leqslant 2$ la fuerza tiene un signo constante y las curvas correspondientes serán todas cóncavas.

Para $m < 1$ y $m > 2$ la trayectoria presenta necesariamente inflexiones: la trayectoria es alternativamente cóncava y convexa. Los puntos de inflexión se obtienen anulando el valor de la fuerza.

$$r^m = \frac{1}{u^m} = \frac{1}{s_m}\,\frac{m-2}{m-1} = \frac{1}{s_m}\,\frac{2-m}{1-m}$$

$$\left(\frac{2}{s_m} = \frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m}\right)$$

valor que es siempre positivo para $m < 1$ y para $m > 2$.

Por tanto, las únicas órbitas cóncavas se producen para los valores de m comprendidos entre 1 y 2. Para un valor intermedio la trayectoria será múltiple, cerrándose únicamente cuando m sea un número fraccionario.

Solamente para $m=1$ y $m=2$ aparecen las elipses con uno o dos ejes de simetría, respectivamente.

Ya que citamos al principio del establecimiento de la ecuación diferencial su uniformidad o monodromía en el campo complejo podemos comprobar que se cumple esta condición.

En efecto, designando por $z = r\,e^{\Theta i}$ al afijo de un punto de la trayectoria y sustituyendo el valor del módulo.

$$u = \frac{1}{r} = \frac{e^{\Theta i}}{z}$$

$$\frac{2e^{m\Theta i}}{z^m} = (a^m+b^m) - (b^m-a^m)\cos m\Theta;$$

$$z^m = \frac{2e^{m\Theta i}}{a^m+b^m-(b^m-a^m)\cos m\Theta}$$

Como el denominador nunca se anula, por ser esencialmente positivo, y $e^{m\Theta i}$ es una función trascendente entera, z no tiene puntos críticos. Extrayendo la raíz m-sima

$$z = \frac{2^{1/m}e^{\Theta i}e^{\frac{2k\pi}{m}i}}{\sqrt[m]{f(\Theta)}}\;;\qquad f(\Theta) > o$$

Cuando z da una vuelta alrededor del origen, siguiendo un circuito cualquiera, Θ se incrementa en 2π y el valor final de z sólo varía en su módulo adquiriendo siempre el mismo valor independientemente del circuito elegido. Es más, cuando pasa de z_1 a z_2 de varios modos, el valor final z_2 es siempre el mismo, sea cual sea el arco recorrido por el complejo z de z_1 a z_2.

5.2.2. III'.

a) $$A^2u'^2 = \frac{(u^m-a^m)^2(u^m-c^m)(b^m-u^m)}{u^{2m-2}} \qquad c \leqslant u$$

$$A^2u'^2 = \frac{(u^m-a^m)(c^m-u^m)(b^m-u^m)}{u^{2m-2}} \qquad a \leqslant u \leqslant c$$

La primera ecuación diferencial es análoga a la I .1.1. estudiada en el apartado 4.1.

Hacemos el cambio $y = u^m$, tomando como punto d partida $\Theta = O$, $u = c$.

La ecuación se transforma en

$$\frac{A^2}{m^2} y'^2 = (y-a^m)^2 (y-c^m)(b^m-y)$$

Haciendo los cambios oportunos en aquella ecuación, la solución es, con

$$n^2 = \frac{m^2}{4A^2}(c^m-a^m)\, b^m-a^m),$$

$$u^m = c^m + (c^m-a^m)(b^m-c^m)\frac{\operatorname{sen}^2 n\Theta}{b^m-a^m-(b^m-c^m)\operatorname{sen}^2 n\Theta}$$

La solución es periódica con un ángulo apsidal o ángulo de losejes de simetría de $\Psi = \frac{\pi}{2n}$ y un período $T = \frac{\pi}{n}$

Como la fuerza que produce este movimiento es análoga a la apuntada en 4.2., es decir, polinómica, según las potencias de u^m o r^m, puede anularse en algún punto de la trayectoria que describe el móvil inscrita tangencialmente entre los círculos $u = c$ y u b.

