

Un modelo bidimensional para el estudio de contaminantes de tipo regional en acuíferos (*)

Por JOSE FERRER POLO

Dr. Ingeniero de Caminos

FRANCISCO RAMOS RAMIS

Dr. Ingeniero de Caminos

Universidad Politécnica de Valencia

Se expone inicialmente la ecuación que representa, con toda generalidad, el movimiento de un contaminante disuelto en un acuífero, realizando una breve revisión de los distintos métodos utilizados hasta la fecha, indicando ventajas, inconvenientes y campos de aplicación.

A partir de la revisión anterior se expone un planteamiento simplificado para abordar, con mayor eficiencia de cálculo, un tipo concreto de contaminación de acuíferos, aquella que tiene carácter regional, que es tanto como decir, asociada a la agricultura. Se efectúa la discretización, utilizando el método de las diferencias finitas, de la ecuación diferencial, demostrando la convergencia incondicional de la aproximación numérica a la analítica, se recomienda un método para la resolución del sistema de ecuaciones resultante indicando sus ventajas. Por último se comparan las soluciones dadas por el modelo con las analíticas para cuatro casos de solución conocida con las características de contaminación regional.

1. LA ECUACION DEL TRANSPORTE DE MASA EN ACUIFEROS

La ecuación diferencial que describe, bidimensionalmente, el transporte y la dispersión de una especie química no reactiva en un acuífero homogéneo e isótropo es la siguiente (Redell y Sunada, 1970; Bear, 1972; Bredehoft y Pinder, 1973; Konikow y Grove, 1977).

$$\frac{\partial (Cb)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} (b D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (b C V_i) - C'W$$

donde:

- C es la concentración de la especie química disuelta.
- D_{ij} es una de las componentes del tensor de dispersión hidrodinámica
- b es el espesor saturado del acuífero
- C' es la concentración de la especie química en una fuente o sumidero
- W es el caudal de agua en la fuente o sumidero
- x_i es una coordenada cartesiana
- V es la velocidad real del agua en la dirección de x_i

El primer miembro de la variación total de masa por unidad de superficie en todo el espesor del acuífero. El primer término del segundo miembro corresponde a la variación debida a la dispersión hidrodinámica, despreciando la difusión molecular (Bear, 1972). El segundo término, corresponde a la variación debida al transporte por convección. El tercer término corresponde a las posibles fuentes o sumideros.

La aplicación de la ecuación (1) a casos reales se enfrenta con dos problemas básicos:

- No existe en general solución conocida de (1)
- El acuífero no es homogéneo e isótropo.

Por ambas razones conjuntamente se recurre a la obtención de soluciones numéricas aproximadas recurriendo a los dos métodos clásicos para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, las diferencias finitas y los elementos finitos.

La aplicación directa del método de las diferencias finitas sobre la ecuación (1) provoca, en el término de transporte convectivo, una dispersión numérica que puede ser del orden de magnitud e incluso mayor que la variación debida al término de dispersión, lo cual ha provocado el desarrollo, dentro del método de las diferencias finitas, del denominado método de las características (Gardner, Peaceman y Pozzi 1964; Pinder y Cooper, 1970; Redell y Sumada, 1970; Bredehoft y Pinder, 1973; Konikow y Bredehoft, 1978), mediante el cual se suprime la dispersión numérica citada, siendo pre-

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de agosto de 1982.

ciso imponer ciertas restricciones a la discretización espacial y temporal.

La resolución de la ecuación (1) por el método de los elementos finitos puede abordarse bien mediante el método variacional (Guymon, 1970; Smith y col. 1973) o mediante el método de Galerkin (Ariz y col. 1968; Price y col. 1968; Bruch y Zyvoloski, 1973; Gray y Pinder, 1974), obteniéndose grados de ajuste similares de la solución numérica respecto a la analítica en ambos casos (Smith y col., 1973). En el caso de que la convección predomine fuertemente sobre la dispersión, aparece una dispersión numérica que reduce la calidad de la solución (Pinder, 1973), obteniéndose, por contra, mejores resultados que en el caso de las diferencias finitas, cuando en el movimiento del contaminante tiene gran influencia la dispersión, como es el caso de una fuente puntual de contaminación (Price y col., 1968).

Como criterio válido, en general, puede indicarse la conveniencia de utilizar el método de los elementos finitos cuando se pretenda estudiar el avance de un frente de contaminación desde una fuente puntual, dado que por ser muy importantes los gradientes de concentración suele ser muy importante la dispersión, por contra cuando la situación no sea de este tipo sino que la contaminación provenga de un conjunto de focos puntuales o superficiales es conveniente la utilización del método de las características.

En cuanto a las necesidades de programación y de ordenador, son similares para el método de las características y el de los elementos finitos.

