

Una nueva aproximación a la función de distribución de la altura de ola máxima (*)

Por MIGUEL A. LOSADA
y MIGUEL A. CORNIERO

Departamento de Ingeniería Oceanográfica y Portuaria
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Santander

Mediante la técnica de simulación numérica se ha obtenido una nueva aproximación a la función de distribución de la altura de ola máxima en un estado de mar. El modelo estadístico ajustado es la distribución doble exponencial o de Gumbel, función de dos parámetros A y B. A diferencia de la solución tradicional de Longuet-Higgins (1952), A y B solo dependen del área bajo la función espectral, m_0 y no de la duración del estado del mar o del número de olas, N en el intervalo, siempre que esta duración sea superior a veinte minutos. El modelo es de aplicación a espectros de banda estrecha y banda ancha.

INTRODUCCION

En la descripción del oleaje a corto plazo (estado del mar) se considera que la elevación de la superficie del agua, en un punto fijo, con respecto a un nivel medio, responde a un proceso estocástico, $h(t)$ cuasi-estacionario en el tiempo y gaussiano de media cero.

La función de densidad espectral de $h(t)$ se denota por $S(f)$ donde $f(f > 0)$ es la frecuencia en ciclos por unidad de tiempo y el área bajo ella m_0 representa la varianza de $h(t)$. Se definen los momentos de orden n ($n: n^o$ entero) de $S(f)$ alrededor de $f = 0$ como

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n S(f) df \quad (1)$$

Rice (1945), demostró que para este tipo de procesos, la función de densidad de los desplazamientos máximos, (positivos o negativos) $h_m(t)$ con respecto a un nivel de referencia, depende de m_0 y de un parámetro $\epsilon = \psi(m_n)$ cuya expresión fue obtenida por Cartwright y Longuet-Higgins (1956). Llamando amplitud, a , al máximo desplazamiento entre un paso ascendente y otro descendente consecutivo por el nivel medio Longuet-Higgins (1952) demostró para espectros de banda estrecha ($\epsilon \rightarrow 0$) que la

función de distribución de las amplitudes es del tipo Rayleigh y depende únicamente de m_0 .

Definiendo altura de ola (H) como el rango total de $h(t)$ en un intervalo de tiempo entre dos pasos ascendentes consecutivos de $h(t)$, en el caso de espectros de banda estrecha, $h(t)$ es simétrica con respecto al nivel medio de tal manera que $H \approx 2a$. Puesto que a se distribuye según Rayleigh, H también.

Longuet-Higgins (1952) obtuvo la función de distribución de las amplitudes máximas en un registro finito de N olas, para espectros de banda estrecha y admitiendo independencia estadística entre las N olas. Bajo esas condiciones, la función de distribución $F_N(H_{\max.})$ de altura de ola máxima es:

$$F_N(H_{\max.}) = \left\{ \text{Prob}(H_{\max.} \leq H) \right\}^N = \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{H^2}{8m_0}\right) \right\}^N \quad (2)$$

Battjes (1977) obtuvo la función de distribución de la amplitud máxima en un registro de duración D :

$$\text{Prob} \left\{ a_{\max.} \leq a \right\}_D = \exp \left\{ -\sqrt{\frac{m_2}{m_0}} D \exp\left(-\frac{a^2}{2m_0}\right) \right\} \quad (3)$$

suponiendo que las amplitudes son estadísti-

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de marzo de 1982.

camente independientes, con lo que el número (m) de amplitudes que excede a un nivel a , en el intervalo de tiempo D , se distribuye según una ley de Poisson.

Para N y $\sqrt{H/m_0}$ suficientemente grandes la expresión (2) puede aproximarse por

$$F_N(H_{\max.}) = \exp. \left\{ -N \exp \left(-\frac{H^2}{8m_0} \right) \right\} \quad (4)$$

Rice (1945) demostró que el número esperado N de pasos ascendentes por el nivel cero en el intervalo de tiempo D viene dado por:

$$N = D \sqrt{m_2/m_0} \quad (5)$$

En consecuencia para espectros de banda estrecha (3) y (4) coinciden tanto en amplitudes como en alturas de ola máximas. Al coincidir ambas expresiones en amplitudes máximas, se pueden aplicar los resultados obtenidos por Longuet-Higgins para espectros de banda estrecha a cualquier tipo de espectro, Battjes (1977).

Las hipótesis impuestas para la obtención de los modelos teóricos (3) y (4) y la escasa información con la que han sido contrastados experimentalmente, sugieren realizar una nueva aproximación, analizando en particular la influencia de la duración del estado de mar, o del número N de olas en la función de distribución del parámetro estadístico, $H_{\max.}$ altura de ola máxima, derivada de un proceso estocástico $h(t)$, cuasi-estacionario en el tiempo y gaussiano de media cero.

METODO DE TRABAJO

Se han simulado numéricamente registros de $h(t)$ de duración (D) variable, de acuerdo con el modelo de Rice (1945)

$$h(t) = \sum_{n=1}^N C_n \cos \left\{ 2\pi f_n t + \beta_n \right\} \quad (6)$$

siendo $C_n^2 = 2S(f_n) \Delta f_n$

y β_n variable aleatoria uniformemente distribuida en $(0, 2\pi)$. Se demuestra que este proceso $h(t)$ es estacionario y gaussiano de media cero (Yaglom 1962). Una simulación numérica con este modelo fue realizada por Goda (1970).

