REVISTA DE OBRAS PUBLICAS, julio 1982. Págs. 449 a 457

Una aplicación elemental del teorema del punto fijo a la resolución de la ecuación de tercer grado (*)

Por JOSE LUIS ROMERO MARTIN
Ing. de Caminos, Canales y Puertos

Se presenta un método numérico para la resolución de la ecuación de tercer grado de sencilla utilización con calculadora de bolsillo, y asimismo fácilmente programable. El método no emplea la derivada (método de Newton), ni tampoco emplea las cuerdas (régula falsi), sino que maneja las sucesivas aplicaciones de una función contractiva a un valor inicial arbitrario perteneciente a un determinado intervalo.

INTRODUCCION

Abordamos la resolución de la ecuación de tercer grado por el método iterativo del punto fijo, pretendiendo destacar el resultado de obtener intervalos cuyos extremos son funciones sencillas de los coeficientes de la ecuación y en los cuales la convergencia de las iteraciones está asegurada debido a la contractividad en los mismos de dos funciones determinadas por los coeficientes de la ecuación.

Damos un cuadro resumen de los casos posibles y de los intervalos donde localizar las raíces reales con la función iterante correspondiente.

Se estudian todos los casos posibles no triviales en función de los signos de los coeficientes de la ecuación, realizándose un gráfico de cada caso.

Sea la ecuación de tercer grado con coeficientes reales $X^3 + AX^2 + BX + C = o$, donde $A \neq o$. Pasemos de esta ecuación a otra de tercer grado donde el coeficiente del término de segundo grado es nulo; para ello haremos la sustitución $X = x - \frac{A}{3}$ obteniéndose una ecuación del tipo $x^3 + px + q = 0$, donde $p = B - \frac{A^3}{3}$ y $q = C + \frac{2A^3}{27} - \frac{B \cdot A}{3}$

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de agosto de 1982.

Sea

I. $X^3 + AX^2 + BX + C = 0, \ A \neq 0$

II. $x^3 + px + q = 0 \qquad$ donde $X = x - \frac{A}{3}$

III. $3x^2 + p = 0$

Teniendo en cuenta que en una ecuación de coeficientes reales se cumple que si posee una raíz compleja, también posee como raíz a la compleja conjugada, tenemos una de las alternativas siguientes:

1.ª La ecuación II posee tres raíces reales simples.
2.ª La ecuación II posee una raíz real y dos complejas.
3.ª La ecuación II posee una raíz real simple y una raíz real doble.
4.ª En el caso de la ecuación II, poseer una raíz triple, ésta es $x = 0$, sucediendo esto cuando $p = 0$ y $q = 0$.

En efecto:

$$(x - x_o)^3 = x^3 - (3x_o)x^2 + (3x_o^2)x - x_o^3 = 0 \quad \text{que para } x_o \neq 0$$

es de distinta forma a la II.

En el caso de que II posea una raíz real simple y otra raíz doble, éstas cumplen la relación:

Raíz real simple $= -2$ raíz real doble.

En efecto:

$(x - x_0)(x - x_1)^2 = (x - x_0)(x^2 - 2x_1 x + x_1^2) = x^3 - (2x_1 + x_0)x^2 + x_1(2x_0 + x_1)x - x_0 x_1^2 = 0$, que es del tipo II cuando $x_0 = -2x_1$.

La raíz real doble de II debe satisfacer la ecuación III, y esto sólo se tendrá para $p < 0$.

Por tanto, la raíz doble de II es una del conjunto

$$\left\{ -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}; \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|} \right\}.$$

Vistas estas propiedades, recordemos el enunciado del teorema del punto fijo:

Sea (S, d) un espacio métrico completo, y sea f una función que cumple a) $f(S) \subset S$ y $\forall x, y$ de S, $d(f(x), f(y)) \leqslant K\alpha(x, y)$, $o \leqslant K < 1$.

En estas condiciones f posee un único punto fijo, que es $p = \lim_{n \to \infty} x_n$ donde x_0 es un elemento cualquiera de S, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$...

En el caso de funciones de R en R tal que $f[a, b] \subset [a, b]$ que sean derivables en [a, b] con $|f'(x)| \leqslant K < 1$ es fácil ver que dichas funciones son contractivas en ([a, b], d), donde d es la métrica del valor absoluto y ([a, b], d.) es un subespacio métrico completo de (r, d.), por tanto, f posee un único punto fijo en [a, b].

De la ecuación II se puede despejar x de dos modos diferentes $x = \dfrac{-x^3 - q}{p}$ y $x^3 = \sqrt[3]{-px - q}$, $p \neq 0$, esto nos sugiere dos funciones f y φ definidas por $f(x) = \dfrac{-x^3 - q}{p}$ y $\varphi(x) = \sqrt[3]{-px - q}$.

Los puntos fijos de f y φ son soluciones de la ecuación II y recíprocamente, es decir, $f(x_0) = x_0 \Leftrightarrow x_0^3 + p\,x_0 + q = 0$, y $\varphi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow x^3 + px_0 + q = 0$.

El propósito de este trabajo es estudiar las funciones f y φ para poder aplicar el teorema del punto fijo y obtener de este modo las raíces reales de la ecuación II.