2. LOS CONTAMINANTES DE TIPO REGIONAL: SU MOVIMIENTO EN EL ACUIFERO

Se denominan contaminantes de tipo regional a aquéllos cuya entrada en el acuífero se realiza por toda la superficie y en forma aproximadamente uniforme. Los contaminantes reales que se adoptan a esta definición, son, en general, todos los asociados a la agricultura de regadío, pues es el riego el medio que este tipo de contaminantes, abonos, aguas residuales, etc. tienen para alcanzar el acuífero.

El movimiento de este tipo de contaminantes en el acuífero viene caracterizado por dos efectos, la ausencia de un frente de contaminación propiamente dicho y por consiguiente gradientes de concentración muy pequeños. De acuerdo con esto

puede suponerse que al no efectuarse el movimiento de contaminantes en forma de frente la dispersión numérica producida en el transporte por convección, si se utiliza exclusivamente el método de las diferencias finitas, será pequeña y que además, la variación de concentración, debida a la dispersión hidrodinámica también lo será, por lo que se propone utilizar como ecuación representativa del movimiento del contaminante, en este caso, la siguiente:

$$\frac{\partial (bC)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} (bC V_i) - C' W \quad (2)$$

que no es más que la (1) suprimiendo el término debido a la dispersión. En los apartados siguientes se procede a la discretización de la misma, para su resolución por el método de las diferencias finitas, se demuestra la convergencia del esquema numérico propuesto, y se compara la solución numérica en cuatro casos de solución analítica conocida para comprobar que la dispersión numérica es pequeña y que, por tanto, las simplificaciones propuestas son válidas.

La utilización de la ecuación (2), resuelta por el método de las diferencias finitas supone, desde el punto de vista de trabajo de programación y capacidad y tiempo de ordenador, una mejora muy importante que permite, en el caso de no disponer de grandes ordenadores, abordar estos problemas.

3. DISCRETIZACION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

Este problema ya fue abordado para el caso del ión nitrato (Ramos Y Ferrer, 1979) y, en general, para acuíferos libres (Ferrer, 1980), en este trabajo se generaliza para el caso de acuíferos semiconfinados, puesto que en este caso es posible el paso del contaminante a través del acuitardo.

La obtención de la ecuación discretizada se efectúa a partir de razonamientos físicos. Se efectúa un balance de masa en cada una de las celdas i, j (Fig. 1) en las que se divide la zona de estudio, conociendo, por medio de un modelo de flujo con la misma discretización espacial y temporal, los volúmenes de agua que entran o salen subterráneamente de la celda i, j , los cuales multiplicados por su concentración en el contaminante que se estudia permiten obtener la masa de contaminante que entra o sale subterráneamente, siendo la masa que entra, a través del riego, o sale

UN MODELO BIDIMENSIONAL PARA EL ESTUDIO DE CONTAMINANTES

por medio de bombeos, valores conocidos en función de las dotaciones de riegos y la explotación del acuífero. Lo anterior se puede expresar en la forma

$$\frac{dM(i,j)}{dt} = \frac{dM_s(i,j)}{dt} + \frac{dM_t(i,j)}{dt} \quad (3)$$

donde:

- $M(i,j)$ es la masa total en la celda i,j
- $M_s(i,j)$ es la masa que entra o sale subterráneamente en la celda i,j
- $M_t(i,j)$ es la masa que entra o sale a través del terreno en la celda i,j

El primer miembro puede sustituirse por:

$$\frac{dM(i,j)}{dt} = \frac{d(V(i,j)C(i,j))}{dt} = \frac{dV(i,j)}{dt} C(i,j) +$$

$$+ V(i,j) \frac{dC(i,j)}{dt} = S(i,j) \frac{dh(i,j)}{dt} C(i,j) +$$

$$+ V(i,j) \frac{dC(i,j)}{dt} \quad (4)$$

donde:

- $V(i,j)$ es el volumen de agua almacenado en la celda i,j
- $S(i,j)$ es el coeficiente de almacenamiento de la celda i,j por el área $\Delta x \Delta y$, de la misma
- $h(i,j)$ es el nivel piezométrico en la celda i,j

En la expresión (4) las derivadas pueden aproximarse por un esquema de diferencia hacia atrás, como si se representan los valores de h y C en t_1 por h_1 y C_1 , se tiene:

$$\frac{\Delta M(i,j)}{\Delta t} = S(i,j) \frac{h(i,j) - h_1(i,j)}{\Delta t} C(i,j) + V(i,j) \frac{C(i,j) - C_1(i,j)}{\Delta t} \quad (5)$$

El primer término del segundo miembro, consta de cuatro sumandos correspondientes cada uno de los intercambios de la celda i,j con los cuatro adyacentes, así para las celdas i,j e $i-1,j$ de la figura 1 se tiene que el caudal que entra o sale de la celda i,j