Aún cuando existen otros métodos de simulación de $h(t)$ (Tuah and Hudspeth, 1980), se ha utilizado el método del espectro acumulado de energía dado por Borgman (1969)

por su simplicidad conceptual, a pesar del mayor tiempo de computación.

La expresión formal de $S(f)$ de las funciones espectrales utilizadas en la simulación numérica es:

$$S(f) = k f^{-m} \exp \left\{ \frac{-m}{n} \left(\frac{f}{f_p} \right)^n \right\} \cdot \exp \left\{ -r \left(1 - \frac{f}{f_p} \right)^s \right\} \quad (7)$$

Siendo $f > 0$

k, r, p, m, n, s , constantes positivas.

f_p = frecuencia correspondiente al máximo de $S(f)$.

Bajo esa expresión se engloban los espectros Pierson-Moskowitz (1964), Neumann (1953) y Jonswap (1973). Los dos primeros dependen solamente de $\bar{u}_{10}$, mientras que el último depende de $\bar{u}_{10}$ y de un parámetro longitudinal F , $F = (fetch)$. Para cada valor de $\bar{u}_{10}$ se ha elegido F de tal manera que los tres espectros tuviesen la misma f_p .

AJUSTE DE LA DISTRIBUCION TEORICA A LAS SERIES MUESTRALES

Tomando logaritmos neperianos dos veces en el modelo teórico (4)

$$\log. \log \frac{1}{F} = \frac{-H^2}{8m_0} + \log. N \quad (8)$$

que puede escribirse,

$$H_{\max.}^2 = A \log. \log \frac{1}{F} + B \quad (9)$$

donde A y B son los parámetros de la distribución. La expresión (9) es la distribución de Gumbel (1958) en las variables,

$$\eta = H_{\max.}^2 \\ \xi = \log. \log \frac{1}{F} \text{ (variable reducida)}$$

Si las series muestrales se ajustasen al modelo teórico (8)

$$\begin{aligned} A &= -8m_0 \\ B &= 8m_0 \log N \end{aligned} \quad (10)$$

APROXIMACION A LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE LA ALTURA DE OLA MAXIMA

o teniendo en cuenta (5)

$$B = 8m_0 \log D \sqrt{m_2/m_0} \quad (11)$$

El parámetro ϵ viene determinado por la frecuencia de truncamiento elegido para cada espectro. En la tabla I se dan los valores de ϵ y f_t/f_p obtenidos para cada espectro; f_t es la frecuencia de truncamiento.

TABLA I

	ϵ	f_t/f_p
Neumann	0.75	7.80
Pierson-Moskowitz	0.62	3.35
Jonswap	0.83	15.00
	0.30	1.50

Se ha denominado Tjonswap el espectro Jonswap para $\epsilon = 0.3$. Se han elegido seis velocidades de viento ($\bar{u}_{10} = 5, 10, 15, 20, 25$ y 30 m/seg.) y para cada una de ellas se han simulado cien registros de duración D para cada registro, tabla II.

De cada registro se ha extraído la $H_{m\acute{a}x}$ en el total del mismo y la $H_{m\acute{a}x}$ en los sucesivos intervalos de cinco minutos en que se puede dividir el registro. Ajustada una función de distribución a las diferentes muestras, se ha estudiado la evolución de los parámetros de la distribución con la duración.

TABLA II

Espectro	N.º total de Registros	$\bar{u}_{10}$ (m/seg)	Duración (minutos)
Neumann	600	5-10-15-20-25-30	10
Pierson	500	10-15-20-25-30	20
Jonswap	600	5-10-15-20-25-30	30
Tjonswap	400	5-10-15-20	20

En la figura 1 se ha representado la variación del parámetro A/m_0 con la duración para el caso de función espectral Jonswap. Se aprecia como, a partir de veinte minutos no existe una influencia de la duración sobre dicho parámetro. Resultados análogos se han obtenido para las otras funciones espectrales.

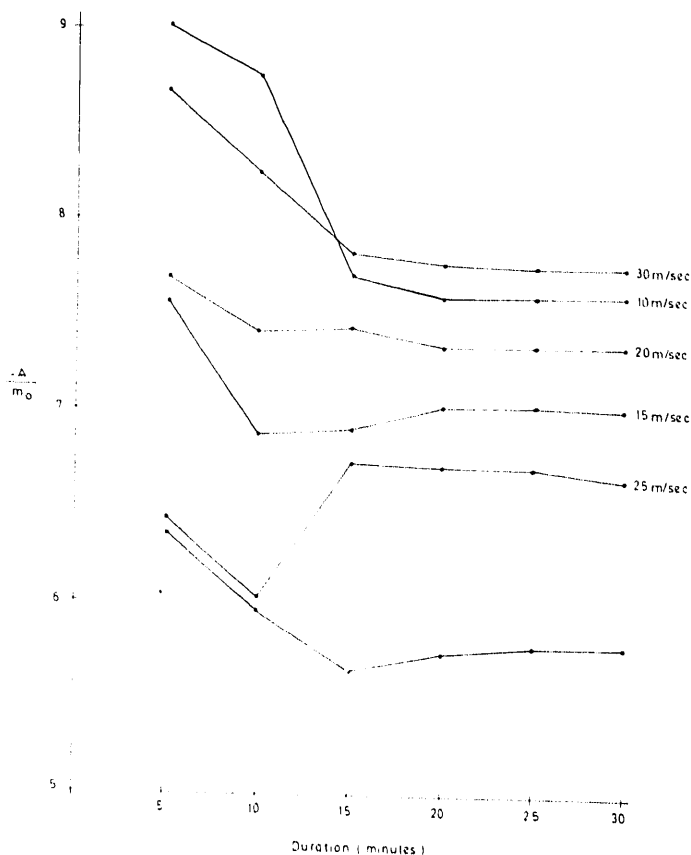


Figura 1. Variación de A/m_0 con la duración.