Observemos primeramente que f y φ son inversas la una de la otra, es decir, $f \cdot \varphi = i$; en efecto, $(f \cdot \varphi)(x) = f(\varphi(x)) = x = i(x)\ \forall x \in R$, en todo momento $p \neq 0$.

Como consecuencia de esto, las gráficas de f y φ son simétricas respecto de la recta $y = x$.

En efecto:

Si $f(a) = b$, veamos que $\varphi(b) = a$; $\varphi(b) = \varphi(f(a)) = (\varphi \cdot f)(a) = i(a) = a$, y (a, b) y (b, a) son simétricas respecto de $y = x$.

La función $f(x) = \dfrac{-x^3 - q}{p}$ responde al tipo $f(x) = f(x) = \alpha\, x^3 - \beta$, cuyas gráficas son del tipo de la figura I, que en $x = o$ poseen un punto de inflexión de tangente horizontal.

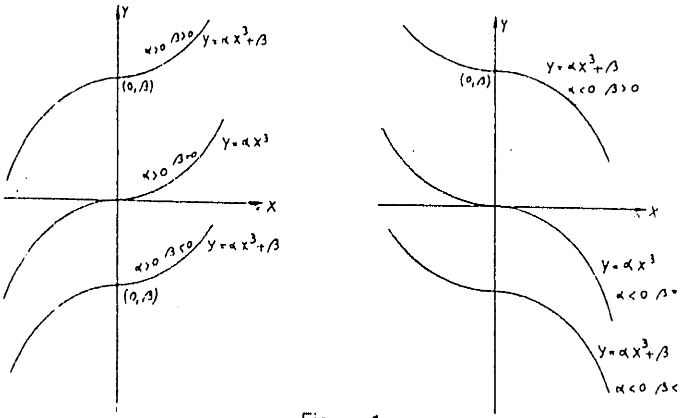

Figura 1.

Veamos cuál es el lugar geométrico de los puntos de la pendiente 1 y de la pendiente −1 de la familia de curvas $f_\alpha(x) = \alpha\, x^3$; para ello obtengamos las isoclinas de pendiente 1 y −1 correspondientes a la ecuación diferencial de la familia anterior

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha\, x^3 \\ y' &= 3\,\alpha\, x^2 \end{aligned}\right\} \text{ de donde } y' = 3\,\frac{y}{x^3}\,x^2 = 3\,\frac{y}{x}$$

es decir, la ecuación diferencial de la familia es $y' = 3\,\dfrac{y}{x}$, la isoclina de pendiente 1 es la recta $y = \dfrac{1}{3}x$, para $\alpha > 0$, y la de pendiente −1 es la recta $y = -\dfrac{1}{3}x$ para $\alpha < 0$ (ver figura 2).

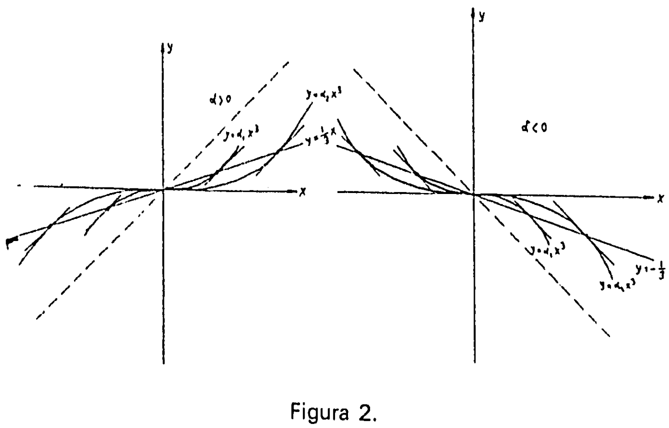

Figura 2.

Para las funciones $y=\alpha\sqrt[3]{x}$ con $\alpha>0$ y $\alpha<0$ el lugar geométrico de los puntos de pendiente 1 y -1 están situados en las rectas $y=3x$ e $y=-3x$, respectivamente.

Estudiemos ahora para la función $f(x)=\dfrac{-x^3-q}{p}$ el intervalo donde $|f'(x)|<1$; $f'(x)=\dfrac{-3x^2}{p}$; $\left|\dfrac{-3x^2}{p}\right|<1$; $3x^2<|p|$; $|x|<\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}$; es decir, dicho intervalo es $I=\left(-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|};\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}\right)$.

Los puntos $f'(x)=1$ o $f'(x)=-1$ son $\left(-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|};\ f\left(-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}\right)\right)$, $\left(\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|};\ f\left(\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}\right)\right)$ (ver figura 3).

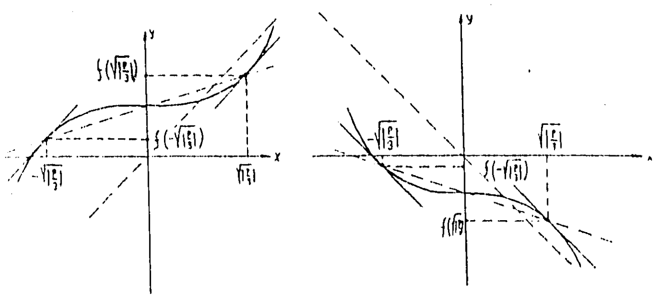

Figura 3.

