

Aproximación de perfiles longitudinales por mínimos cuadrados (*)

Por SANDRO ROCCI BOCCALERI

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.
División Regional de Construcción.
Primera Jefatura Regional de Carreteras.

Se presenta un método de sencilla aplicación para la resolución del problema, frecuente en el trazado de carreteras, de ajustar la rasante al perfil longitudinal del terreno, siempre dentro de los límites geométricos impuestos por las Instrucciones correspondientes.

1. INTRODUCCION

En el trazado de carreteras (y otras vías de comunicación, o conducciones de líquidos) el Proyectista intenta encajar una rasante, a la vista del perfil longitudinal del terreno; rasante que está compuesta de arcos de parábola enlazados, dentro de un marco de validez representado por no rebasar unas pendientes máximas o mínimas ni bajar de ciertos parámetros mínimos, todo ello fijado por la Instrucción correspondiente. El problema se complica por el hecho de que al separarse del terreno encarece la obra proyectada, al implicar un mayor coste de las explanaciones y la presencia de obras de paso especiales.

Este problema ha tenido solución mediante el empleo de ordenadores, existiendo cierto número de programas para ellos; pero rebasa las posibilidades del Proyectista modesto, y de los Servicios en fase de replanteo. El método que se presenta aquí permite la resolución del problema, sin más ayuda que la de una calculadora programable HP-97; aunque también puede realizarse el cálculo con otras calculadoras no programables, resultando tan sólo más laborioso.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA GENERAL

En un determinado tramo, definido por sus abscisas (distancias al origen en planta), se tiene como dato un conjunto de n puntos (del terreno) definido

por sus cotas: x_i, z_{T_i} . La elección del conjunto debe ser acertada, si se desea que el resultado sea coherente; y con un poco de práctica, a la vista de una representación gráfica, se puede lograr acertar a la primera.

La rasante que se pretende encajar será de la forma

$$z_R = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$$

siendo $K_V = 1/2A_2$ el parámetro del acuerdo vertical, definido por la Instrucción.

La condición de mínimos cuadrados impone que

$$\sum_{i=1}^n (z_R - z_{T_i})^2 = \text{mínimo}$$

es decir, que debe ser mínima la expresión

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^n \left| (A_0 - z_{T_i}) + A_1 x_i + A_2 x_i^2 \right|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \left| (A_0 - z_{T_i})^2 + A_1^2 x_i^2 + A_2^2 x_i^4 + 2(A_0 - z_{T_i}) A_1 x_i + 2(A_0 - z_{T_i}) A_2 x_i^2 + 2A_1 A_2 x_i^3 \right| = \\ &= n A_0^2 + \sum_{i=1}^n \left| z_{T_i} - 2A_0 z_{T_i} + A_1^2 x_i^2 + \right. \\ &\quad \left. + A_2^2 x_i^4 + 2A_0 A_1 x_i - 2A_1 x_i z_{T_i} + 2A_0 A_2 x_i^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2A_2 x_i^2 z_{T_i} + 2A_1 A_2 x_i^3 \right| \end{aligned}$$

NOTA: Pueden imponerse otras condiciones, p. ej. mínimo costo, etc.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de Julio de 1981.

Ello equivale a anular las derivadas parciales de Q respecto de los tres parámetros A_0, A_1, A_2 .

$$\frac{\partial Q}{\partial A_0} = 2n A_0 + \sum_{i=1}^n \left[-2z_{T,i} + 2A_1x_i + 2A_2x_i^2 \right] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A_1} = \sum_{i=1}^n \left[2A_1x_i^2 + 2A_0x_i - 2x_iz_{T,i} + 2A_2x_i^3 \right] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A_2} = \sum_{i=1}^n \left[2A_2x_i^4 + 2A_0x_i^2 - 2x_i^2z_{T,i} + 2A_1x_i^3 \right] = 0$$

Utilizando la notación simplificada

$$A = n \quad E = \sum_{i=1}^n x_i^4$$

$$B = \sum_{i=1}^n x_i \quad F = \sum_{i=1}^n z_{T,i}$$

$$C = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad G = \sum_{i=1}^n x_iz_{T,i}$$

$$D = \sum_{i=1}^n x_i^3 \quad H = \sum_{i=1}^n x_i^2z_{T,i}$$

queda el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$A A_0 + B A_1 + C A_2 = F$$

$$B A_0 + C A_1 + D A_2 = G$$

$$C A_0 + D A_1 + E A_2 = H$$

que, resuelto, permite conocer la definición de la rasante (A_0, A_1, A_2).

3. PARAMETRO K_V IMPUESTO

En el caso de que el parámetro $K_V = 1/2A_2$ obtenido por el procedimiento descrito en el apartado anterior no cumpliera las limitaciones de la Instrucción, puede interesar conocer cuál es la rasante con K_V impuesta que cumple la condición de mínimos cuadrados. En este caso se conoce.

$$A^*2 = 1/2 K^*_V$$

y las derivadas se reducen a dos, que dan origen al sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$A A_0 + B A_1 = F - G A^*2$$

$$B A_0 + G A_1 = G - D A^*2$$

que resuelve el problema.

4. UNA RASANTE CONTIGUA

En los dos apartados anteriores se ha fijado el método que permite encajar, por mínimos cuadrados, una parábola de eje vertical a un conjunto de puntos, sin o con parámetro impuesto. Al estudiar el perfil longitudinal, sucede casi siempre que una sola parábola no puede aproximarse bien al conjunto de puntos, existiendo otro conjunto a continuación que requiere una nueva parábola, que debe ser tangente a la anterior en un punto x_0 desconocido "a priori".