Lo mismo cabe decir de la solución de la ec. ación

$$A^2u'^2 = \frac{(u^m-a^m)(c^m-u^m)(b^m-u^m)^2}{u^{2m-2}}$$

qu se desenvuelve del mismo modo entre los cír los $u = a$ y $u = c$.

2.3. Arrancamos ahora de la ecuación VI.

$$A^2u'^2 = (u-a)\, u-c)(u-b)$$

es diada en el apartado 4.1. Cambiando u por u^m, y valores apsidales por a^m, c^m, b^m para simplificar lo álculos $(a^m < c^m < b^m)$

la «ecuación ampliada» es

$$\text{VI')} \quad A^2u'^2 = \frac{(u^m-a^m)(u^m-c^m)(u^m-b^m)}{u^{2m-2}}$$

con el cambio $y = u^m$ se llega por un proceso análogo al indicado allí a una función elíptica en función del seno de la amplitud $(M\,\Theta)$ con el módulo k p el período $\frac{4K}{M}$ siendo ahora

$$k^2 = \frac{c^m-a^m}{b^m-a^m}$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

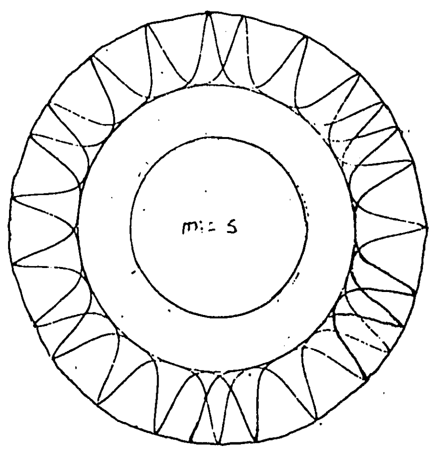
$$M = \frac{(c^m-a^m)\sqrt{b^m-a^m}}{2A}\, m$$

$$u^m = a^m + (c^m-a^m)\operatorname{sn}^2 (M\,\Theta).$$

La trayectoria se desarrolla entre los círculos $u = a$, $u = c$, pues sn o = o y sn K = 1.

El ángulo apsidal es, por consiguiente:

$$\Psi = \frac{K}{M}$$



$\frac{1}{r^m} = a^m + (c^m - a^m)\, sn^2\, 2m\,\Theta$

5.2.4. Partimos de la ecuación VII

$A^2u'^2 = (u-a)(u-c)(u-d)(u-b) \qquad a < c < d < b$

haciendo los cambios similares a los anteriores para llegar a la ecuación ampliada

$$\text{VII}') \qquad A^2u'^2 = \frac{(u^m - a^m)(u^m - c^m)(u^m - d^m)(u^m - b^m)}{u^{2m-2}}$$

Siguiendo un proceso análogo a los anteriores se llega a la función elíptica del tipo

$$u^m = \frac{D_2\, r_2\, \mathrm{sn}\,(m\,B\,\Theta) + D_1}{r_2\, \mathrm{sn}\,(mB\,\Theta) + 1}$$

Siendo: D_1 D_2 los puntos dobles de la involución que tiene por pares conjugados (a^m, b^m) y (c^m, d^m);

$$B^2 = (D_2 - c^m)(D_2 - d^m) \cdot (D_2 - b^m) r^2 / A^2 (D_2 - D_1)^2$$

r_1, r_2 las raíces de la ecuación bicuadrada en que se transforma el segundo miembro de la ecuación VII' por la aplicación de la homografía

$$z = \frac{u^m - D_1}{u^m - D_2}$$

(véase el estudio de VII, ap. 4.1.)

El módulo de la función elíptica es $k = \dfrac{r^2}{r^1}$ $(r_1 > r_2)$ y la integral completa