En la figura 2 se ha representado la variación del parámetro A con m_0 para todas las duraciones y funciones espectrales simuladas, conjuntamente con la recta $A = -8m_0$. Se puede concluir que el parámetro, A , depende exclusivamente de m_0 y que el coeficiente de proporcionalidad teórico es una cota superior para los resultados obtenidos.

La figura 3 muestra la variación del parámetro B/m_0 con la duración, también para el caso de la función espectral Jonswap. Se concluye lo mismo que para el parámetro A .

En la figura 4 se ha representado la variación de B/m_0 con $\log m_2/m_0$ con todos los datos disponibles, así como las rectas del ajuste teórico (11). La conclusión es obvia; la muestra no sigue el modelo teórico.

Ajuste de un nuevo modelo experimental a las series muestrales.

Con el fin de confirmar la influencia, o no, de la duración del parámetro B/m_0 , se simuló cuarenta y tres registros para $\bar{u}_{10} = 10$ m/seg. con la función espectral Jonswap y duración

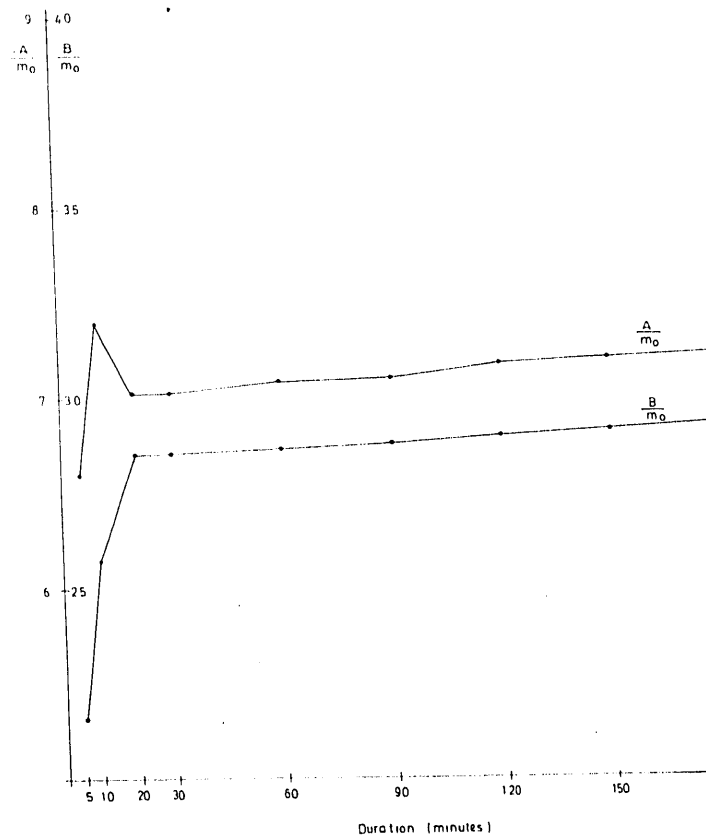
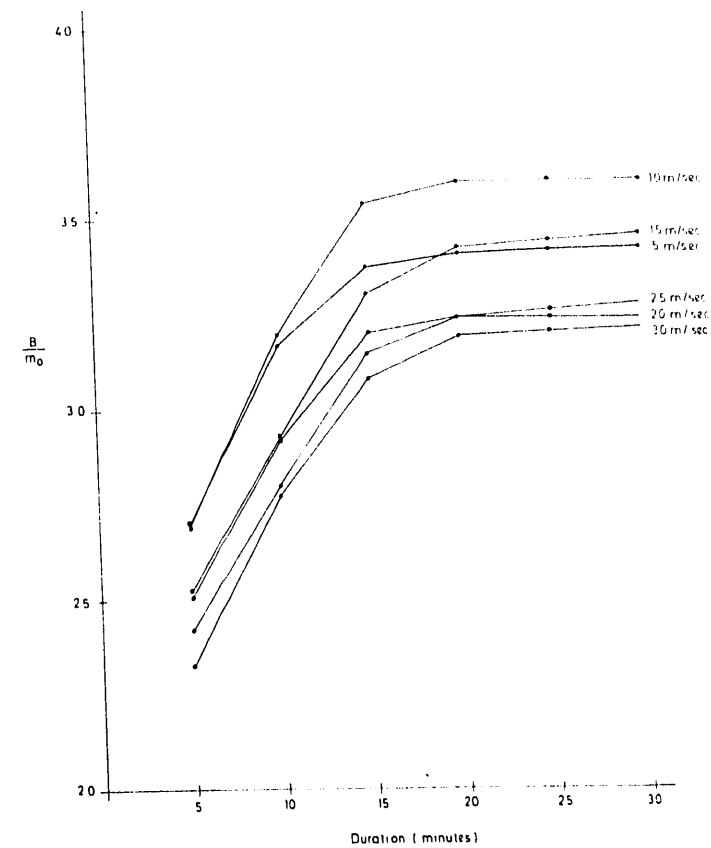
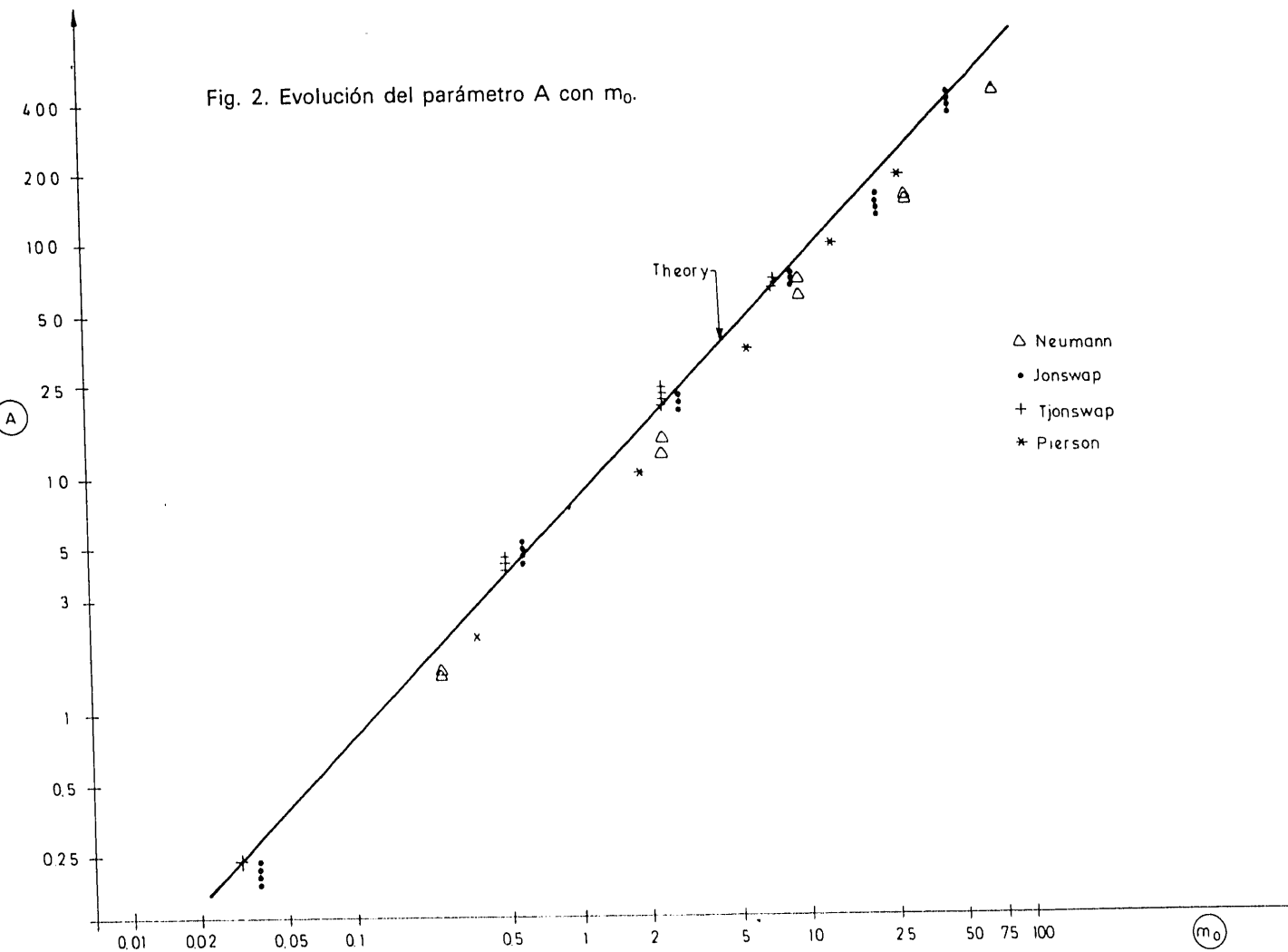


Fig. 3. Variación del parámetro B/m_0 con la duración.

Fig. 4. Evolución de A/m_0 y B/m_0 con la duración.