Sea $z = a_0 + a_1x + a_2x^2$ la parábola contigua, ya determinada con anterioridad. La ecuación de su tangente en x_0 será

$$z = (a_0 - a_2x_0^2) + (a_1 + 2a_2) x$$

la nueva rasante a definir será, por tanto

$$z_R = (a_0 - a_2x_0^2) + (a_1 + 2a_2x_0) x + A_2 (x - x_0)^2 = \left[a_0 + (A_2 - a_2) x_0^2 \right] + \left[a_1 - 2(A_2 - a_2) x_0 \right] + A_2 x^2$$

Es decir, que si denominamos $m = A_2 - a_2$, será

$$A_0 = a_0 + mx_0^2$$

$$A_1 = a_1 - 2mx_0$$

$$A_2 = a_2 + m$$

El problema está en determinar la combinación (x_0, m) que cumple la condición de mínimos cuadrados, siendo

$$Q = \sum_{i=1}^n \left[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) + mx_0^2 - 2mx_0x_i + mx_i^2 - z_{T,i} \right]^2$$

Las derivadas a anular son

$$1/2 \frac{\partial Q}{\partial x_0} = \sum_{i=1}^n \left[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) + mx_0^2 - 2mx_0x_i - z_{T,i} \right] (2mx_0 - 2mx_i)$$

$$1/2 \frac{\partial Q}{\partial m} = \sum_{i=1}^n \left[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) + mx_0^2 - 2mx_0x_i - z_{T,i} \right] (x_0^2 - 2x_0x_i + x_i^2)$$

Introduciendo la notación simplificada y operando, queda

$$(Ax_0^3 - 3Bx_0^2 + 3Cx_0 - D) m + (Aa_0 + Ba_1 +$$

APROXIMACION DE PERFILES LONGITUDINALES POR MINIMOS CUADRADOS

$$+ Ca_2 - F) x_0 = (Ba_0 + Ca_1 + Da_2 - G) = 0$$

$$(Ax_0^4 - 4Bx_0^3 + 6Cx_0^2 - 4Dx_0 + E) m + (Aa_0 + Ba_1 + Ca_2 - F)x_0^2 - 2(Ba_0 + Ca_1 + Da_2 - G)$$

$$x_0 + (Ca_0 + Da_1 + Ea_2 - H) = 0$$

Introduciendo la notación simplificada

$$R = Aa_0 + Ba_1 + Ca_2 - F$$

$$S = Ba_0 + Ca_1 + Da_2 - G$$

$$T = Ca_0 + Da_1 + Ea_2 - H$$

Queda

$$(Ax_0^3 - 3Bx_0^2 + 3Cx_0 - D) m + Rx_0 - S = 0$$

$$(Ax_0^4 - 4Bx_0^3 + 6Cx_0^2 - 4Dx_0 + E) m + Rx_0^2 - 2Sx_0 + T = 0$$

Eliminando m entre estas dos ecuaciones, queda la ecuación de 4.º grado en x_0 siguiente

$$(AS - BR)x_0^4 - (AT + 2BS - 3CR)x_0^3 + 3(BT - DR)x_0^2 - (CT - 2DS - ER)x_0 + (DT - ES) = 0$$

que, resuelta, permite elegir el x_0 conveniente, y por consiguiente, calcular m y los parámetros A_0 , A_1 y A_2 buscados.

5. UNA RASANTE CONTIGUA, PARAMETRO IMPUESTO

Si, al igual que ocurre en el apartado 3, el parámetro K_v^* es impuesto, también lo será $m^* = 1/2 K_v^* - a_2$; las derivadas de Q se quedan reducidas a la primera, y x_0 estará dado por la ecuación de 3er grado.

$$Ax_0^3 - 3Bx_0^2 + (3C + R/m^*) x_0 - (D + S/m^*) = 0$$

6. DOS RASANTES CONTIGUAS

Especialmente al final de un estudio, suele suceder que la rasante a encajar por mínimos cuadrados tiene que ser tangente, además de a la parábola anterior, a una parábola siguiente $z = b_0 + b_1x + b_2x^2$ en un punto (desconocido "a priori") x_1 . La tangente en dicho punto será

$$z = (b_0 - b_2x_1^2) + (b_1 + 2b_2x_1)x$$

y su intersección con la tangente a $z = a_0 + a_1x + a_2x^2$ por x_0 (también desconocido "a priori") nos da el vértice

$$x_v = \frac{(a_2x_0^2 - b_2x_1^2) - \Delta_0}{\Delta_1 + 2(a_2x_0 - b_2x_1)}$$

Adoptando la notación simplificada

$$\Delta_0 = a_0 - b_0$$

$$\Delta_1 = a_1 - b_1$$

$$\Delta_2 = a_2 - b_2$$

Pero, por definición de la rasante a encajar

$$x_v = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

de donde se deduce la siguiente relación entre x_1 y x_0

$$x_1 = - \frac{2\Delta_0 + \Delta_1x_0}{\Delta_1 + 2\Delta_2x_0}$$

Por otro lado, también por definición

$$K_v = \frac{x_0 - x_1}{\Delta_1 + 2(a_2x_0 - b_2x_1)}$$

y por tanto, sustituyendo

$$A_2 = 1/2K_v = \frac{a_2\Delta_2x_0^2 + a_2\Delta_1(b_2\Delta_0 + \Delta_1^2/4)}{\Delta_2x_0^2 + \Delta_1x_0 + \Delta_0}$$

y entonces

$$m = A_2 - a_2 = \frac{(\Delta_1/2)^2 - \Delta_0\Delta_2}{\Delta_2x_0^2 + \Delta_1x_0 + \Delta_0}$$

