

Interacción estática suelo-estructura. Modelos de suelos empleados

Por JAIME SANTOS MIÑÓN

Cátedra de Geotecnia.

Todas las obras de la Ingeniería Civil y de la Arquitectura se construyen apoyándose en el suelo o en la roca y las cargas que éstos transmiten a la base de apoyo, se realiza por medio de zapatas, vigas o losas (no se considera aquí el caso general de los pilotes).

Estos últimos tipos de cimentación (vigas y losas) se emplean generalmente en estructuras que transmiten grandes cargas, o bien que se apoyan en suelos relativamente blandos. También se usan en determinados tipos singulares de estructuras tales como piscinas, diques secos, etc. Otro campo de aplicación es el de la asimilación de determinadas obras de la ingeniería a estos tipos de cimentación mencionados. Tal es el caso, por ejemplo, de los elementos flexibles de contención o el de los pilotes sometidos a esfuerzos horizontales que se asimilan, sobre todo, para el estudio de deformación, a vigas bien en estado de deformación plana, bien en estado tridimensional.

La primera dificultad que aparece al intentar encontrar la solución de estos problemas es la determinación de la presión de contacto o reacción del terreno, que se produce en el plano de unión de tales elementos de cimentación y el suelo. Este problema presenta una dificultad considerable, pues las condiciones de contorno del problema se expresan en tensiones y deformaciones. Esto ha dado lugar a que en gran parte de la bibliografía sobre el tema se le denomine problema mixto, al no poder resolverlo por los métodos usuales en la teoría de la elasticidad, ya que éstos se realizan en tensiones o en deformaciones y no en estados mixtos.

Por último, se tiene una dificultad complementaria al querer considerar la rigidez de la estructura, que emplea dicho elemento como medio de transmisión de sus cargas al suelo, en la determinación de la rigidez real de dicho elemento. Existen indudablemente soluciones en este camino pero se puede decir que están aún en una fase preparatoria.

Es un hecho innegable que la solución de este problema tiene una gran importancia práctica, pues sólo de esta manera podemos conocer con una cierta precisión los esfuerzos que realmente se producen en estos elementos de cimentación y los esfuerzos que las deformaciones de éstos producen

en la estructura a la que sirven de apoyo, así como la posible redistribución de esfuerzos que los asentamientos diferenciales de las diversas partes de la estructura producen en ésta. Al mismo tiempo, estos conocimientos son la base lógica para un proyecto racional y óptimo de dichos elementos proporcionando un conocimiento más real de la auténtica distribución de los coeficientes de seguridad empleados.

Como dicen Gorbunov-Posadov (1947) y G. Sherif (1975) los elementos de cimentación calculados por cualquiera de los procedimientos simplificados, que se usan normalmente, se comportan también de forma satisfactoria. Sin embargo, es necesario añadir que este mejor conocimiento permite una mejor adecuación del elemento que se proyecta a los esfuerzos que realmente van a incidir en éstos, lo que repercute en una cierta economía de proyecto, sin que por eso disminuya la seguridad obtenida, antes al contrario, ésta se ve aumentada al encontrarse reforzada aquella zona que realmente va a tener mayores esfuerzos.

A título de ejemplo baste indicar que una losa circular proyectada para servir de elemento de cimentación de un silo se calculó por procedimientos simplificados y en el supuesto de que se apoyaba en un suelo elástico lineal. Con un 50 por 100 de la armadura determinada por el primer procedimiento y con un canto algo menor se logró una cimentación adecuada al problema que se tenía, con una notable economía.

Finalmente, y como una señal más del interés que este problema despierta, baste con señalar que el libro de A. P. S. Selvadurai publicado por Elsevier en este año con el título «Análisis elástico de la interacción suelo-cimentación» que contempla sólo tres modelos de suelo incluye una bibliografía de más de mil referencias.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CONTACTO

El problema de contacto estudia el caso cuando en el contorno de un cuerpo existen un número de regiones (1) en cada una de las cuales se dan las condiciones de contacto.

Estas condiciones se pueden reducir a dos:

- Igualdad de deformaciones entre los dos cuerpos en la zona en contacto.
- La presión de contacto que se produce entre los cuerpos, o reacción del uno sobre el otro, ha de ser tal que la deformación inducida por estas tensiones cumpla la primera condición o condición de deformación.

Actualmente existen una gran cantidad de investigadores del problema de contacto en la técnica de la construcción de máquinas y cuyas realizaciones han pasado posteriormente a la técnica de cimentaciones. Pero es este segundo campo de aplicación el que nos interesa.