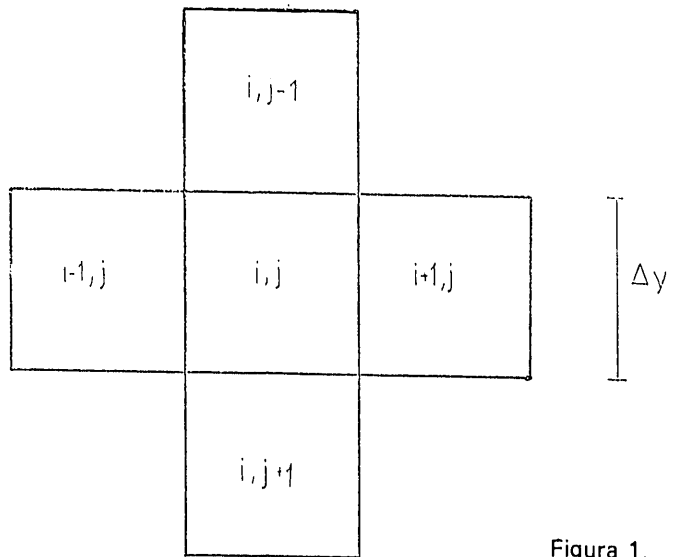


Figura 1.

aplicando la ley de Darcy, viene dado por:

$$q_{fa}(i,j) = T_f(i-1,j) \frac{\Delta y}{\Delta x} [h(i-1,j) - h(i,j)] \quad (16)$$

donde:

$T_f(i-1,j)$ es la transmisividad en el lado común a las celdas $i-1,j$ e i,j

este caudal de agua está asociado al transporte de la especie química que se estudia, obteniéndose el caudal de masa multiplicando $q_{fa}(i,j)$ por $C(i,j)$ si se produce paso de agua a la celda $i-1,j$ o por $C(i-1,j)$ si se produce paso de agua a la celda i,j .

Para tener en cuenta ambas posibilidades, se adopta como expresión de la entrada o salida de masa por unidad de tiempo de la celda i,j debida a su conexión con la $i-1,j$ la siguiente:

$$(\delta f_a(i,j) C(i-1,j) - (1 - \delta f_a(i,j)) q_{fa}(i,j)) \quad (7)$$

donde:

$$\delta f_a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } h(i-1,j) > h(i,j) \\ 0 & \text{si } h(i-1,j) \leq h(i,j) \end{cases}$$

Procediendo análogamente con las otras tres celdas adyacentes a la i,j , se obtiene como expresión de la variación de masa por unidad de tiempo en la celda i,j , debido a las entradas y salidas subterráneas la siguiente:

$$\frac{\Delta M_s(i,j)}{\Delta t} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\delta f_a(i,j) C(i-1,j) + (1 - \delta f_a(i,j) C(i,j)) qf_a(i,j) + \text{salidas subterráneas se puede expresar como} \\
 &+ (\delta f_p(i,j) C(i+1,j) + (1 - \delta f_p(i,j) C(i,j)) qf_p(i,j) + \frac{\Delta M_t(i,j)}{\Delta t} = -Q(i,j) C(i,j) + \frac{Q_m(i,j)}{\Delta t} \quad (11) \\
 &+ (\delta c_a(i,j) C(i,j-1) + (1 - \delta c_a(i,j) C(i,j)) qc_a(i,j) + \\
 &+ (\delta c_p(i,j) C(i,j+1) + (1 - \delta c_p(i,j) C(i,j)) qc_p(i,j) + \quad (8)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 qf_p(i,j) &= T_f(i,j) (h(i+1,j) - h(i,j)) \Delta y / \Delta x \\
 qc_a(i,j) &= T_c(i,j-1) (h(i,j-1) - h(i,j)) \Delta x / \Delta y \\
 qc_p(i,j) &= T_c(i,j+1) (h(i,j+1) - h(i,j)) \Delta x / \Delta y
 \end{aligned}$$

siendo:

$T_f(i,j)$ la transmisividad entre las celdas i,j e $i+1,j$
 $T_c(i,j-1)$ la transmisividad entre las celdas $i,j-1$ e i,j
 $T_c(i,j)$ la transmisividad entre las celdas i,j e $i,j+1$

y definiéndose:

$$\begin{aligned}
 \delta f_p(i,j) &= \begin{cases} 1 & \text{si } h(i+1,j) > h(i,j) \\ 0 & \text{si } h(i+1,j) \leq h(i,j) \end{cases} \\
 \delta c_a(i,j) &= \begin{cases} 1 & \text{si } h(i,j-1) > h(i,j) \\ 0 & \text{si } h(i,j-1) \leq h(i,j) \end{cases} \\
 \delta c_p(i,j) &= \begin{cases} 1 & \text{si } h(i,j+1) > h(i,j) \\ 0 & \text{si } h(i,j+1) \leq h(i,j) \end{cases}
 \end{aligned}$$

La expresión (8) corresponde exclusivamente al transporte por convección, que es el único que aparece en la ecuación (2).

En el segundo término del segundo miembro se deben distinguir las salidas y las entradas a través de la superficie del terreno.