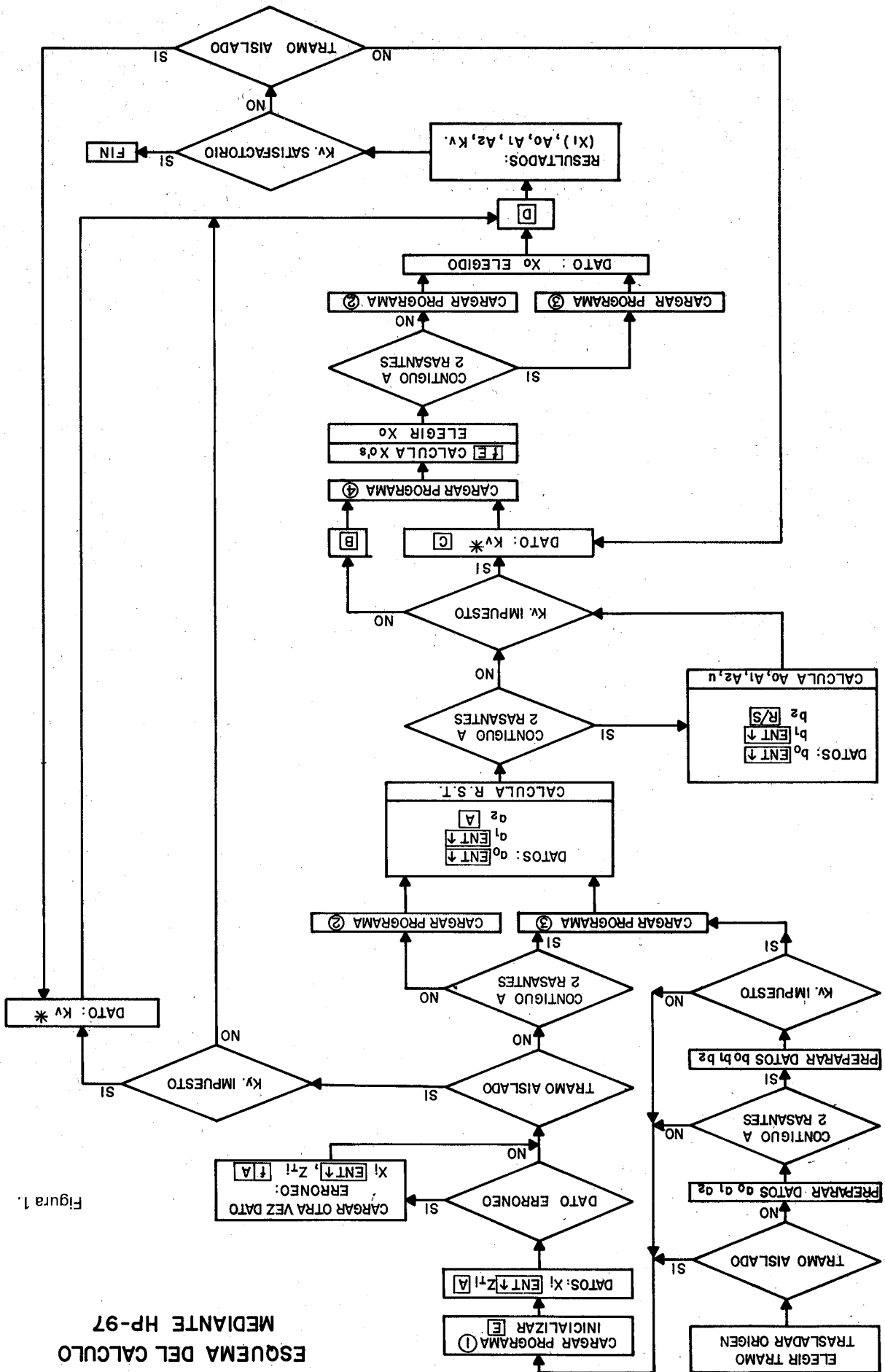
Igualado m a la expresión derivada para este parámetro en el apartado (4)

$$m = \frac{-Rx_0 + S}{Ax_0^3 - 3Bx_0^2 + 3Cx_0 - D}$$

y utilizando la notación simplificada $U = (\Delta_1/2)^2 - \Delta_0\Delta_2$ resulta que x_0 está dado por la ecuación de 3er grado siguiente:

$$(AU + R\Delta_2)x_0^3 - (3BU - R\Delta_1 + S\Delta_2)x_0^2 + (3CU + R\Delta_0 - S\Delta_1)x_0 - (DU + S\Delta_0) = 0$$

que permite conocer x_0 y por tanto m, x_1 y (A_0 , A_1 , A_2).



ESQUEMA DEL CALCULO MEDIANTE HP-97

Figura 1.

7. DOS RASANTES CONTIGUAS, PARAMETRO IMPUESTO

El caso descrito en el apartado anterior se simplifica mucho, al conocerse $m^* = 1/2K^*_V - a_2$. La tangencia x_0 está dada por la ecuación de segundo grado

$$\Delta 2x_0^2 + \Delta 1x_0 + (\Delta_0 - \lambda / m^*) = 0$$

8. ESQUEMA DE CALCULO CON LA HP-97

Se han preparado una colección de 4 programas para la HP-97, cuyo esquema de explotación se representa en la Figura 1.

Al elegir tramo, conviene trasladar el origen de coordenadas (x, z) de forma que no resulten grandes números para x_i, z_{Ti} , pues ello haría perder

precisión. Tampoco se aconsejan valores negativos, que pueden inducir a confusión.