Las principales etapas en la solución del problema de contacto son dos: en primer lugar es necesario conocer la presión de contacto entre la base de apoyo y la cimentación, y en segundo lugar se han de conocer las deformaciones (asientos) inferidos.

En el origen del tratamiento de este problema mixto se encuentran los trabajos de H. Hertz (1882 y 1884), de J. Boussinesque (1885) y los de E. Winkler (1867) y H. Zimmerman (1888), a finales del siglo pasado, y ya en este siglo los de M. A. Sadowsky (1928) y H. Borowicka (1936).

Planteamiento general.

En su forma más general el problema puede plantearse en cuatro problemas básicos; dos problemas de dos dimensiones, y dos problemas de planteamiento análogo, pero en estado tridimensional.

Para el enunciado en los problemas en dos dimensiones (estado plano) hemos de considerar una región del plano definida por las siguientes condiciones:

$$-\infty < X_1 < \infty \quad ; \quad 0 \leq X_2 \leq h$$

y que se apoya en una base rígida indeformable que en el caso de no estar en el infinito se considera como uno de los ejes, o sea, $X_2 \equiv 0$.

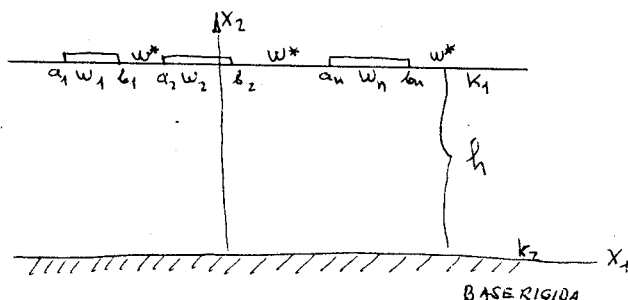


Figura 1.

El borde superior de la región $X_2 \equiv h$ estará limitada inferiormente por la línea K_1 y el borde inferior de la región $X_2 \equiv 0$ por la línea K_2 (fig. 1).

Sean w_i ciertas regiones de K_1 con límites a_i, b_i donde se definen las condiciones de contacto. En K_1 se da, pues, el sistema discontinuo $W = \sum_{k=1}^N w_k$.

Denominamos además $w^* = K_1/w$, o sea, aquellas regiones de K_1 que no pertenecen al conjunto W . Podemos ahora plantear dos problemas distintos en cada región así definida.

a) La región tiene enlaces rugosos con la base no deformable a lo largo de la recta K_2 . En toda la recta K_2 se dan, pues, las tensiones tangenciales. En la recta K_1 y de ésta en las regiones w_i se dan los desplazamientos normales y en las regiones w^* se dan las tensiones normales. El problema, pues, se contempla como el típico caso plano.

b) La región anteriormente definida se apoya sobre una base indeformable pero sin enlaces rugosos con ésta. En todo el contorno K_1 existen las mismas condiciones que en el problema a). En el contorno K_2 no existe la definición de las tensiones tangenciales.

En forma análogo, pero teniendo en cuenta las tres dimensiones del espacio, se pueden plantear los dos problemas espaciales.

El planteamiento de las ecuaciones que estas condiciones plantean dependen del modelo de suelo que se considere.

PRINCIPALES MODELOS DE SUELOS

Creo que es interesante recordar aquí la diferencia que ya indicara Terzaghi en su libro «Mecánica teórica de los suelos» que existe entre el suelo real y el suelo ideal.

Debido precisamente a la complejidad del comportamiento del suelo real para los estudios de interacción del suelo y la estructura, en cuya base se encuentra el problema de contacto, los diversos investigadores del problema han empleado una gran variedad de suelos ideales, o sea, de modelos teóricos concretados por la expresión matemática de la relación carga-asiento.

Para evitar una extensión excesiva del artículo no consideramos aquí aquellos modelos que tienen una cierta dependencia del tiempo, como pueden ser los modelos basados en la plasticidad acrónica y de los modelos reológicos.

La diversidad de modelos que vamos a considerar la hemos subdividido en tres grandes grupos (figura 2):

- Modelos que se apoyan en el coeficiente de balasto.
- Modelos que se apoyan en la teoría de la elasticidad.
- Modelos mixtos.