Las salidas se deben exclusivamente a los bombeos y su expresión por unidad de tiempo será:

$$-Q(i,j) C(i,j) \quad (9)$$

Las entradas se producirán a través del riego y para la celda i,j se pueden expresar, por unidad de tiempo, como:

$$Q_m(i,j) / \Delta t \quad (10)$$

siendo $Q_m(i,j)$ la cantidad total de masa que alcance el acuífero en la celda i,j , durante el intervalo de tiempo Δt .

Por tanto la variación de masa por unidad de tiempo, en la celda i,j , debida a las entradas y

Igualando (4) a la suma de (8) y (11) y agrupando los términos que corresponden a una misma concentración, se obtiene como expresión de la ecuación (2) discretizada para la celda i,j la siguiente

$$\begin{aligned}
 & - \delta f_a(i,j) qf_a(i,j) \frac{\Delta t}{V(i,j)} C(i-1,j) - \\
 & - \delta c_a(i,j) qc_a(i,j) \frac{\Delta t}{V(i,j)} C(i,j-1) - \\
 & (-S(i,j) \frac{h(i,j)-h_1(i,j)}{\Delta t} - \frac{V(i,j)}{\Delta t} + (1 - \delta f_a(i,j) qf_a \\
 & + (1 - \delta f_p(i,j)) qf_p(i,j) + (1 - \delta c_a(i,j)) qc_a(i,j) + \\
 & + (1 - \delta c_p(i,j)) qc_p(i,j) - Q(i,j)) \frac{\Delta t}{V(i,j)} C(i,j) - \\
 & - \delta c_p(i,j) qc_p \frac{\Delta t}{V(i,j)} C(i,j+1) - \\
 & - \delta c_a(i,j) qc_a(i,j) \frac{\Delta t}{V(i,j)} C(i+1,j) = \\
 & = C_1(i,j) + \frac{Q_m(i,j)}{V(i,j)} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Al plantear la ecuación (12) para todas las celdas en los que se ha discretizado el acuífero, se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma:

$$(A) \{C\} = \{C_1\} + \{\Delta C_1\} = \{C F_1\} \quad (13)$$

El vector $\{C F_1\}$ agrupa las concentraciones al final del intervalo de tiempo anterior y la variación de concentraciones que se producirá debido a la entrada de masa a través de la superficie del terreno. La matriz A incluye los cambios de concentración que se producirán debido al movimiento del agua en el acuífero, obteniéndose todos los elementos de la matriz a partir de los valores suministrados por el modelo de flujo asociado. Por tanto, el problema queda resuelto sin más que hallar la matriz inversa de A de forma que:

$$\{C\} = (A^{-1}) \{C F_1\} \quad (14)$$

4 CONVERGENCIA DEL ESQUEMA NUMERICO PROPUESTO

La aplicación sucesiva de la expresión (14) permite obtener una aproximación numérica de la ecuación (2), siendo preciso demostrar que dicha aproximación converge hacia la solución analítica, es decir que es posible aproximarse a dicha solución tanto como se quiera sin más que disminuir el tamaño de los intervalos de espacio y tiempo.

Las condiciones necesarias y suficientes de convergencia de una aproximación numérica son, (Isacson y Bishop, 1966), los siguientes:

a) Las derivadas se han aproximado directamente sobre la función, es decir se ha utilizado un esquema de diferencia hacia delante, diferencia hacia atrás o diferencia central.

b) El radio espectral de la matriz A^{-1} de (14) es estrictamente menor que 1, es decir el máximo módulo de los autovalores, es menor que 1.

La condición a) se cumple por la forma en que se han aproximado las derivadas en el apartado 3.

La demostración de b) se efectuará mediante la equivalente de que el módulo mínimo de los autovalores de la matriz A de (13) sea mayor que 1, ya que al ser las matrices inversas sus autovalores también lo son. Para la demostración se utiliza el teorema de Gerschgorin (Durand, 1972), el cual enuncia que los autovalores de una matriz A se encuentran situados, en el plano complejo, en el interior del recinto obtenido por la unión de los círculos de centro, para cada fila l , $A(l, l)$ y de radio para la citada fila, el siguiente:

$$R_l = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^n |A(l, m)| \quad (15)$$

Supuesto que la fila 1 corresponde a la celda i, j la expresión (15) se obtendrá por suma de los coeficientes de (12) no asociados a $C(i, j)$, es decir:

$$R = \frac{\Delta t}{V(i, j)} (\delta f_a(i, j) q f_a(i, j) + f_p(i, j) q f_p(i, j) + c_a(i, j) q c_a(i, j) + \delta c_p(i, j) q c_p(i, j)) = \frac{E_s(i, j)}{V(i, j)} \quad (16)$$

donde $E_s(i, j)$ es la suma de todas las entradas subterráneas de agua a la celda i, j durante el intervalo de tiempo Δt .