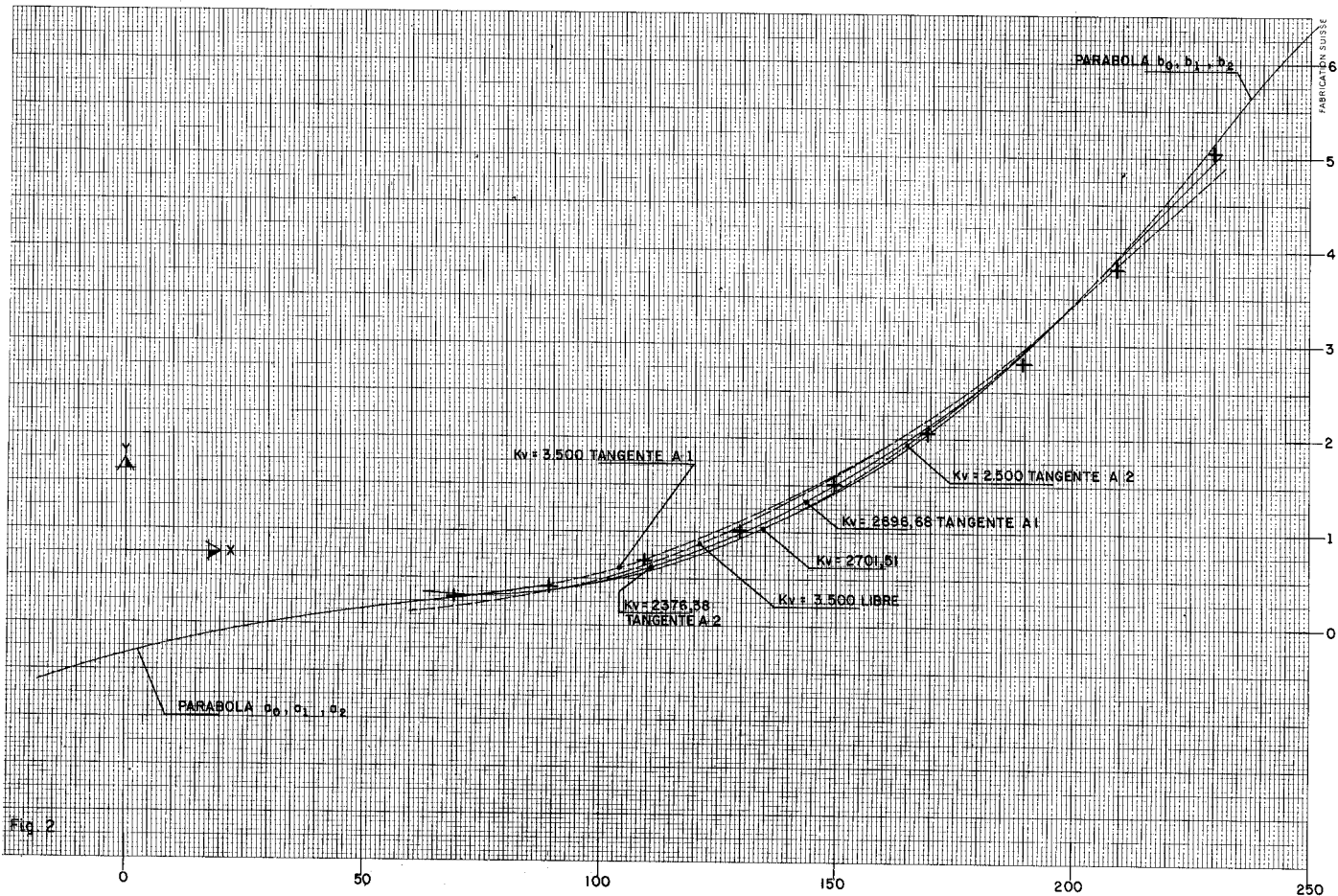
Los datos (a_0, a_1) y (b_0, b_1) que representan, respectivamente, la cota y la pendiente en el origen de coordenadas ($x = 0$) de las parábolas contiguas, deben ser, obviamente, referidos al nuevo origen de coordenadas.

Hay que recordar, al introducir una K_V impuesta, que ésta tiene signo (positivo para acuerdos cóncavos y negativo para convexos). En el caso de rasante uniforme ($K_V = \infty$), basta con poner EEX99.

En la fase de introducción de datos (x_i, z_{Ti}), hay que recordar que debe haber al menos 3 para definir una parábola.

El esquema representado en la Figura 1 permite la realimentación de datos, p. ej. si el K_V hallado no resultara satisfactorio.

Figura 2.



APROXIMACION DE PERFILES LONGITUDINALES POR MINIMOS CUADRADOS

9. EJEMPLO

Se carga el programa 1 y, tras inicializar, se introducen los datos correspondientes al conjunto de

9 puntos siguientes:

65.45 ENT1
 .274 65B4
 89.49 ENT1
 .398 65B4
 109.49 ENT1
 .678 65B4
 129.45 ENT1
 1.033 65B4
 149.49 ENT1
 1.520 65B4
 169.49 ENT1
 2.056 65B4
 189.49 ENT1
 2.807 65B4
 209.49 ENT1
 3.835 65B4
 229.49 ENT1
 5.092 65B4

Si no se introducen más limitaciones, la parábola de mínimos cuadrados correspondiente será la siguiente:

65B0
 1.264677340+00 ***
 A0
 -2.624892489-02 ***
 A1
 1.850813615-04 ***
 A2
 2.701514598+03 ***
 K

Su parámetro es 2 701,515 m. Si deseamos que el parámetro sea, por ejemplo, 3.500 m, se obtienen otros A0 y A1 correspondientes a la condición de

3500. 65B0
 4.326808750-01 ***
 A0
 -1.362476185-02 ***
 A1
 1.428571429-04 ***
 A2
 3.499999999+03 ***
 K

Supongamos que ahora deseamos, además, que sea tangente a otra parábola. Se carga el programa 2 y se introducen los datos de esta parábola

-1.354 ENT1
 1.252091693-02 ENT1
 -4.657608954-05 65B4
 a2
 a1
 a0

Si no se impone el parámetro, se pulsa la tecla B y se carga el programa 4, que arroja las siguientes X0 posibles

65B6
 1.09
 107.734 ***
 Imaginarias
 39.041 ***
 208.154 ***
 Reales
 83.832 ***

Se elige $x_0 = 83,832$ y se vuelve a cargar el programa 2. La solución es ahora

83.832 65B0
 1.276374122+00 ***
 A0
 -2.637530700-02 ***
 A1
 1.854130312-04 ***
 A2
 2.696682087+03 ***
 K

Con un parámetro de 2.696,682 m. Si se desea que el parámetro sea 3 500 m. Se introduce este dato y se pulsa la tecla C; a continuación se carga el programa 4, que arroja las siguientes X0 posibles

65B6
 71.674 ***
 Reales
 0.000 ***
 Imaginarias
 1.09
 188.398 ***
 63.262 ***

Se desprecia la 0,000 (se trata de una ecuación de 3er grado) y se elige $x_0 = 71,674$, cargando el programa 2 otra vez, lo que da la solución

71.674 65B0
 6.191420833-01 ***
 A0
 -1.463375794-02 ***
 A1
 1.428571468-04 ***
 A2
 3.500034204+03 ***
 K

Si, en cambio, se desea que sea tangente a otra parábola más, se carga el programa 3 y se introducen los datos correspondientes a las dos parábolas