El conjunto de puntos donde $|\varphi'(x)|<1$ es J,

$$J=\left(-\infty;\ \min\left\{f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right),\ f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)\right\}\right)\ \vee\ \left(\max\left\{f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right),\ f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)\right\},\ \infty\right)$$

φ' no está definida para $x=-q/p$.

En los cuatro casos que a continuación estudiaremos $p\neq o$ y $q\neq o$.

Las funciones $f(x)=\dfrac{-x^3-q}{p}$ y $\varphi(x)=\sqrt[3]{-px-q}$ son estrictamente crecientes o decrecientes.

Seguidamente se da la idea clave para la búsqueda de las raíces y para la determinación del número de las mismas, dicha idea es la comparación de $\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}$ con $f\left(\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}\right)$ y de $-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}$ con $f\left(-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}\right)$ para valores de $p<0$ y $p>0$ respectivamente, dicha comparación indicará el número de cortes de la gráfica de $f(x)$ con la recta $y=x$ y por tanto el número y localización de raíces reales de la ecuación $x^3+px+q=0$.

Pasemos a continuación a estudiar los cuatro casos en función de los signos de p y q considerando en todo momento $p\neq0$ y $q\neq0$.

- — Caso 1.º $p>0$, $q>0$
- — Caso 2.º $p>0$, $q<0$
- — Caso 3.º $p<0$, $q>0$
- — Caso 4.º $p<0$, $q<0$

CASO 1.º

Sea $p>0$ y $q>0$ la función $f(x)$, puede escribirse del modo siguiente:

$f(x)=-\dfrac{x^3}{|p|}-\dfrac{|q|}{|p|}$ se trata de una función estrictamente monótona decreciente, de ordenada en el origen negativa; esto nos indica que sólo habrá una raíz real y que además en este caso es negativa.

Veamos que la comparación de $-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}$ con $f\left(-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}\right)$ nos puede dar $f\left(-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}\right)=-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}$ en cuyo caso el problema esta resuelto, pues $x=r=-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}$ es la solución de la ecuación.

1.º, a)

$f\left(-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}\right)<-\sqrt{\left|\dfrac{P}{3}\right|}<0$, hay una sola raíz, como hemos dicho (ver figura 4).

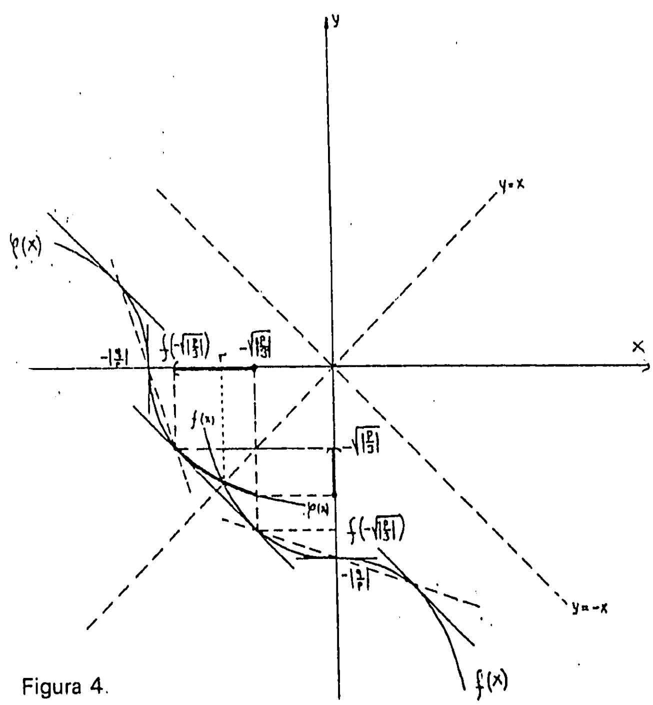

Figura 4.

La gráfica de f(x) y φ(x) nos indica que la raíz hemos de determinarla con la función φ(x), que es contractiva en el intervalo $\left[f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)+\alpha^2; -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right]$ para un cierto α^2 lo suficientemente pequeño.

En efecto: $|\varphi'(x)| < 1$ en $\left[f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right), -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right]$ además $\varphi\left[f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right), -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right] \subset \left[f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right), -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right]$.

Ahora bien, $\varphi' = -1$ para $x = f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right.$ luego φ no es contractiva en $\left[f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right), -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right]$ sin embargo sí lo es en un cierto invervalo S.

$$S = \left[f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)+\alpha^2, -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right]$$ con α^2 lo suficientemente pequeño, ya que en este intervalo S se cumple que $\varphi(S) \subset S$ y que $|\varphi'| < 1\ \forall x \in S$, luego la raíz la podemos encontrar partiendo de un valor cualquiera x_0

$$x_0 \in \left[f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right), -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right]$$ (ya que x_0 pertenecerá a algún S) e iteraremos con φ, es decir, raíz $= r = \lim_{n \to \infty} x_n$, donde $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1 \ldots$ $\ldots x_n = \varphi(x_{n-1}) \ldots$

En los demás casos se hace un razonamiento análogo a éste; en ellos se ha abreviado el mismo por lo sugerente de las gráficas de f(x) y φ(x).

1.º, b)

$0 > f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) > -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ en este caso hay UNA RAIZ.