centro del círculo correspondiente a la celda i, j

es el término de (12) asociada a $C(i, j)$, el cual puede escribirse como:

$$1 + S(i, j) \frac{h(i, j) + h_1(i, j)}{V(i, j)} + \frac{S_s(i, j)}{V(i, j)} + \frac{Q(i, j) \cdot \Delta t}{V(i, j)} \quad (17)$$

donde $S_s(i, j)$ es la suma de todas las salidas subterráneas de agua de la celda i, j durante el intervalo de tiempo Δt , las cuales pueden también escribirse, a partir de la discretización de la ecuación del flujo de agua subterránea utilizando un esquema de diferencia hacia atrás (Prickett y Lonquist, 1971) como:

$$S_s(i, j) = E_s(i, j) + I(i, j) - Q(i, j) \Delta t - S(i, j) (h(i, j) - h_1(i, j)) \quad (18)$$

donde $I(i, j)$ es el volumen de agua que alcanza el acuífero, en la celda i, j , procedente de la superficie del terreno en el intervalo de tiempo Δt . Sustituyendo (18) en (17) se obtiene

$$1 + \frac{E_s(i, j) + I(i, j)}{V(i, j)} \quad (19)$$

Por tanto, y para el autovalor L de menor valor absoluto de la matriz A se cumplirá que para al menos una de las n ecuaciones del sistema (13)

$$1 + \frac{I(i, j)}{V(i, j)} < |L| < 1 + 2 \frac{E_s(i, j)}{V(i, j)} + \frac{I(i, j)}{V(i, j)} \quad (20)$$

De la expresión (20) puede deducirse que solo dejaría de cumplirse la condición b) en el caso en que se anularan simultáneamente las entradas subterráneas, celda fuente, y la infiltración a través de la superficie del terreno, condiciones que son prácticamente incompatibles, debiendo considerarse además que en el tipo de acuíferos reales a los que se aplica la infiltración no debe ser nula en casi ningún caso. En cualquier caso debe indicarse que siempre $|L| \geq 1$ lo cual supone que los errores numéricos de cada intervalo de tiempo no son aumentados sino, en el peor de los casos sumados, bastando que en la mayor parte de los intervalos de tiempo se cumpla que $|L| > 1$ para tener asegurada la convergencia de la aproximación numérica propuesta.

5. METODO DE RESOLUCION PROPUESTO

En general, la resolución de un sistema de ecuaciones lineales como es el (13) es resuelto más eficientemente por métodos iterativos, tanto desde el punto de vista de capacidad como de velocidad, siempre que pueda asegurarse que las características del sistema admite este tipo de resolución. Este es el caso del sistema (13), puesto que cumplen una condición suficiente para ello, como es (Isacson y Bishop, 1960) la siguiente:

$$\max_{\substack{m=1 \\ 1 \neq m}}^n \left| \frac{A(1,m)}{A(1,1)} \right| < 1 \quad (21)$$

en el caso que se estudia y de acuerdo con (16) y (19) la expresión (21) puede escribirse como:

$$\max_{i,j} \frac{\frac{E_s(i,j)}{V(i,j)}}{1 + \frac{E_s(i,j) + I(i,j)}{V(i,j)}} < 1 \quad (22)$$

expresión que es evidentemente cierta. Por tanto se recomienda la resolución mediante métodos iterativos.

Dado que la matriz A es pentadiagonal el sistema iterativo más eficiente es en este caso, el IADI modificado, cuyo desarrollo no se efectúa aquí. Puede consultarse el Boletín n.º 41 del S.G.O.P., donde aparece dicho sistema aplicado a la resolución de la ecuación del flujo en un acuífero, basta cambiar h(i,j) por C(i,j) y considerar los coeficientes de la matriz A para abordar el problema sin mayor dificultad.

Se ha comprobado que el método propuesto es de una gran eficiencia, pues tanto en la fase de comparación con soluciones analíticas, apartado 6, como en la aplicación a un caso real, ha bastado una sola iteración para obtener la solución con aproximación de 5 cifras significativas, lo cual es más que suficiente para los fines usuales en este tipo de modelos.

6. COMPARACION ENTRE SOLUCIONES NUMERICAS Y ANALITICAS

Como comprobación final de todo lo dicho en los apartados anteriores se comparan las soluciones numéricas en cuatro casos, representando los valores numéricos obtenidos para distintos espacia-

dos de malla y distintos valores del intervalo de tiempo.