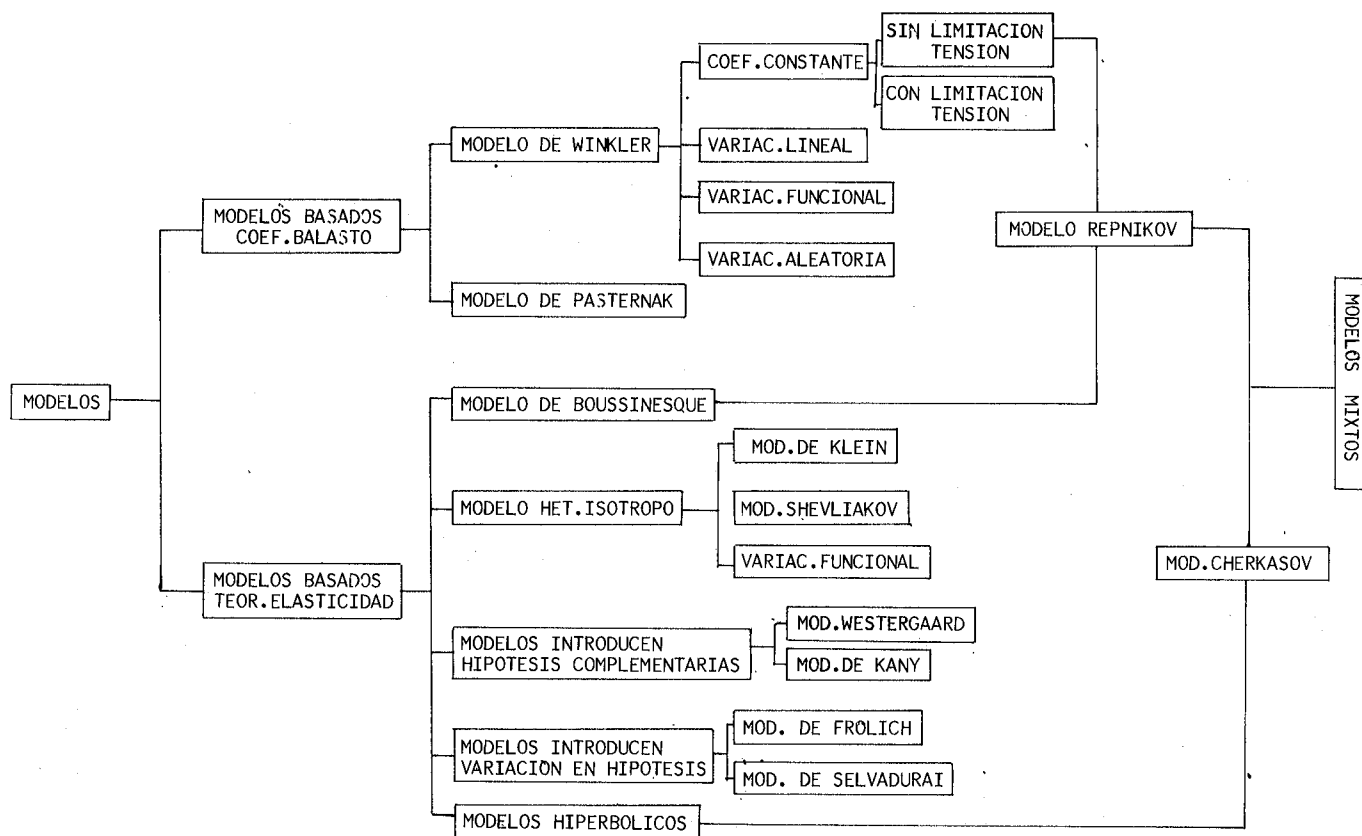


Fig. 2.—Modelos de suelos.

MODELOS QUE SE DEFINEN A PARTIR DEL COEFICIENTE DE BALASTO

Como inicio de los modelos de este grupo tenemos los trabajos de E. Winkler que en 1867 en su tratado sobre elasticidad indicaba de forma clara las hipótesis básicas del método que ha dado en llamarse del coeficiente de balasto por haberse aplicado en principio al cálculo de las traviesas del ferrocarril.

Las principales soluciones de este modelo, al menos en cuanto a las vigas de longitud infinita se refiere, quedaron expresadas en el libro de H Zim-merman de 1888. Dichas soluciones son las actualmente empleadas como así consta en el libro de M. Hetenyi, «Beams on elastic foundation» de 1946.

Es interesante señalar la marcada aportación de N. N. Puzirieski en 1923 que en su tratado de construcción trató el problema de la viga que se apoya en un suelo elástico, tomando como modelo de suelo el de Winkler. En este trabajo resolvió por aplicación del método de las funciones iniciales el problema de la viga corta, o sea, de aquella viga en la cual la determinación de los esfuerzos producidos por las cargas a las que esta sometida vienen

determinados fundamentalmente por las condiciones existentes en los bordes.