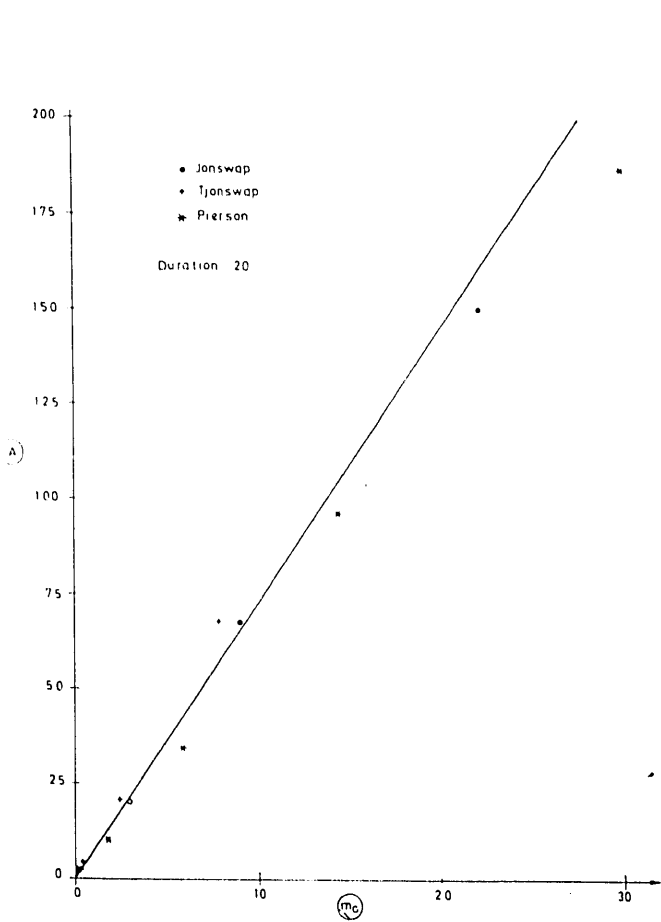
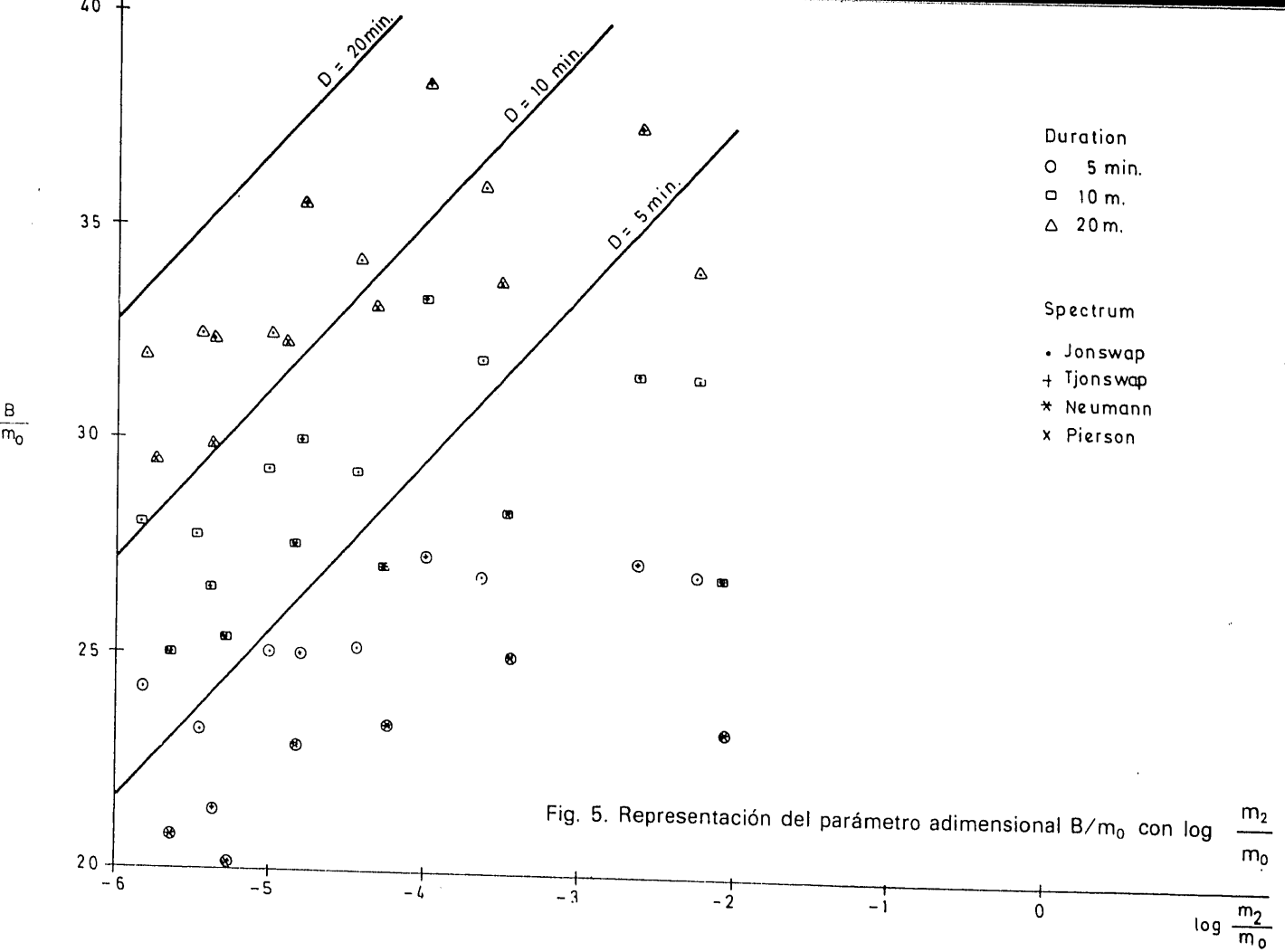


Fig. 6. Ajuste de los valores observados de A con m_0 .