Los casos estudiados se corresponden con los esquemas siguientes:

a) Acuífero circular, con pozo central de recarga y borde de nivel constante, flujo estacionario.

a.1) Acuífero semiconfinado (fig. 2 y 3)

a.2) Acuífero libre (fig. 4 y 5)

b) Acuífero rectangular con dos bordes opuestos impermeables y niveles constantes en los otros dos, flujo estacionario.

b.1) Acuífero semiconfinado (fig. 6 y 7)

b.2) Acuífero libre (fig. 8 y 9)

En todos los casos se impone una entrada constante de masa a través de la superficie de

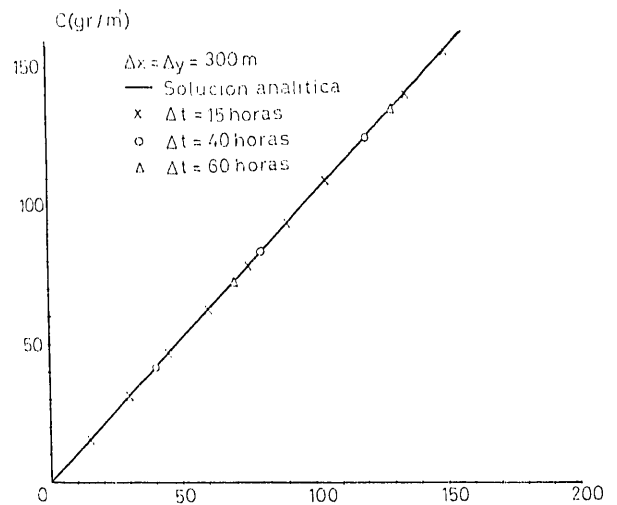


Fig 2 Acuífero circular semiconfinado

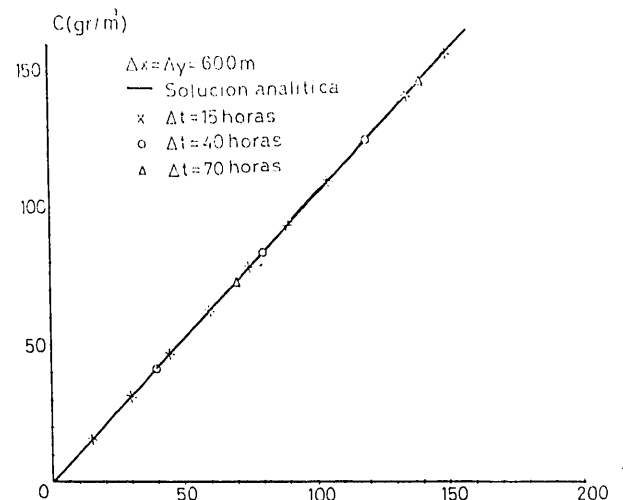


Fig 3 Acuífero circular semiconfinado

UN MODELO BIDIMENSIONAL PARA EL ESTUDIO DE CONTAMINANTES