La raíz la determinamos con la función f(x) que es contractiva en el intervalo $\left[-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}+\alpha^2; f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)\right]$ para un cierto α^2 lo suficientemente pequeño.

Para obtener r la raíz basta con tomar $x_0 \in \left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}, f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)\right]$ e iterar con la función f(x) (ver figura 5).

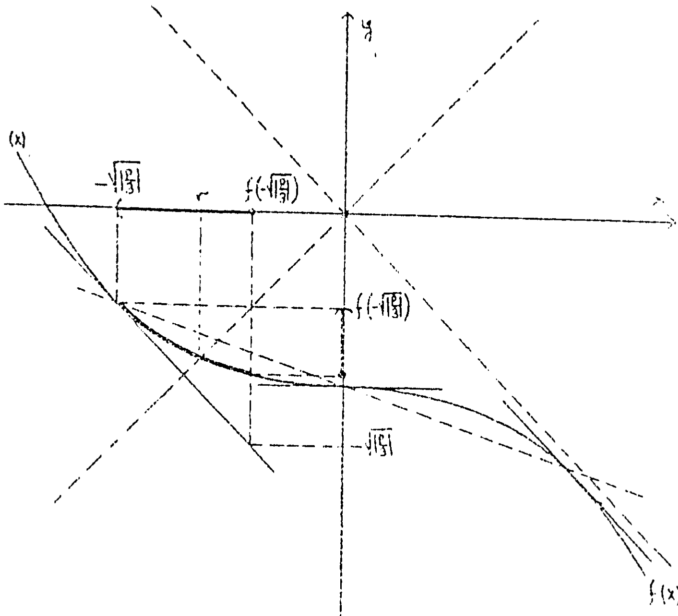

Figura 5

1.º, c)

$f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) > 0 > -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ en este caso hay sólo UNA RAIZ.

La raíz la determinamos con la función f(x), que es contractiva en el intervalo $[-\sqrt[3]{|q|}\ , 0]$.

Para obtener r la raíz basta con tomar $x_0 \in [-\sqrt[3]{|q|}, 0]$ e iterar con la función f(x) (ver figura 6).

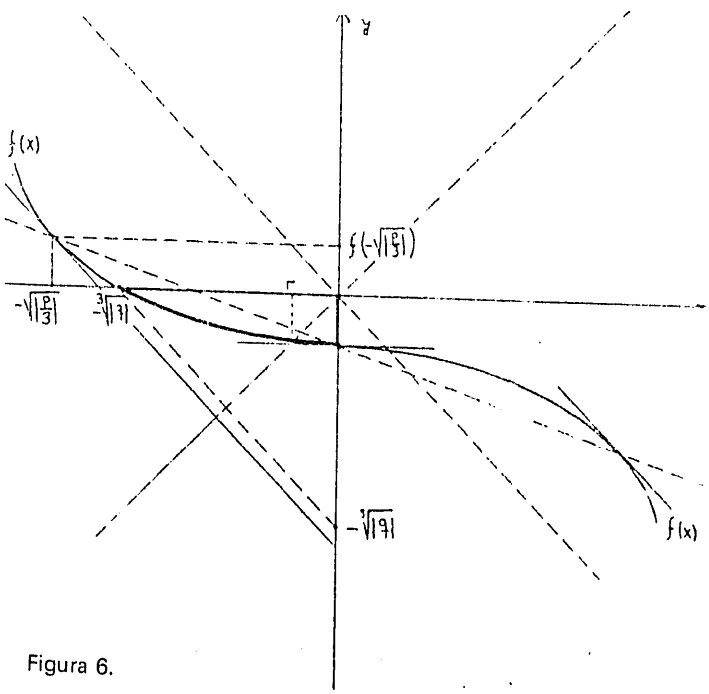

Figura 6.

CASO 2.º

Sea $p > 0$ y $q > 0$ la función puede escribirse del siguiente modo: $f(x) = -\frac{x^3}{|p|} + \frac{|q|}{|p|}$.

2.º, a)

$0 < f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) < \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ en este caso sólo hay UNA RAIZ.

La raíz la determinamos con la función f(x), que es contractiva en el intervalo $\left[f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right);\ \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|} - \alpha^2\right]$ para un α^2 lo suficientemente pequeño.

Para obtener r la raíz basta con tomar $x_0 \in \left[f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right);\ \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right]$ e iterar con la función f(x) (ver figura 7).

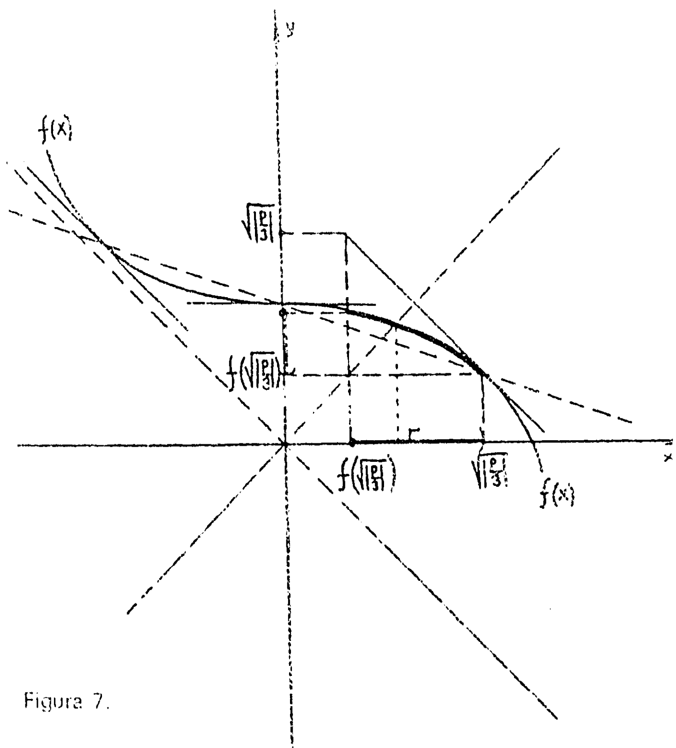

Figura 7.