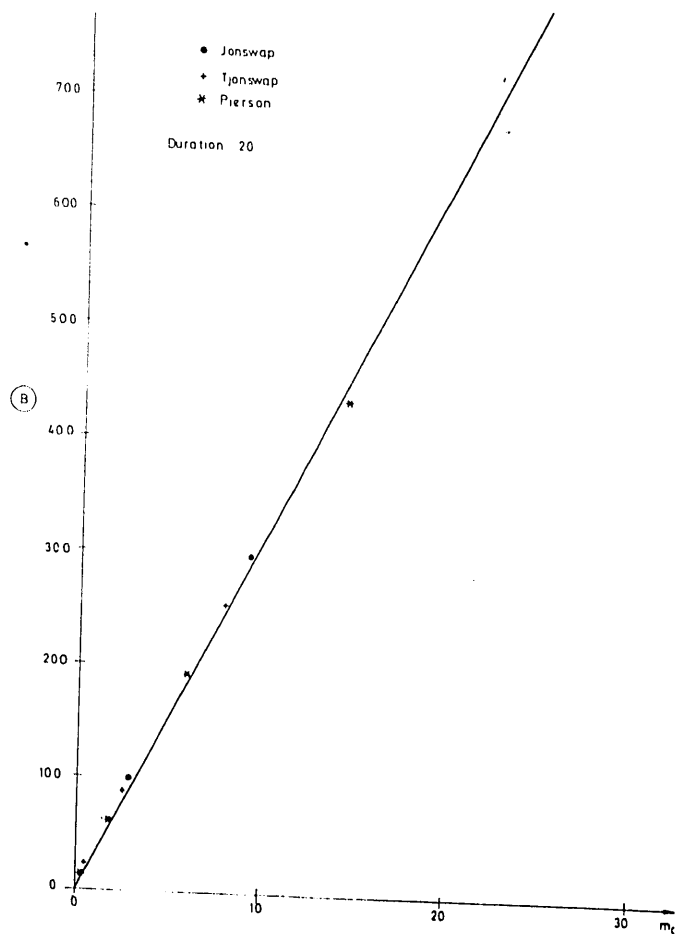


Fig. 7. Ajuste de los valores observados de B con m_0 .

hasta tres horas. La figura 5 muestra los resultados obtenidos.

A la vista de esta figura puede admitirse que los parámetros de ajuste A y B no dependen de la duración de la serie muestral y que prácticamente pueden considerarse constantes a partir de duraciones superiores a veinte minutos.

Se ha procedido a estimar los valores de A y B como funciones de m_0 con las series muestrales correspondientes a los registros de duración veinte minutos que se disponía. En las figuras 6 y 7 se han representado los puntos de las muestras y las rectas ajustadas por minimos cuadrados. Los valores de A y B obtenidos fueron:

$$A = - 7.22 \ m_0$$
 coeficiente de correlación de Pearson: $r = 0.993$
(12)

$$B = 31.35 \ m_0$$
 coeficiente de correlación de Pearson: $r = 0.999$

FUNCION DE DISTRIBUCION DE ALTURA DE OLA MAXIMA ($H_{m\acute{a}x.}$).

De (9) y (12) se obtiene como nuevo modelo para la distribución de altura de ola máxima.

$$F(H_{m\acute{a}x.}) = \text{Prob} \left\{ H_{m\acute{a}x.} \leq H \right\} =$$

$$= \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{H^2 - 31.35 \ m_0}{7.22 m_0} \right) \right\}$$
(13)

que adimensionalmente

$$F(H_{m\acute{a}x.}) = \exp \left\{ - \exp \left\{ 4.34 - 0.14 \left(\frac{H}{\sqrt{m_0}} \right)^2 \right\} \right\}$$
(14)

Los datos de Houmb-Overvik y Gumbak (1977) han permitido disponer de 138 pares de valores de $H_{m\acute{a}x.}$ y m_0 correspondientes a registros de veinte minutos. La figura 8 muestra la comparación del modelo propuesto con esa serie de datos. También se han incluido las rectas