-1.354 ENT1
 1.252091693-02 ENT1
 -4.657608954-05 65B4
 -16.307 ENT1
 12.26786502-02 ENT1
 -1.262564308-04 R/S

APROXIMACION DE PERFILES LONGITUDINALES POR MINIMOS CUADRADOS

Si no se impone el parámetro, se pulsa la tecla B y se carga el programa 4, que arroja las siguientes x_0 posibles

	GSBe	
Reales	89.643 ***	
	0.000 ***	
	1.+09	
Imaginarias	133.955 ***	
	29.543 ***	

Se desprecia la 0,000 (se trata de una ecuación de 3er grado) y se elige $x_0 = 89,643$, cargando el programa 3 otra vez, lo que da la solución

	89.643 GSBD	
X_1	2.306596362+02 ***	
A_0	1.711056942+00 ***	
A_1	-3.355199322-02 ***	
A_2	2.104038763-04 ***	
K_v	2.376382074+03 ***	

Con un parámetro de 2 376,382 m. Si se desea que el parámetro sea 2 500 m, se introduce este dato

2500. GSBC
 A_2 2.000000000-04 ***

y se carga el programa 4, que arroja las siguientes x_0 posibles

GSBe

	0.000 ***
	0.000 ***
	1261.969 ***
	86.675 ***

Se desprecian las 0,000 (se trata de una ecuación de 2.º grado) y se elige $x_0 = 86,675$, cargando de nuevo el programa 3 se obtiene la solución

86.675 GSBD

X_1	2.329004205+02 ***
A_0	1.498416588+00 ***
A_1	-3.022304818-02 ***
A_2	2.000000000-04 ***
K_v	2.500000000+03 ***

Se representa gráficamente al conjunto de soluciones en la Figura 2.

Program Listing

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
001	*LEB	21 14		057	STO1	35 46		113	F+5	16 51		159	STOB	35 12		161	LSTN	16 62	
002	GBEA	23 16 12		058	RCL7	36 03		114	RTN	24		160	LSTN	16 62		162	LSTN	16 62	
003	STOB	35 11		059	RCL9	36 05		115	*LEB2	21 02		171	X	-35		172	X	-35	
004	F+5	16 51		060	GBE2	23 02		116	*LEB2	16 26 46		172	F+5	16 51		173	F+5	16 51	
005	RCL3	36 09		061	RCL4	36 04		117	RCL4	36 45		173	RCLB	36 12		174	RCLB	36 12	
006	RCL7	36 07		062	RCL6	36 06		118	*LEB3	21 03		174	F07	16 23 06		175	F07	16 23 06	
007	RCL5	36 05		063	GBE2	23 02		119	X	-35		175	CHS	35 55 02		176	CHS	35 55 02	
008	RCL6	36 06		064	RCL7	36 07		120	X	-35		176	ST+3	35 55 02		177	ST+3	35 55 02	
009	X2	53		065	X2	53		121	+	-59		177	R4	-21		178	R4	-21	
010	-45	36 06		066	RCL8	36 08		122	FTN	24		178	F07	16 23 06		179	F07	16 23 06	
011	FTN	16 23 07		067	X	-35		123	*LEB1	21 01		179	CHS	35 55 02		180	CHS	35 55 02	
012	0791	22 01		068	+	-35		124	STOB	35 06		180	ST+2	35 55 02		181	ST+2	35 55 02	
013	RCL2	36 02		069	CHS	-22		125	RCL4	36 04		181	R4	-21		182	R4	-21	
014	X	-35		070	078	80		126	RCL7	36 07		182	F07	16 23 06		183	F07	16 23 06	
015	RCL7	36 07		071	STO1	35 46		127	GBE4	23 04		183	CHS	35 55 02		184	CHS	35 55 02	
016	3	03		072	R4	-21		128	RCL7	36 07		184	ST+1	35 55 02		185	ST+1	35 55 02	
017	Y	31		073	RCL6	36 06		129	X	-35		185	F+5	16 51		186	F+5	16 51	
018	-45	36 05		074	RCL7	36 07		130	RCL8	36 08		186	F29	16 23 07		187	F29	16 23 07	
019	FLI3	36 03		075	GBE2	23 02		131	RCL8	36 08		187	RTN	24		188	RTN	24	
020	X8	53		076	RCL8	36 08		132	GBE4	23 04		188	*LEB6	21 16 12		189	*LEB6	21 16 12	
021	RCL9	36 09		077	RCL9	36 09		133	RCL6	36 06		189	X	-35		190	X	-35	
022	X	-35		078	GBE2	23 02		134	X	-35		191	1/X	52		192	1/X	52	
023	-45	36 04		079	RCL4	36 04		135	-	-45		192	FTN	24		193	FTN	24	
024	FLI3	36 03		080	RCL7	36 07		136	GBE6	23 06		193	LELE	21 16 11		194	LELE	21 16 11	
025	RCL6	36 06		081	GBE2	23 02		137	RCL6	36 06		194	*LEB4	16 53		195	*LEB4	16 53	
026	X8	53		082	GBE6	23 06		138	RCL3	36 03		195	DLK6	16 53		196	DLK6	16 53	
027	RCL7	36 07		083	GBE6	23 06		139	GBE4	23 04		196	F+5	16 51		197	F+5	16 51	
028	GBE3	23 03		084	5	65		140	GBE4	23 04		197	RCL6	36 06		198	RCL6	36 06	
029	LSTN	16 62		085	STO1	35 46		141	RCL5	36 05		198	STO	16 21 06		199	STO	16 21 06	
030	+	-55		086	5	85		142	RCL5	36 05		199	GBE8	23 08		200	GBE8	23 08	
031	STOB	35 00		087	RCL1	36 01		143	X	-35		200	OF0	16 22 00		201	OF0	16 22 00	
032	8	80		088	RCL4	36 04		144	RCL4	36 04		201	RTN	24		202	RTN	24	
033	STO1	35 46		089	RCL7	36 07		145	RCL7	36 07		202	*LELE	21 15		203	*LELE	21 15	
034	RCL7	36 07		090	GBE2	23 02		146	GBE4	23 04		203	DLK6	16 53		204	DLK6	16 53	
035	RCL7	36 07		091	RCL4	36 04		147	GBE4	23 04		204	F+5	16 51		205	F+5	16 51	
036	GBE2	23 02		092	RCL7	36 07		148	-	-45		205	RTN	24		206	RTN	24	
037	GBE2	23 02		093	GBE2	23 02		149	RCL6	36 06		206	*LEB6	21 06		207	*LEB6	21 06	
038	RCL6	36 06		094	RCL5	36 05		150	GBE6	23 06		207	RCL6	36 06		208	RCL6	36 06	
039	RCL3	36 03		095	CHS	-22		151	STO5	22 05		208	RTN	24		209	RTN	24	
040	RCL4	36 04		096	5	85		152	*LEB5	21 04		209	RTN	24		210	RTN	24	
041	GBE2	23 02		097	STO1	35 46		153	RCL4	36 11									
042	CHS	-22		098	R4	-31		154	X	-35									
043	CHS	-22		099	RCL3	36 03		155	-	-45									
044	STO1	35 46		100	RCL4	36 04		156	RTN	24									
045	R4	-31		101	GBE2	23 02		157	*LEB4	21 11									
046	RCL3	36 03		102	RCL1	36 01		158	X+	56									
047	RCL6	36 06		103	RCL9	36 09		159	*LEB6	21 06									
048	GBE2	23 02		104	GBE2	23 02		160	CLX	-51									
049	RCL4	36 04		105	GBE2	23 02		161	LSTN	16 63									
050	RCL7	36 07		106	RCL7	36 07		162	LSTN	16 63									
051	GBE2	23 02		107	GBE2	23 02		163	Y2Y	-41									
052	RCL7	36 07		108	GBE2	23 02		164	X	-35									
053	RCL6	36 06		109	*LEB5	21 05		165	LSTN	16 63									
054	RCL6	36 06		110	GBE6	23 06		166	ENT+	-21									
055	GBE6	23 06		111	RCL7	36 07		167	FTN	54									
056	GBE6	23 06		112	SPC	16 11		168	X	-35									