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

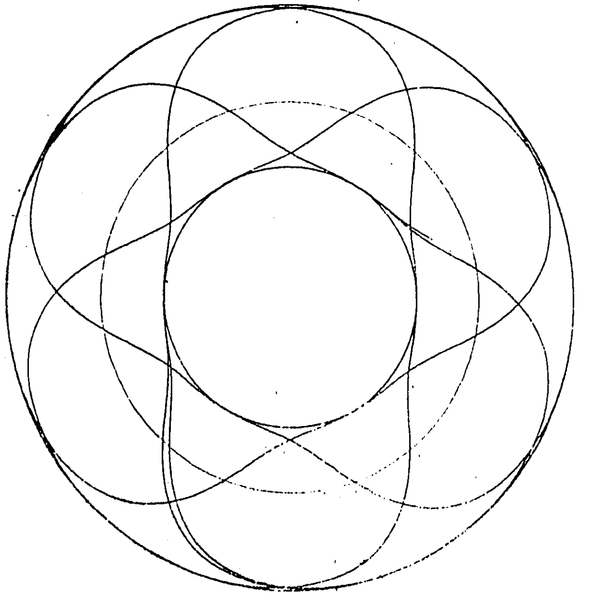
Para $\Theta = o$, $\mathrm{sn}\,(m\,B\,\Theta) = o$, $u^m = D_1$

Para $mB\,\Theta = K$, $\mathrm{sn}\,K = 1$; $u^m = c^m$

Para $mB\,\Theta = 3K$, $\mathrm{sn}\,3K = -1$; $u^m = d^m$

Por tanto, la curva es periódica; se desarrolla entre los círculos $u = c$ y $u = d$, siéndoles tangente con un desfase o ángulo apsidal igual a

$$\frac{3K}{mB} - \frac{K}{mB} = \frac{2K}{mB} \quad \text{igual al semiperíodo.}$$



Como el valor mínimo de K es $\dfrac{\pi}{2}$ (para $k = o$), el período será mayor que $\dfrac{2\,\pi}{m\,B}$

K es un número irracional y también lo es $\dfrac{2}{\pi}$ K. Por tanto, teóricamente nunca pueden darse órbitas cerradas, aunque siempre periódicas, con las funciones elípticas.

Aunque en la práctica nos bastan las aproximaciones. Por ejemplo, para $k = 0{,}98443251$, $K \cong \pi$, y para $k = 0{,}99986569420$, $K \cong \frac{7}{4}\pi$.

6. CONCLUSION GENERAL DEL PRESENTE ESTUDIO

En numerosas obras de Mecánica se alude al tema de la existencia de órbitas finitas producidas por una fuerza central función exclusiva de la distancia.

El estudio parcial más completo que hemos encontrado se debe al brillante matemático francés J. Bertrand, que presentó en 1873 a la Academie des Sciences de París (10) un breve trabajo donde demuestra mediante aproximaciones diferenciales que las únicas órbitas cerradas son las producidas por las leyes

$$F(r) = \frac{A}{r^2} \qquad \text{y} \qquad F(r) = Ar$$

Otros trabajos de similar alcance fueron acometi-

...s por Halphen, Darboux y Koenigs (11), aunque ... sobrepasaron el hallazgo de Bertrand.

Solamente Marion (12) menciona en una nota a ...e de página que «ciertos valores fraccionarios de l... potencia n (en r^n) pueden producir órbitas cerra-d...s».

Cabannes en sus «Problemas de mecánica gene-r...» también se plantea la posibilidad de curvas c...rradas con fuerzas centrales del tipo r^n, pero por la metodología empleada sólo llega a las mismas conclusiones que los autores antes citados (13). Análogo procedimiento y resultados parecidos logra Lamb (14), manejando órbitas casi circulares.

Por esto creemos que debido a la mayor potencia científica que suministran las ecuaciones diferenciales, hemos logrado mostrar tanto la existencia como las condiciones de posibilidad de órbitas centrales finitas periódicas, así como las fuerzas que las producen.

Hemos obtenido los siguientes tipos de soluciones periódicas finitas:

5.2.1.

$$2u^m = \frac{2}{r^m} = a^m(1 + \cos m\Theta) + b^m(1 - \cos m\Theta);$$

curva periódica inscrita entre los círculos $u = a$ y $u = b$. Período $\frac{2\pi}{m}$

5.2.2.