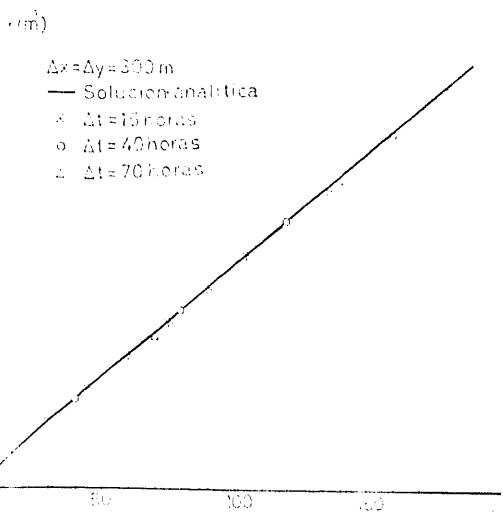


Fig 4 Acuífero circular no confinado

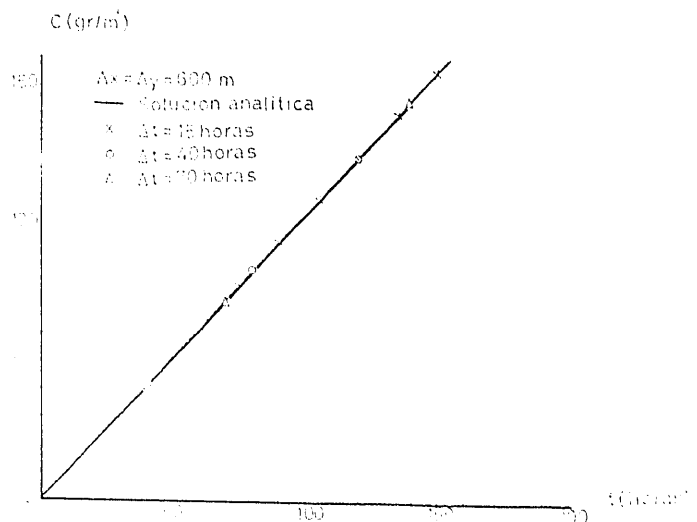


Fig 7 Acuífero rectangular semiconfinado

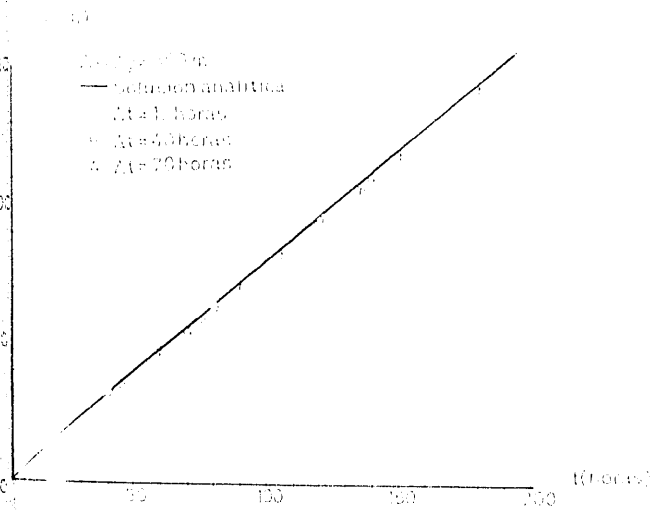


Fig 5 Acuífero circular no confinado

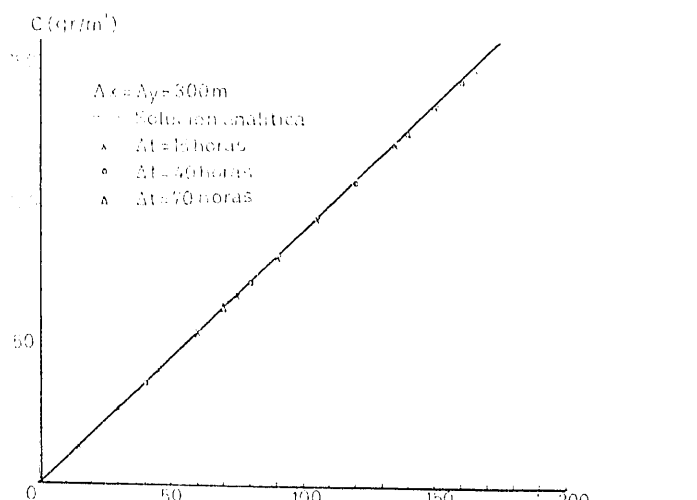


Fig 8 Acuífero rectangular confinado

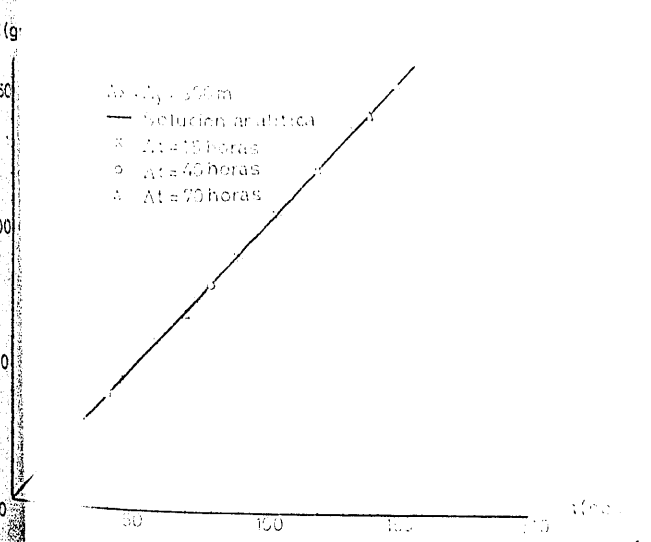


Fig 6 Acuífero rectangular semiconfinado

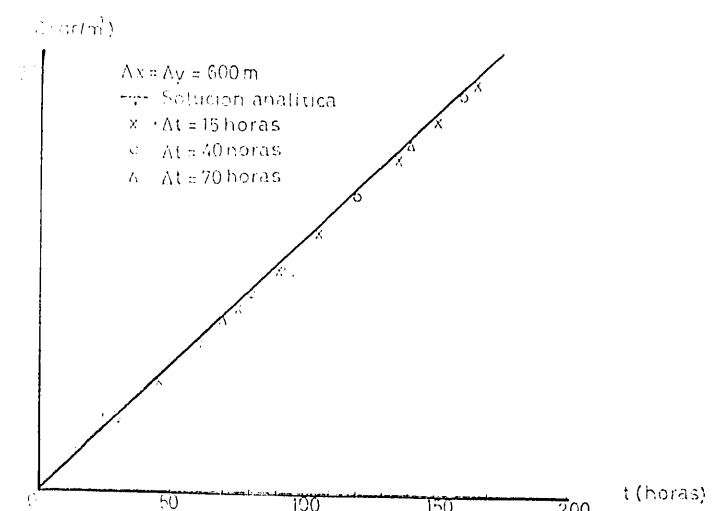


Fig 9 Acuífero rectangular no confinado

terreno, M , cuyo valor es de $4,1667 \text{ gr/m}^2/\text{hora}$ en los acuíferos libres y $3.125 \text{ gr/m}^2/\text{hora}$ en los acuíferos confinados. La porosidad, es, en ambos casos a) y b), de 0.1 y la permeabilidad de 100 m/día .