REGISTERS

LABELS

FLAGS

SET STATUS

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Program Listing

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
001	100	35 11		057	RCLC	36 13		113	6582	23 02		189	RTN	-14	
002	100	35 11		058	3	03		114	RCLR	36 11		190	*LRL2	21 02	
003	100	35 11		059	6584	23 04		115	RCLL	36 00		191	1521	16 26 46	
004	100	35 11		060	RCL3	36 03		116	+	-24		192	STO1	35 45	
005	100	35 04		061	RCLB	36 12		117	RCL7	36 07		193	*LRL1	21 01	
006	100	35 14		062	2	02		118	3	03		194	RTN	24	
007	100	35 14		063	CHS	-22		119	x	-35		195	1521	16 26 46	
008	100	35 06		064	6584	23 04		120	-	-55		196	RCL7	36 45	
009	100	35 06		065	6582	23 02		121	6582	23 02		197	RTN	-14	
010	100	35 06		066	RCL6	36 06		122	RCL6	36 06		198	*LRL4	21 04	
011	100	35 06		067	RCLC	36 13		123	3	03		199	x	-35	
012	100	35 06		068	x	-35		124	x	-35		200	*LRL0	21 00	
013	100	35 06		069	RCL3	36 03		125	CHS	-22		201	RTN	24	
014	100	35 06		070	RCLA	36 11		126	6582	23 02		202	1/4	52	
015	100	35 06		071	6583	23 03		127	RCL9	36 09		203	RTN	24	
016	100	35 06		072	3	03		128	6582	23 02		204	*LRL4	21 04	
017	100	35 06		073	x	-35		129	STO5	22 05		205	x	-35	
018	100	35 04		074	6582	23 02		130	*LRL0	21 14		206	*LRL3	21 03	
019	100	35 11		075	RCL9	36 09		131	F43	16 51		207	x	-35	
020	100	35 00		076	RCLC	36 13		132	STO5	35 05		208	RTN	24	
021	100	35 00		077	x	-35		133	3	03		209	x	-35	
022	100	35 06		078	RCL7	36 07		134	YK	31		210	RTN	24	
023	100	35 06		079	RCLA	36 11		135	RCL9	36 09					
024	100	35 06		080	3	03		136	x	-35					
025	100	35 06		081	6584	23 04		137	RCL5	36 05					
026	100	35 06		082	RCL6	36 06		138	x	53					
027	100	35 06		083	RCLB	36 12		139	RCL6	36 06					
028	100	35 06		084	2	02		140	3	03					
029	100	35 12		085	CHS	-22		141	6584	23 04					
030	100	35 12		086	6584	23 04		142	RCL5	36 05					
031	100	35 06		087	CHS	-22		143	RCL7	36 07					
032	100	35 06		088	6582	23 02		144	3	03					
033	100	35 06		089	RCL5	36 05		145	CHS	-22					
034	100	35 06		090	RCLB	36 12		146	6584	23 04					
035	100	35 06		091	x	-35		147	RCL3	36 03					
036	100	35 06		092	RCL6	36 06		148	-	-45					
037	100	35 06		093	RCLA	36 11		149	RCLB	36 12					
038	100	35 13		094	6583	23 03		150	RCL5	36 05					
039	100	35 13		095	6582	23 02		151	RCLA	36 11					
040	100	35 13		096	*LRL5	21 05		152	6583	23 03					
041	100	35 13		097	F43	16 51		153	YK	-41					
042	100	35 13		098	RTN	24		154	+	-24					
043	100	35 13		099	RTN	24		155	STO8	35 08					
044	100	35 13		100	F43	16 51		156	RCL5	36 05					
045	100	35 06		101	6586	23 06		157	x	53					
046	100	35 06		102	RCL6	36 06		158	x	-35					
047	100	35 06		103	3	03		159	F43	16 51					
048	100	35 06		104	STO8	35 08		160	RCL9	36 09					
049	100	35 06		105	6580	23 00		161	+	-55					
050	100	35 12		106	6582	23 02		162	FRX	-14					
051	100	35 12		107	RCLB	36 12		163	RCLD	36 14					
052	100	35 02		108	RCL0	36 00		164	F43	16 51					
053	100	35 02		109	+	-24		165	RCL5	36 05					
054	100	36 11		110	RCL3	36 03		166	RCL8	36 08					
055	100	35 06		111	+	-55		167	2	02					
056	100	36 07		112	CHS	-22		168	6584	23 04					