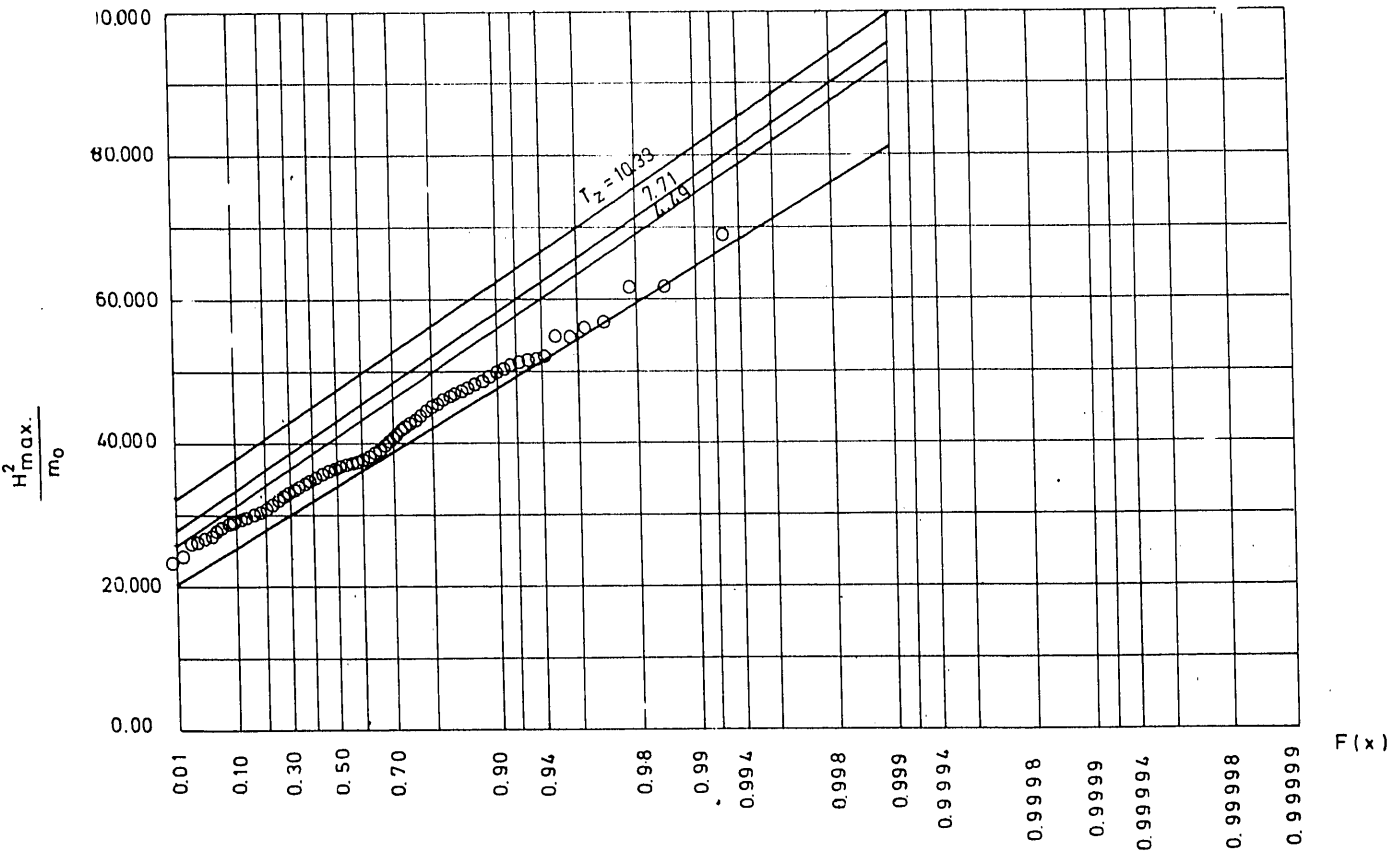


Fig. 8. Comparación de las distribuciones experimental y teórico con datos registrados de $H_{m\acute{a}x.}$

APROXIMACION A LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE LA ALTURA DE OLA MAXIMA

correspondientes al modelo teórico de Longuet-Higgins obtenidas tomando $D = 20$ minutos y asociando a $\sqrt{m_2/m_0}$ los valores mínimo medio y máximo de los 138 registros.

El ajuste de la serie real de datos al nuevo modelo es realmente bueno, especialmente en la cola superior.

Discusión

En la ingeniería práctica el parámetro más utilizado para representar el estado de mar es la altura de ola significativa, H_s , cuya relación teórica con m_0 es,

$$H_s = 4.004 \sqrt{m_0} \quad (15)$$

En la simulación efectuada, se ha obtenido, (ver fig. 9)

$$H_s = 3.826 \sqrt{m_0} \quad (16)$$

que concuerda sensiblemente con el valor dado por Houmb y Overvik (1977); otros investigadores confirman este resultado, Goda (1970) Wilson Baird (1972) y otros.

De (14) y (16) se deriva la expresión:

$$F(H_{\max}) = \exp \left\{ -\exp \left\{ 4.34 - 2.05 \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right\} \right\} \quad (17)$$

Estableciendo, $H_{\max} = \alpha H_s$, se puede obtener una relación

$$f\{\alpha, F(H_{\max})\} = 0$$

válida para cualquier duración (superior a veinte

minutos) del estado de mar. En la tabla III se da una lista de valores de α y $F(H_{\max})$, donde se aprecia que la probabilidad de que $H_{\max}$ exceda 1.9 es el cinco por ciento.

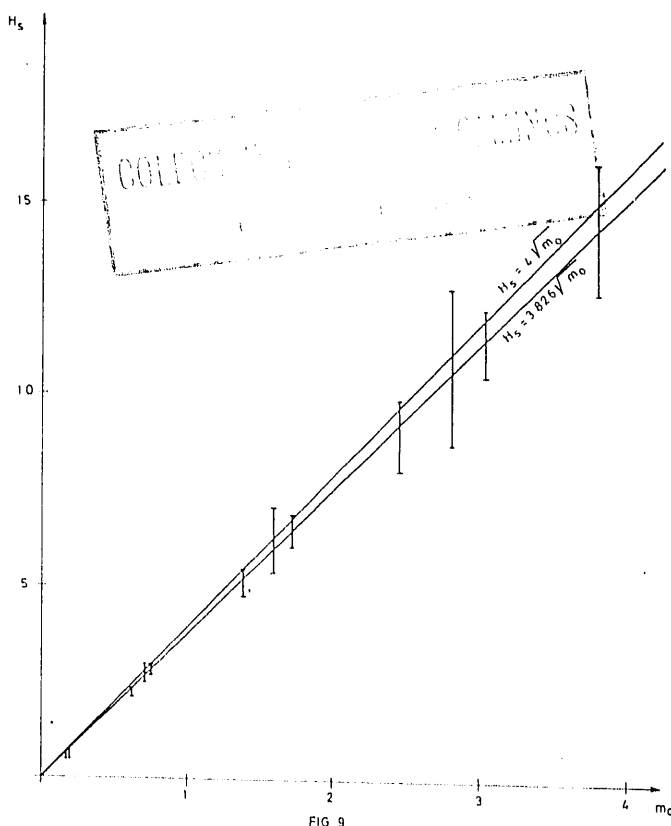


FIG. 9
Evolución de los valores observados de H_s con m_0 . Las barras representan el rango de los valores observados. La línea superior representa los valores teóricos y la inferior la curva de mejor ajuste.