El error máximo admitido por celda es de 0.1 gr/m^3

En los casos a.1) y b.1) el espesor del acuífero es de 30 m.

El caudal recargado en el caso a) es de $1 \text{ m}^3/\text{seg.}$ y el nivel constante, situado a 5.000 m. del pozo central de recarga es de 50 m.

Los niveles constantes en los casos b) son de 50 y 30.

Los puntos de observación están situados a 3.000 m. del pozo de recarga, casos a), y 3.000 m. del borde de nivel superior, casos b).

La observación de las figuras 2 a 9, pone de manifiesto la concordancia entre las soluciones analítica y numérica en todos los casos. En los casos a.2) y b.2) aparece una pequeña dispersión numérica, que se ve afectada por la variación de la amplitud del intervalo de tiempo. La amplitud del espaciado de malla se influye significativamente sobre la dispersión numérica, que se reduce al disminuir aquel, aunque la citada dispersión se mantiene pequeña en valor relativo para valores del espaciado de malla lo suficientemente grandes como para hacer aplicable el modelo propuesto.

7. CONCLUSIONES

El esquema numérico propuesto es incondicionalmente convergente a la solución analítica de la ecuación que aproxima, independientemente de la discretización espacial y temporal utilizada.

La dispersión numérica en los casos de contaminación de tipo regional, es pequeña para los espaciados de malla usuales en los modelos en diferencias finitas.

La utilización del modelo propuesto, en los casos indicados supone, respecto a los métodos usuales, un aumento muy importante de la eficiencia del cálculo, disminuyendo la capacidad de ordenador precisa y aumentando la velocidad de cálculo.

REFERENCIAS

- ARIZ, K.; P.H. HOLST y P.S. KANRA, "Natural convection in porous media", Petroleum Soc. of C.I.M. 1963.
- BEAR, J., "Dinamics of fluids in porous media", Elsevier, New York, 1972.
- BREDEHOEFT, J.D. y G. F. PINDER, "Mass transport in flowing groundwater", Water Resources Research, 1973.
- BRUCH, J.C. y G. ZYVOLOSKI, "A finite element weighted residual solution to one-dimensional field problems". Int. J. Numerical Methods in Eng. 1973.
- DURAND, E., "Solutions numeriques des équations algébriques", Masson & Cie., 1972.
- FERRER, J. "Un modelo para el estudio de contaminantes de tipo regional en acuíferos libres". Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, 1980.
- GARDER, A. O., B.W. PEACEMAN y A.L. POZZI, "Numerical calculation of multidimensional miscible displacement by the method of characteristics". Society of Petroleum Engineers Journal, 1964.
- GRAY, W.G. y G.F. PINDER, "Galerkin approximation of the time derivative in the finite element analysis of groundwater flow", Water Resources Research, 1976.
- GUYMON, G.L., "A finite element solution of the one-dimensional-diffusion-convection equations", Water Resources Research, 1970.
- ISACSON, E. y H. BISHOP, "Analysis of numerical methods", John Wiley and Sons, 1966.
- KONIKOW, L.F. y J.D. BREDEHOEFT, "Modeling flow and chemical quality changes in an irrigated stream-aquifer system", Water Resources Research, 1974.
- KONIKOW, L.F. y D.B. GROVE, "Derivation of equations describing solute transport in ground-water", U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations, 1977.
- KONIKOW, L.F. y J.D. BREDEHOEFT, "Computer model of two dimensional solute transport and dispersion in ground water", U.S. Geological Survey Water Resources Investigation, 1978.
- PINDER, G.F. y H.H. COOPER, "A numerical Technique for calculating the transient position of the saltwater front", Water Resources Research, 1970.
- PINDER, G.F., "A Galerkin finite element simulation of groundwater contamination on Lony Island, New York", Water Resources Research, 1973.
- PRICE, H.S., T.C., CAVENDISH y R.S. VARGA, "Numeric methods of higher order accuracy for diffusion-convection equations", Society of Petroleum Engineers Journal, 1968.
- RAMOS, F.J., J. FERRER y A. SAHUQUILLO, "Una aproximación en diferencias finitas para el estudio de la contaminación por nitratos de acuíferos no confinados", II Simposio Nacional de Hidrogeología, Pamplona, 1979.
- REDELL, D. L. y D.K. SUNADA, "Numerical simulation of dispersion in groundwater Aquifers". Hydrology Paper, n.º 41, Colorado State. University, Fort Collins 1971.
- S.G.O.P., "Métodos de ordenador para evaluación de recursos hidráulicos subterráneos", Boletín n.º 41, 1976.
- SMITH, J.M., R.V. FARRADAY y B.A. O'CONNOR, "Ritz and Galerkin finite elements for diffusion-convection equations", Society of Petroleum Engineers Journal, 1973.