REGISTERS

0	a0	1	a1	2	a2	3	4	5	6	7	8	9	a0	A	DAT	B	IN	C	KU	D	SUB	E
S0	M*	S1	+	S2	E	S3	D	S4	F	S5	X	S6	B	S7	C	S8	G	S9	A			
A	R	B	S	C	T	D	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U

SET STATUS

ON	OFF	TRIG.	DISP
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0	1	DEG	FIX
1	2	GRAD	SCI
2	3	RAD	ENG
3	3		

Program Listing

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
001	*BLEB	21 11		113	R*Y	-4		165	*BLT	23 07		0			
002	STOE	39 02		114	STOE	35 06		170	R*Y	-41		1			
003	STOE	39 15		115	+	-24		171	+	-24		2			
004	R4	-31		116	RCL4	36 04		172	F29	16 23 02		3			
005	STO1	35 01		117	-	-45		173	RCL0	36 06		4			
006	STO0	39 14		118	65866	23 06		174	STO1	39 46		5			
007	R4	-31		119	65862	23 02		175	RCL5	36 05		6			
008	STO0	35 00		120	65862	23 02		176	RCL5	36 05		7			
009	STO9	35 09		121	R4	-31		177	X	-35		8			
010	F*5	16 51		122	R4	-31		178	F*5	16 51		9			
011	65880	23 00		123	65862	23 02		179	RCL5	36 09		0			
012	RCL3	36 09		124	RCL8	36 08		180	F*5	16 51		1			
013	65881	23 01		125	CH5	-22		181	+	-55		2			
014	RCL6	36 06		126	65862	23 02		182	PRX	-14		3			
015	65881	23 01		127	RCL1	36 01		183	FIELD	36 14		4			
016	RCL7	36 07		128	CH5	-22		184	RCL5	36 05		5			
017	65881	23 01		129	CH5	-22		185	RCL1	36 05		6			
018	RCL4	36 04		130	F*5	16 51		186	RCL1	36 05		7			
019	-45			131	PTN	24		187	65884	23 02		8			
020	STO4	35 11		132	*BLEB	21 14		188	PRX	-14		9			
021	65880	23 00		133	F*5	16 51		189	RCL5	36 15		0			
022	RCL6	36 06		134	STOE	39 05		190	RCL1	36 05		1			
023	65881	23 01		135	RCL8	36 08		191	+	-55		2			
024	RCL7	36 07		136	X	-35		192	PRX	-14		3			
025	65881	23 01		137	RCL4	36 04		193	*BLEB	21 05		4			
026	RCL3	36 03		138	2	02		194	2	02		5			
027	65881	23 01		139	65863	23 03		195	X	-35		6			
028	RCL8	36 08		140	RCL8	36 08		196	1/X	52		7			
029	-45			141	RCL5	36 05		197	PRX	-14		8			
030	STO8	35 12		142	RCL1	36 01		198	PTN	24		9			
031	65880	23 00		143	65863	23 03		199	*BLE4	21 04		0			
032	RCL7	36 07		144	143	65863	23 03	200	X	-35		1			
033	65881	23 01		145	+	15-67		201	*BLE7	21 07		2			
034	RCL2	36 02		146	RCL5	36 05		202	CH5	-22		3			
035	65881	23 01		147	CH5	-22		203	6705	22 03		4			
036	RCL2	36 02		148	+	-14		204	*BLE2	21 02		5			
037	65881	23 01		149	PRX	-14		205	1521	16 26 46		6			
038	RCL1	36 01		150	3	03		206	9701	35 45		7			
039	CH5	-22		151	151	31		207	PTN	24		8			
040	STO6	35 13		152	RCL9	36 09		208	*BLE1	21 01		9			
041	R*5	51		153	%	35		209	1521	16 26 46		0			
042	RCL5	36 11		154	RCL5	36 05		210	RCL1	36 45		1			
043	-45			155	155	53		211	*BLE3	21 03		2			
044	STO1	35 01		156	RCL6	36 06		212	X	-35		3			
045	R4	-31		157	3	03		213	+	-55		4			
046	RCLD	36 14		158	65864	23 04		214	PTN	24		5			
047	-45			159	RCL5	36 05		215	*BLE0	21 00		6			
048	STO8	35 08		160	RCL7	36 07		216	9	89		7			
049	R4	-31		161	3	03		217	STO1	35 45		8			
050	65881	23 01		162	CH5	-22		218	0	86		9			
051	RCL3	36 03		163	65864	23 04		219	RTH	24		0			
052	F*5	16 51		164	RCL3	36 03		220		24		1			
053	-45			165	RCL5	36 12						2			
054	STO4	35 04		166	RCL5	36 05						3			
055	RCL1	36 01		167	RCL5	36 05						4			
056	X	-35		168	RCL8	36 11						5			

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
0	a ₀	a ₁		5	DATA		
1	S1	a ₂		6	UONE		
2	S2	E		7	K ₁ *		
3	S3	D		8	DATA		
4	S4	F ₁ -A ₀		9	DATA		
5	S5	X ₀		0	DATA		
6	S6	B		1	UONE		
7	S7	C		2	DATA		
8	S8	G ₁ -A ₁		3	DATA		
9	S9	A		4	DATA		
10	S10			5	DATA		
11	S11			6	DATA		
12	S12			7	DATA		
13	S13			8	DATA		
14	S14			9	DATA		
15	S15			0	DATA		
16	S16			1	DATA		
17	S17			2	DATA		
18	S18			3	DATA		
19	S19			4	DATA		
20	S20			5	DATA		