TABLA III

$F(H_{\max})$	α
0.01	1.18
0.10	1.32
0.20	1.38
0.30	1.43
0.40	1.48
0.50	1.52
0.60	1.57
0.70	1.63
0.80	1.70
0.90	1.80
0.95	1.90
0.99	2.10
0.999	2.35
0.9999	2.58

Para la definición de $H_{\max}$ en función de H_s , este nuevo modelo experimental sustituye el criterio determinista de elegir una duración del estado de mar o del número N de olas por el criterio de elegir un nivel de probabilidad (riesgo).

ANALISIS DE LAS OLAS SUCESIVAS EN LOS REGISTROS SIMULADOS

Al objeto de conocer la correlación entre las olas sucesivas de los registros simulados numéricamente, se ha calculado el coeficiente de correlación $\rho_{i, i+k} = \Phi(k)$ entre dos olas sucesivas, a través de la fórmula propuesta por Rye (1974) en cuatrocientos registros de treinta minutos de duración, velocidades de viento $\bar{U}_{10} = 5, 10, 15$ y 20 m/sg. y espectro Jonswap. En la tabla IV se dan los valores obtenidos de $\Phi(k)$.

TABLA IV

		$\bar{u}$ m/sg.			
		5	10	15	20
		Valor medio			
Φ	(1)	0.421	0.315	0.200	0.136
Φ	(2)	despreciable en su valor medio			

Rye (1974) obtuvo de sesenta registros reales como valor medio $\Phi(1) = 0.24$, indicando que los registros correspondientes a fase de generación $\Phi(1)$ tendía a 0.30, mientras que en decaída $\Phi(1)$ tendía a 0.20. Arhan y Ezraty (1978), obtienen teórica y experimentalmente resultados análogos a éstos.

CONCLUSIONES

- 1.º Para espectros de banda estrecha y banda ancha, la altura de ola máxima en un estado de mar se ajusta a una distribución doble exponencial o de Gumbel.
- 2.º Los dos parámetros de la distribución dependen exclusivamente de m_0 para duraciones del estado de mar superiores a veinte minutos.

REFERENCIAS

—Arhan, M. and Ezraty, R., 1978. Statistical Relations between successive wave height. *Oceanología Acta* 1978, Vol. 1 No. 2.

—Battjes, J.A., 1977. Engineering aspects of ocean waves and currents. International Research Seminar on Safety of Structures under dynamic loading. Preprints of the lectures. The University of Trondheim. Norway, 1977.

—Borgman, L.E., 1969. Ocean wave simulation for engineering design. *Journal waterways and Harbors Division*, Proc. ASCE, Vol. 95, WW4.

—Carwright, D.E. and Longuet-Higgins, m.S., 1956. The statistical distribution of the maxima of a random function. *Proceedings Royal Society London, Series A*, Vol. 237.

—Goda, Y., 1979. A review on statistical interpretation of wave data. Report of the Port and Harbour Research Institute, Vol. 18, No. 1, Japan.

—Goda, Y., 1970. Numerical experiments on wave statistic with spectral simulation. Report of the Port and Harbour Research Institute, Vol. 9, No. 3, Japan.

—Gumbel, 1958. *Statistics of extremes*. Columbia Univ. Press.

—Günbak, A.R., 1978. Statistical analysis of 21 wave records off the danish white sand coast during one storm in january 1976. Div. of Port and Ocean Engineering. University of Trondheim. Norway.

—Hasselmann, K. et al., 1973. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea wave Project (JONSWAP). *Deutsches Hydrographisches Institut*, Hamburg, Germany.

—Houmb, O.G. and Overvik, T., 1977. On the statistical properties of 115 wave records fom the norwegian continental shelf. Div. of Port and Ocean Engineering. University of Trondheim. Norway.

—Longuet-Higgins, M.S., 1952. On the statistical distribution of the heights of sea waves. *Journal of Marine Research*. Vol. 11.

—Neuman, G., 1953. On ocean wave spectra and new method of forecasting wind generated sea. Tech. Mem. No. 43, Beach Erosion Board. Corps of Engineers. Washington.

—Pierson, W.J. and Moskowitz, 1964. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. Kitaigorodskii, *J. Geophys. Res.* 69.

—Rice, S.O., 1945. *Mathematical analysis of random noise*. Reprinted in selected papers on noise and stochastic processes. N. wax. Ed, Dover Publications, Inc., New York, NY, 1954.

—Rye, H., 1974. Wave group formation among storm waves, *Proc. of 14th coastal Engineering Conference* 1.

—Tuah, H. and Hudspeth, R.T., 1980. Comparisons of numerical random sea simulations. *Civil Engineering Abstract*. University of Oregon. 1980.

—Wilson, J.R. and Baird, W.F., 1972. Discussion of some measured wave data, *Proc. of the 13Th Coastal Engineering Conference*.

—Yaglom, A.M., 1962. An introduction to the theory of stationary random functions. Richard A. Silverman, Ed, 1962. and republication Dover Publications, Inc. 1973. New York.