2.º, b)

$f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) < 0 < \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ en este caso sólo hay UNA RAIZ REAL.

La raíz la determinamos con la función f(x) que es contractiva en el intervalo $[0; \sqrt[3]{|q|}]$.

Para obtener r la raíz basta con tomar $x_0 \in [0; \sqrt[3]{|q|}]$ e iterar con la función f(x) (ver figura 8).

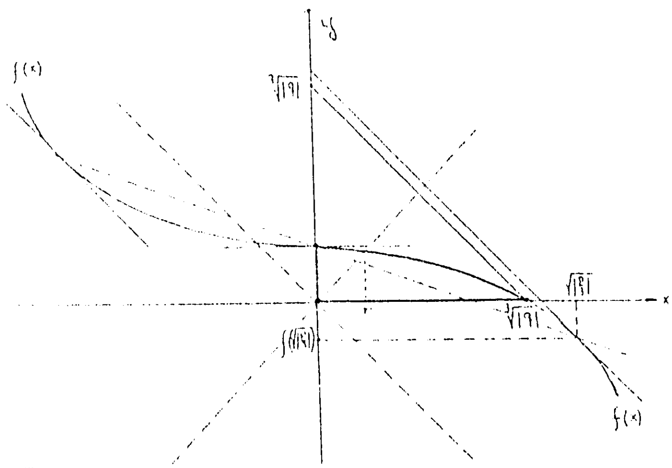

Figura 8.

2.º, c)

$f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) > \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|} > 0$, en este caso sólo hay UNA RAIZ REAL.

La raíz la determinamos con la función $\varphi(x)$, que es contractiva en el intervalo $\left[\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|};\ f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) - \alpha^2\right]$ para un α^2 lo suficientemente pequeño.

Para obtener r la raíz basta con tomar $x_0 \in \left[\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|};\ f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)\right]$ e iterar con la función $\varphi(x)$ (ver figura 9).

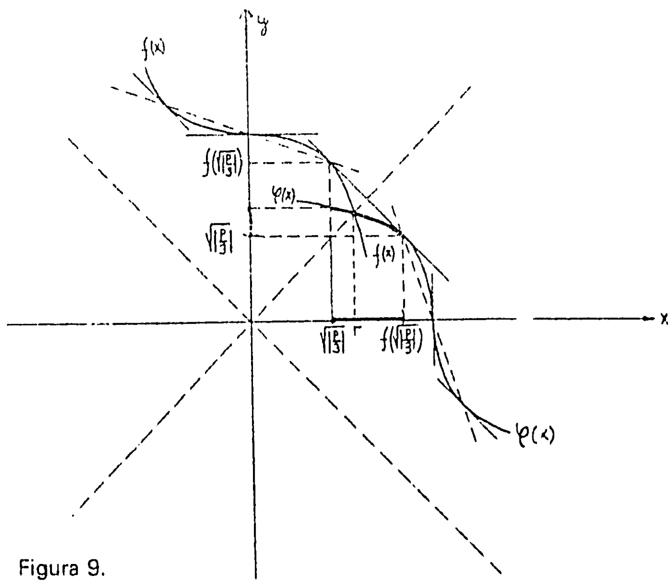

Figura 9.

CASO 3.º

Sea $p < 0$ y $q > 0$ la función puede escribirse del siguiente modo: $f(x) = \frac{x^3}{|p|} + \frac{|q|}{|p|}$.

3.º, a)

$0 < f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) < \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ en este caso hay TRES RAICES REALES.

La raíz r_1 la obtenemos con la función $\varphi(x)$, que es contractiva en el intervalo $\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}; \alpha^2\right)$ con α^2 lo suficientemente grande.

Para obtener r_1 partimos de $x_0 \in \left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}; \infty\right)$ e iteramos con $\varphi(x)$.

La raíz r_2 la obtenemos con la función f(x), que es contractiva en el intervalo $\left(0; \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|} - \beta^2\right)$ con β^2 lo suficientemente pequeño.

Para obtener r_2 partimos de $x_0 \in \left(0; \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)$ e iteramos con f(x).

La raíz r_3 la obtenemos con la función $\varphi(x)$, que es contractiva en el intervalo $\left(-\gamma^2; -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)$ con γ lo suficientemente grande.

Para obtener r_3 partimos de $x_0 \in \left(-\infty; -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)$ e iteramos con $\varphi(x)$ (ver figura 10).