FLAGS	SET STATUS	DISP
ON/OFF	TRIG	FIX
DEG	TRIG	SCI
GRAD	TRIG	ENG
RAD	TRIG	DISP

Program Listing

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
001	*LEL8	21 16 15		067	*Y	-41		113	6365	23 85	
002	*SFC	16-11		068	LSTX	16-33		114	6366	23 86	
003	RCL4	36 04		069	+	-55		115	6707	22 07	
004	1/X	52		070	6661	23 01		116	*LEL5	21 05	
005	67X8	35-35 08		071	*Y	-41		117	RCL3	36 03	
006	67X4	35-35 01		072	6661	23 01		118	X	-35	
007	67X2	35-35 02		073	+	-55		119	RCL1	36 01	
008	67X3	35-35 03		074	2	02		120	-	-45	
009	67X4	35-35 04		075	+	-54		121	RCL5	36 05	
010	RCL3	36 03		076	6702	22 02		122	4		
011	RCL1	36 01		077	*LEL1	21 01		123	X	-35	
012	X	-35		078	X*07	16-05		124	+	-24	
013	RCL8	36 08		079	SF2	16 21 02		125	RTN	24	
014	4			080	463	16 31		126	*LEL4	21 04	
015	X	-35		081	3	03		127	RCL2	36 02	
016	-	-45		082	1/X	52		128	RCL5	36 05	
017	3	03		083	YX	31		129	X	-35	
018	+	-24		084	F29	16 23 02		130	+	-35	
019	ST05	35 05		085	CHS	-22		131	+	-35	
020	RCL2	36 02		086	RTN	24		132	4		
021	X	-35		087	*LEL0	21 00		133	+	-24	
022	LSTX	16-62		088	R4	16-31		134	RCL3	36 03	
023	4			089	*Y	-41		135	4		
024	X	-35		090	X	-35		136	+	-24	
025	RCL3	36 03		091	X	-35		137	6666	23 06	
026	X	-35		092	SIN	41		138	ST07	35 07	
027	X	-35		093	6	06		139	R4	-31	
028	X	-35		094	+	-24		140	CHS	-22	
029	X	-35		095	6	06		141	6666	23 06	
030	RCL1	36 01		096	6	06		142	*LEL7	21 07	
031	X	-35		097	-	-45		143	6669	23 09	
032	X	-35		098	SIN	41		144	RCL8	36 08	
033	+	-24		099	RCL7	36 07		145	RCL7	36 07	
034	X	-35		100	X	-35		146	CHS	-22	
035	ST05	35 05		101	X	-35		147	6666	23 06	
036	X	-35		102	*LEL2	21 02		148	*LEL9	21 09	
037	+	-24		103	RCL6	36 06		149	PRTX	-14	
038	X	-35		104	2	02		150	R4	-31	
039	X	-35		105	+	-24		151	PRTX	-14	
040	X	-35		106	ST05	35 05		152	SFC	16-11	
041	X	-35		107	CHS	-22		153	RTN	24	
042	-	-45		108	CHS	-22		154	*LEL6	21 06	
043	ENT1	-21		109	ST06	35 06		155	ST06	35 06	
044	X	-35		110	X	-35		156	X	-35	
045	RCL6	36 06		111	RCL0	36 00		157	*LEL3	21 03	
046	X	-35		112	X*Y?	16-34		158	-	-45	
047	RCL5	36 05		113	RCL0	36 00		159	X*07	16-44	
048	-	-45		114	X*Y	-41		160	6708	22 08	
049	ST07	35 07		115	6663	23 03		161	CHS	-22	
050	X	-35		116	106	ST08	35 08	162	X	-35	
051	X	-35		117	X*Y?	16-33		163	X	-35	
052	X*Y?	16-34		118	6704	22 04		164	X*Y	-41	
053	6708	22 08		119	ST+5	35-55 05		165	-	-45	
054	-	-45		120	6665	23 05		166	RCL6	36 06	
055	X	-35		121	ST07	35 07		167	LSTX	16-63	
056	-	-45		122	R4	-31		168	+	-55	

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

LABELS

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9

SET STATUS

ON OFF	TRIG	DISP
0	1	2
3	4	5

FLAGS

DEG	GRAD	RAD
0	1	2
3	4	5

KEY CODE

23 85	23 86	22 07	21 05	36 03	-35	-45	36 05	36 05	36 06	36 07	36 08	36 09	36 10	36 11	36 12	36 13	36 14	36 15	36 16	36 17	36 18	36 19	36 20	36 21	36 22	36 23	36 24	36 25	36 26	36 27	36 28	36 29	36 30	36 31	36 32	36 33	36 34	36 35	36 36	36 37	36 38	36 39	36 40	36 41	36 42	36 43	36 44	36 45	36 46	36 47	36 48	36 49	36 50	36 51	36 52	36 53	36 54	36 55	36 56	36 57	36 58	36 59	36 60	36 61	36 62	36 63	36 64	36 65	36 66	36 67	36 68	36 69	36 70	36 71	36 72	36 73	36 74	36 75	36 76	36 77	36 78	36 79	36 80	36 81	36 82	36 83	36 84	36 85	36 86	36 87	36 88	36 89	36 90	36 91	36 92	36 93	36 94	36 95	36 96	36 97	36 98	36 99
-------	-------	-------	-------	-------	-----	-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

COMMENTS

165	RTN	24	
170	*LEL8	21 08	
171	X	-35	
172	RCL6	36 06	
173	EER	-23	
174	5	05	
175	PRTX	-14	
176	R4	-31	
177	RTN	24	
178	*LELA	21 11	
179	SFC	16-11	
180	CLRC	16-57	
181	670A	22 16 11	
182	*LELE	21 15	
183	RCL1	36 01	
184	ST06	35 06	
185	X*Y	-41	
186	*LELD	21 14	
187	RCL2	36 02	
188	ST01	35 01	
189	X*Y	-41	
190	*LELC	21 13	
191	RCL3	36 03	
192	ST02	35 02	
193	X*Y	-41	
194	*LELE	21 12	
195	RCL4	36 04	
196	ST03	35 03	
197	X*Y	-41	
198	*LELE	21 16 11	
199	ST04	35 04	
200	PRTX	-14	
201	RTN	24	

COMMENTS

210			
220			