La ecuación básica, o sea, la que expresa la dependencia de los asientos con la carga, en el método de Winkler es:

$$p = K b y$$

donde p es la reacción del terreno o presión de contacto, b el ancho de la viga y

$$K = \frac{p}{b y}$$

el coeficiente de balasto.

Este modelo que tiene la enorme ventaja de su sencillez, se aleja considerablemente del comportamiento real del suelo, hasta tal punto que sólo en algunos casos muy singulares se puede aplicar con una cierta precisión.

Buscando mantener esta sencillez e intentando lograr un mayor acercamiento al suelo real, numerosos investigadores han introducido variables que intentan mejorarlo. De entre los numerosos intentos existentes, uno de los más usados es aquel que

considera que el coeficiente de balasto varía de forma lineal con la longitud de la viga, o sea:

$$K = K_0 + C_x$$

Este modelo tuvo un fuerte apoyo en K. Terzaghi que lo propuso en su artículo crítico sobre el método del coeficiente de balasto publicado en *Geotechnique* en 1955 como solución para encontrar las deformaciones y esfuerzos en los elementos flexibles de contención y en los pilotes sometidos a esfuerzos horizontales. Este modelo es oficial en la URSS para estos casos y ha sido resuelto mediante el empleo de las funciones iniciales iniciado por Puzirieski.

En esta línea se encuentra el modelo de D. N. Sobolev (1963) que supone que el coeficiente de balasto varía bajo la cimentación de acuerdo con una determinada función, o sea, que supone que:

$$K = K_0 + \varepsilon K^{(1)}(x)$$

donde K_0 es el valor medio del coeficiente de balasto bajo la viga y

$$\varepsilon K^{(1)}(x) = K(x)$$

es una función que indica la variación de dicho coeficiente respecto a su valor medio; es, pues, una función de distribución.

Este modelo ha sido ampliamente utilizado para el cálculo de la cimentación de edificios prefabricados por paneles. También se ha aplicado el cálculo de la cimentación de edificios que se apoyan en löess o suelos löessicos y con el fin de tener en cuenta el proceso de humectación de estos suelos, proceso que influye de forma determinante en los asentamientos que se producen. La aplicación en este caso ha sido realizada por A. A. Mustafaev (1978) de forma satisfactoria.

Dentro de esta línea, aunque siguiendo por otra vía, se encuentran los modelos que abandonando los sistemas deterministas toman los parámetros que definen el modelo del suelo elegido, como valores aleatorios. Como modelo de suelo, dada su gran sencillez, ha sido elegido el modelo de Winkler.

Quizá los primeros trabajos sobre el tema se encuentran en la publicación periódica «Mecánica de la construcción y cálculo de edificios» en el número 1 de 1965, con los temas presentados por V. V. Bolotin y D. N. Sobolev.

Con posterioridad el modelo planteado en estos trabajos ha ido adquiriendo un gran desarrollo, encontrándose soluciones concretas a diversos problemas. Dentro de esta línea están, además de los trabajos de los autores ya citados, los realizados por un grupo de la Universidad de Northwester, de

Illinois. De entre los trabajos de este último grupo tienen un notable interés los realizados por E. Alonso de 1974 y 1975.

Tanto V. P. Ignatov (1970) como E. Alonso se apoyan para la solución del problema de la viga en la misma ecuación diferencial, empleando un método análogo para su solución. Ignatov busca una solución numérica al problema variacional en forma matricial; Alonso, sin embargo, aplica las técnicas del suelo estocástico, tal como las describió en su trabajo de 1975. El modelo estocástico utilizado por Alonso es análogo al de Ignatov, o sea, el modelo de la función de autocorrelación es una exponencial decreciente que al parecer es el más aceptado en la bibliografía sobre el tema, puesto que es el que mejor se ajusta a los resultados experimentales.

Todos estos trabajos se apoyan en la hipótesis de una distribución normal o cuasi normal del parámetro estudiado. Ignatov considera que la autocovarianza puede expresarse mediante una función exponencial

$$K = D \exp(-\alpha |\Delta x|)$$

donde D es la varianza, K el parámetro estudiado y α un parámetro que depende del tipo de distribución.

La solución para la viga corta la encuentra Ignatov mediante la linearización de la ecuación para valores próximos a la esperanza matemática, siguiendo el método de las perturbaciones del problema variacional propuesto. Alonso, sin embargo, se apoya en la solución general de la viga infinita tal como la expone M. Hetenyi y sólo resuelve este caso.

La última tentativa dentro de este modelo, aunque quizá ya algo fuera de los límites que nos hemos marcado, ha sido la de imponer una limitación a las cargas transmitidas al terreno, creando así un modelo elastoplástico. Dentro de esta línea se encuentran los trabajos de S. N. Klepikov (1966).