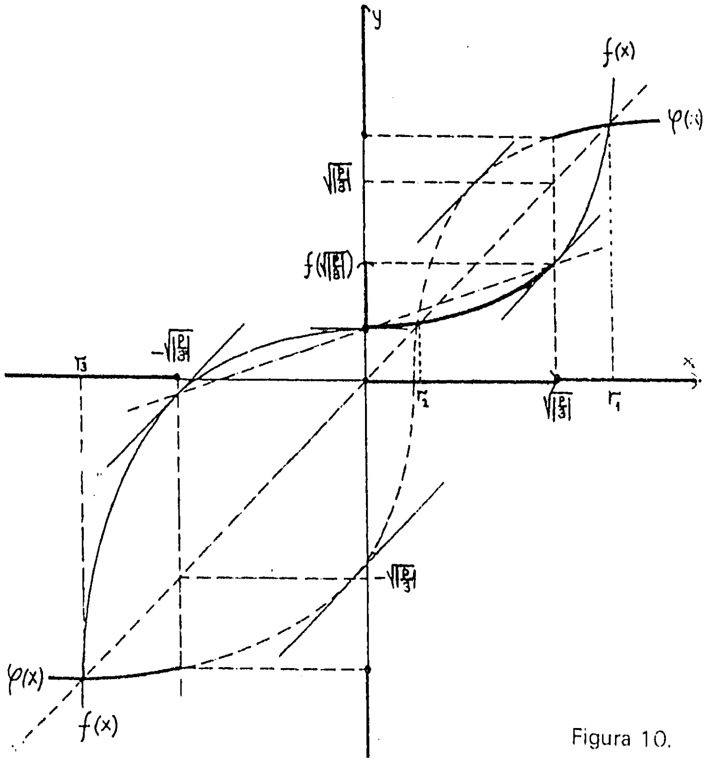

Figura 10.

3.º, b)

$f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) > \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|} > 0$, en este caso hay UNA RAIZ REAL.

La raíz la determinamos con la función $\varphi(x)$ que es contractiva en el intervalo $\left(-\alpha^2; -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)$ para un α^2 lo suficientemente grande.

Para obtener r la raíz basta con tomar $x_0 \in \left(-\infty; -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)$ e iterar con la función $\varphi(x)$ (ver figura 11).

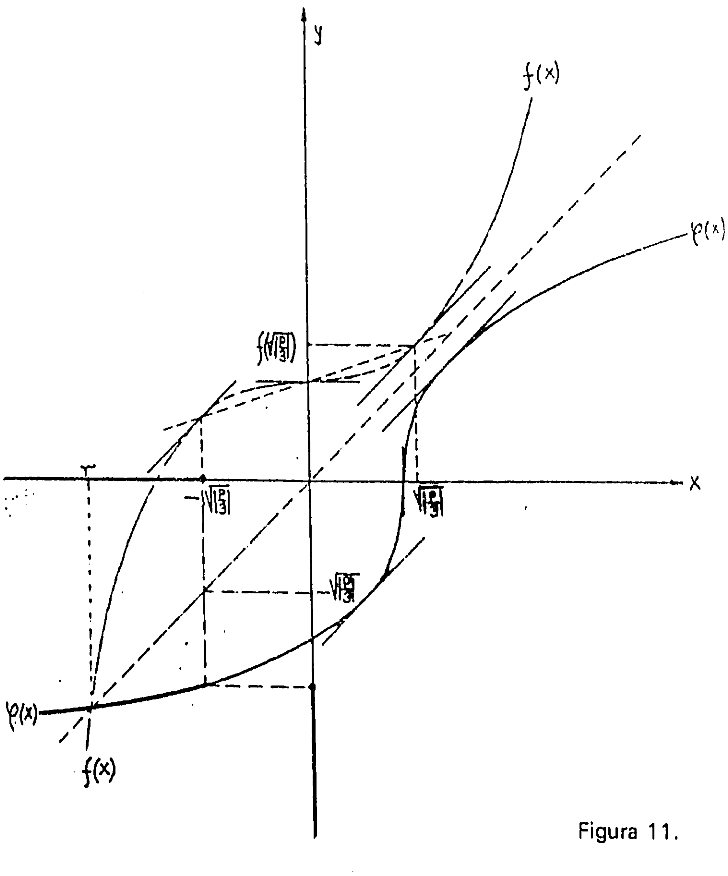

Figura 11.

CASO 4.º

Sea $p < 0$ y $q < 0$ la función puede escribirse del siguiente modo: $f(x) = \frac{x^3}{|p|} - \frac{|q|}{|p|}$

4.º, a)

$f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) < -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|} < 0$, en este caso hay UNA RAIZ REAL.

La raíz la determinamos con la función $\varphi(x)$, que es contractiva en el intervalo $\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}; \alpha^2\right)$ para un α^2 lo suficientemente grande.

Para obtener r¦ la raíz basta con tomar $x_0 \in \left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}; \infty\right)$ e iterar con la función $\varphi(x)$ (ver figura 12).