$$u^m = \frac{1}{r^m} =$$

$$= \ldots + (c^m - a^m)(b^m - c^m)\frac{\operatorname{sen}^2 n\Theta}{b^m - a^m - (b^m - c^m)\operatorname{sen}^2 n\Theta}$$

cu...a periódica inscrita tangencialmente entre los cír...los $u = c$ y $u = b$. Período $\frac{\pi}{n}$

$$\ldots = \frac{1}{r^m} =$$

$$= \ldots + (b^m - a^m)(c^m - a^m)\frac{\operatorname{sen}^2 p\Theta}{(b^m - c^m) + (c^m - a^m)\operatorname{sen}^2 p\Theta}$$

cu...a periódica inscrita en la corona $u = a$, $u = c$. Pe...do $\frac{\pi}{p}$

5.2.3.

$$u^m = \frac{1}{r^m} = a^m + (c^m - a^m) \quad \operatorname{sn}^2(M\Theta)$$

curva periódica inscrita en la corona $u = a$, $u = c$. Período $\frac{2K}{M}$

5.2.4.

$$u^m = \frac{1}{r^m} = \frac{D_2 r_2 \operatorname{sn}(m B\Theta) + D_1}{r_2 \operatorname{sn}(m B\Theta) + 1}$$

curva periódica inscrita en la corona $u = c$, $u = d$. Período $\frac{4K}{m B}$

Son cuatro familias de curvas periódicas, normalmente no cerradas, que se desarrollan dentro de una corona circular. En todos ellos u^m está acotado y es siempre positivo, cociente de funciones circulares o elípticas, por lo que u es una función regular y continua.

Son las únicas soluciones que cumplen las condiciones de posibilidad de órbitas finitas y periódicas de una partícula sometida a una fuerza central dependiente de la distancia que mantenga una relación algebraica con la velocidad, es decir, cuyo movimiento venga determinado por una ecuación diferencial algébrica en u y u'.

Y de todas ellas las únicas órbitas simples cerradas (elípticas) son las que responden a las fuerzas atractivas

$$F = \frac{k}{u} = kr \qquad \text{y} \qquad F = ku^2 = \frac{k}{r^2}$$

REFERENCIAS

(1) ARNOLD, V.: *Equations differentielles ordinaires.* Moscou. Mir, 1974. Cap. II, # 10. ELSGOLTZ, L.: *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.* Moscou. Mir, 1977, pág. 174. LEVI CIVITA, T.; AMALDI, U.: *Lezioni di Meccanica razionale.* Bologna. Zanichelli, 1974. Vol. II. Parte Prima. Cap. I, # 6 y pág. 98 ss. SYNGE y GRIFFITH: *Principios de Mecánica.* Madrid. Ed. del Castillo, 1965. Cap. 13.

(2) GOURSAT, E.: *Cours d'Analyse Mathématique.* Paris. Gauthier Villars, 1943. Tome II, pág. 560.

(3) Ibídem.

(4) GOURSAT, E.: *Ob. cit.* Tomo II, págs. 222, 230, 560 n.

(5) Obra citada. Tomo II, pág. 557.

(6) REY PASTOR, J.: *Teoría de funciones.* Madrid, 1947, pág. 455.

(7) Ibídem.

(8) JAHNKE, E., y EMDE, F.: *Tables of functions.* New York. Dover 1945, pág. 73.

(9) GOURSAT, E.: *Cours d'Analyse Mathematique.* París. Gauthier Villars, 1943. Tome I, pág. 259. PUIG ADAM, P.: *Cálculo integral.* Madrid, 1979, pág. 66 ss.

(10) Comptes Rendus des séances de l'Academie de Sciences, 2.° Sem. Tomo 77, núm. 16, págs. 849-853.

(11) APPELL, P.: *Traité de Mecanique Rationelle.* Paris. Gauthier Villars, 1941. Tomo I, págs. 426, 427. LEVI CIVITA, T., y AMALDI, U.: *Lezioni di Meccanica Razionale.* Bologna. Zanichelli, 1974. Vol. II. Parte prima, pág. 256.

(12) MARION, J.P.: *Classical Dynamics of particles and systems.* London. Academic Press, 1965, págs. 275 n.

(13) CABANNES, H.: *Problemas de Mecánica General.* Barcelona. Montaner y Simon, 1969, pág. 151.

(14) LAMB, H.: *Dynamics.* Cambridge University Press, 1920, pág. 259.