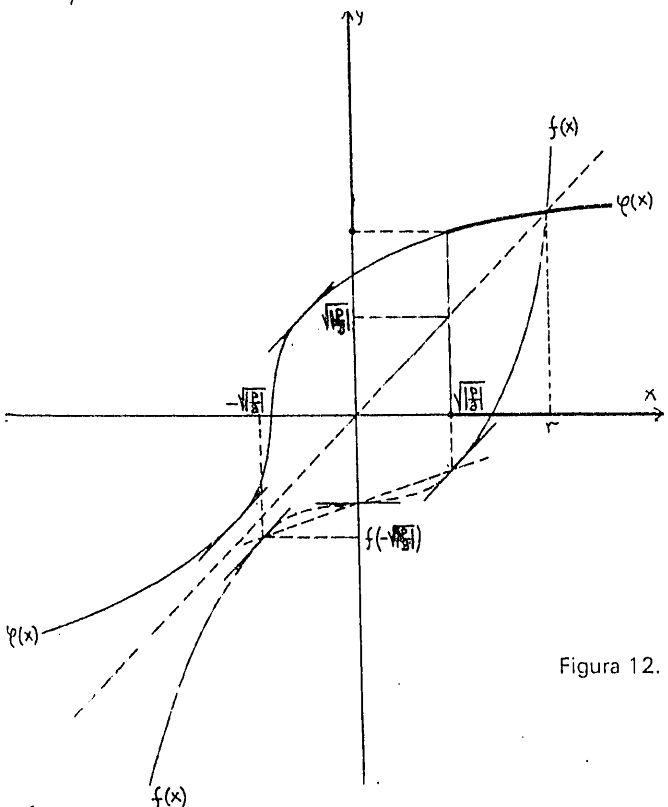

Figura 12.

4.º, b)

$0 > f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) > -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ en este caso hay TRES RAICES REALES.

La raíz r_1 la obtenemos con la función $\varphi(x)$, que es contractiva en el intervalo $\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}; \alpha^2\right)$ con α^2 lo suficientemente grande.

Para obtener r_1 partimos de $x_0 \in \left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}; \infty\right)$ e iteramos con $\varphi(x)$.

La raíz r_2 la obtenemos con la función f(x), que es contractiva en el intervalo $\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|} + \beta^2; 0\right)$ con β^2 lo suficientemente pequeño.

Para obtener r_2 partimos de $x_0 \in \left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}; 0\right)$ e iteramos con f(x).

La raíz r_3 la obtenemos con la función $\varphi(x)$, que es contractiva en el intervalo $\left(-\gamma^2; -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)$ con γ^2 lo suficientemente grande.

Para obtener r_2 partimos de $x_0 \in \left(-\infty; -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)$ e iteramos con $\varphi(x)$ (ver figura 13).

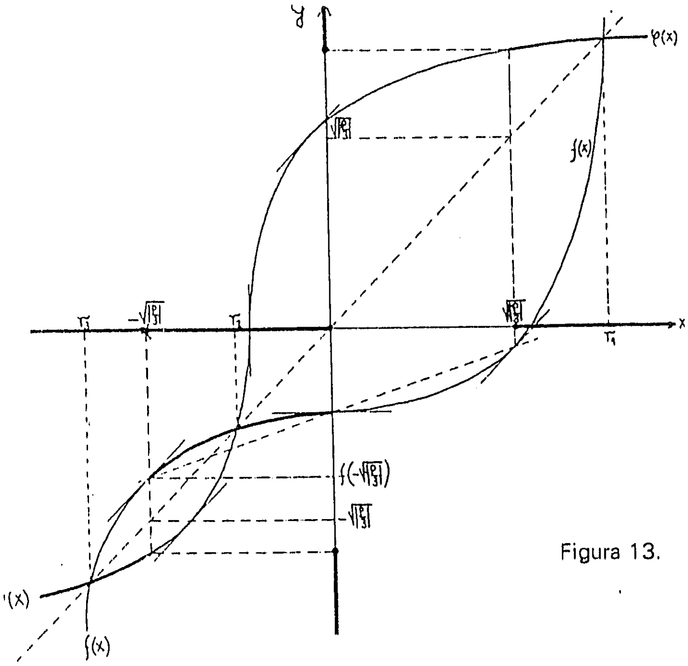

Figura 13.

Damos a continuación un cuadro de casos posibles en función de los signos de p y 1, en el que están definidos los intervalos donde localizar las raíces y con la función f o φ que sea contractiva en cada caso.

Completemos todo lo anterior viendo los casos no considerados en el estudio precedente, y que no están incluidos en el cuadro resumen.

$p = 0$ y $q = 0$ la raíz del II es $x = 0$ triple.

$p = 0$ y $q \neq 0$ la raíz real es $\sqrt[3]{-q}$, y las complejas $\sqrt[3]{q}\,\frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$.

$$p \neq 0 \text{ y } q = 0 \begin{cases} p > 0, \text{ la raíz real es 0 y las complejas } \pm \sqrt{p}\, i. \\ p < 0, \text{ las tres raíces reales son } 0, +\sqrt{-p}, -\sqrt{-p}. \end{cases}$$

En los casos estudiados 1.°, 2.°, 3.° y 4.° para los que $p \neq 0$ y $q \neq 0$, no se consideró el estudio de $f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) = -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ y de $f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) = \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$.

CASO 1.°

$P > 0$, si $f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) = -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$; $x = -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ es la raíz real de la ecuación, teniéndose este caso cuando $q = 4\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}^2$.

CASO 2.°

$P > 0$, si $f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) = \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$; $x = \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ es la raíz real de la ecuación, teniéndose este caso cuando $q = -4\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}^3$.

CASO 3.°

$P < 0$, si $f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) = \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$; $x = \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ es la raíz real doble y $x = -2\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ es la raíz real simple, esto se tiene cuando $q = 2\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}^3$.

CASO 4.°

$p < 0$, si $f\left(-\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) = -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$; $x = -\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ es la raíz del doble y $x = 2\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ es la raíz real simple, teniéndose este caso cuando $q = -2\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}^3$.

Para ilustrar el método, resolvamos la ecuación: $x^3 + 15x - 500 = 0$.

$p = 15$ y $q = -500$, el cuadro nos indica que estamos en el caso 2.°, $f(x) = \frac{-x^3 + 500}{15}$ y $\varphi(x) = \sqrt[3]{-15x + 500}$; realicemos la comparación de $\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ con $f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)$; $\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|} = \sqrt{\left|\frac{15}{3}\right|} = \sqrt{5} \simeq 2{,}2360679$.

$$f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) = f(\sqrt{5}) = \frac{-(\sqrt{5})^3 + 500}{15} \simeq$$

$\simeq 32{,}58798$, resultando $f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right) > \sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}$ vemos en el cuadro que corresponde al caso en el que la raíz real está localizada en el intervalo $\left[\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}; f\left(\sqrt{\left|\frac{P}{3}\right|}\right)\right] \simeq [2{,}2360679\ldots; 32{,}58798\ldots]$.

En este intervalo la función que es contractiva es la $\varphi(x)$.

Comencemos, por ejemplo, por $x_0 = 7$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(7) = 7{,}337233 \\ x_2 &= \varphi(x_1) = 7{,}305775 \\ x_3 &= \varphi(x_2) = 7.308723 \\ x_4 &= \varphi(x_3) = 7{,}308444 \\ x_5 &= \varphi(x_4) = 7.308471 \\ x_6 &= \varphi(x_5) = 7.308469 \\ x_7 &= \varphi(x_6) = 7{,}308469 \end{aligned}$$

Luego $r \simeq 7{,}308469$. La capacidad de la calculadora de bolsillo utilizada no nos puede dar una aproximación mayor que 7,308469.

$$7{,}308469^3 + 15 \times 7{,}308469 - 500 = 390{,}3726 + 109{,}62703 - 500 = -0{,}0004.$$

Si hubiésemos partido de $x_0 = 32$, la sucesión sería $x_1 = \varphi(32) = 2{,}714416$; $x_2 = \varphi(x_1) = 7{,}715431$, $x_3 = \varphi(x_2) = 7.270173$, $x_4 = \varphi)x_3) = 7{,}312053$, $x_5 = 7{,}308134$, $x_6 = 7{,}308499$, $x_7 = 7.308467$, $x_8 = 7{,}308469$, $x_9 = 7{,}308469$, sucesión evidentemente convergente a la misma raíz como asegura el teorema del punto fijo.

Obtención de raíces de $x^3 + p\,x + q = 0$ por iteraciones de $f(x) = \frac{-x^3 - q}{p}$ o $\varphi(x) = \sqrt[3]{-p\,x - q}$

Caso	p q			N.º raíces reales:	Partimos de:	Iteramos con:
1.º	+ +	$f\left(-\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) < -\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|} < 0$	Fig. 4	Una	$x_0 \in \left[f\left(-\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right); -\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right]$	$\varphi(x)$
		$0 \geqslant f\left(-\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) > -\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}$	Fig. 5	Una	$x_0 \in \left[-\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}; f\left(-\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right)\right]$	$f(x)$
		$f\left(-\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) > 0 > -\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}$	Fig. 6	Una	$x_0 \in \left]-\sqrt[3]{\|q\|}\ ;\ 0\right]$	$f(x)$
2.º	+ −	$0 \leqslant f\left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) < \sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}$	Fig. 7	Una	$x_0 \in \left[f\left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right)\ \sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right]$	$f(x)$
		$f\left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) < 0 < \sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}$	Fig. 8	Una	$x_0 \in \left[0;\ \sqrt[3]{\|q\|}\ \right]$	$f(x)$
		$f\left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) > \sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|} > 0$	Fig. 9	Una	$x_0 \in \left[\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}; f\left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right)\right]$	$\varphi(x)$
3.º	− +	$0 < f\left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) < \sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}$	Fig. 10	Tres	$x_0 \in \left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}; \infty\right)$	$\varphi(x)$
					$x_0 \in \left(0; \sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right)$	$f(x)$
					$x_0 \in \left(-\infty; -\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right)$	$\varphi(x)$
		$f\left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) > \sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|} > 0$	Fig. 11	Una	$x_0 \in \left(-\infty; -\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right)$	$\varphi(x)$
4.º	− −	$f\left(-\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) < -\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|} < 0$	Fig 12.	Una	$x_0 \in \left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}; \infty\right)$	$\varphi(x)$
		$0 > f\left(-\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right) > -\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}$	Fig. 13	Tres	$x_0 \in \left(\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}; \infty\right)$	$\varphi(x)$
					$x_0 \in \left(-\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}; 0\right)$	$f(x)$
					$x_0 \in \left(-\infty; -\sqrt{\left\|\frac{P}{3}\right\|}\right)$	$\varphi(x)$