(En estos modelos no se considera ningún flujo plástico acrónico, por lo que lo hemos introducido en este artículo.)

Aunque propiamente no es un modelo basado en el de Winkler, sin embargo, sí está definido a partir de éste. Por esta causa vamos a considerar aquí el modelo de P. L. Pasternak (1954). Para su definición Pasternak se basa en las dos hipótesis siguientes:

- Bajo la acción de una carga P se produce un desplazamiento vertical w proporcional a la intensidad de la carga.
- La variación de la deformada produce una tensión de corte que es también proporcional a ésta.

Con estas dos hipótesis se obtiene, de acuerdo con la notación indicada en la figura 3:

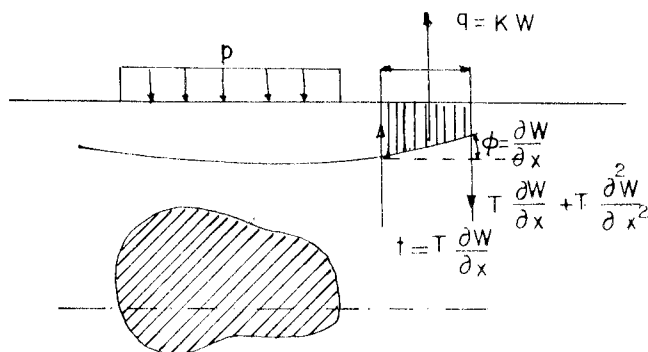


Figura 3.

que constituye la ecuación básica del modelo.

Debido a la existencia de las dos constantes K y T , donde la primera es totalmente análoga a la definida por Winkler y a la cual tiende al tender T a cero, a este modelo se le denomina también en el de los «dos coeficientes de balasto».

Actualmente el desarrollo de este modelo es bastante completo, pues se dispone de la solución completa de los siguientes casos:

- Vigas tanto en estado plano como tridimensional.
- Elementos con simetría axial.
- Algunos casos de losas de cimentación.

Basándose en métodos numéricos existe el planteamiento general tanto en elementos finitos como en diferencias finitas.

Sobre el estado actual de desarrollo de este modelo y con la aportación de numerosas soluciones prácticas existe una tesis doctoral de próxima lectura debida a J. Santos.

MODELOS QUE SE DEFINEN A PARTIR DEL SEMIESPACIO ELASTICO-LINEAL

En primer lugar se ha de señalar la labor realizada por Boussinesq (1885) al encontrar mediante la aplicación de la teoría de los potenciales la expresión general para la determinación del asiento producido por una carga concentrada en el contorno del semiespacio. Esta expresión unida a la encontrada por M. Flamant (1892) para el caso plano son los dos pilares en los que se apoyan las soluciones para el semiespacio elástico homogéneo.

La fórmula encontrada por Boussinesq es:

$$w = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \frac{P}{r}$$

y la encontrada por Flamant:

$$w = - \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} \frac{r}{d}$$

donde P es la carga, r es el radio vector, es decir, la distancia desde el punto de aplicación de la carga al punto cuyo asiento se quiere calcular, y d una cierta longitud.

Actualmente la solución práctica del cálculo de estos elementos basados en el modelo de Boussinesq ha sido realizada por M. I. Gorbunov-Posadov (1937, 1941). Para encontrar esta solución se apoyó en los trabajos realizados por L. S. Guilman (1934) y H. Borowicka (1936). Con la publicación de su libro «Cálculo de obras sobre bases elásticas» en el año 1973 podemos decir que el proceso de cálculo en este modelo de suelo ha alcanzado un nivel de desarrollo superior al que tienen los modelos que emplean el coeficiente de balasto.

Modelos elásticos heterogéneos isótropos.

El primer grupo que se presenta es el de aquellos suelos que tienen un comportamiento elástico lineal por capas, o sea, el de los suelos estratificados. Dentro de estos el caso más simple lo constituye el de la capa elástica sobre una base indeformable.

Este modelo, y tal como se indicó en la presentación, admite dos soluciones, según se considere la interfaz lisa o rugosa. Existen numerosas soluciones en este modelo para la distribución de las cargas en superficie, tanto para el caso de interfaz lisa como rugosa, pero sólo en el caso de cargas uniformes. Las únicas soluciones que existen en este caso para cimentaciones con rigidez variable, que sepa el autor, son las debidas a G. V. Krasheinnikova (1967) que por aplicación del método de B. N. Yemochkin (1947) tabuló diversas soluciones para el caso de base lisa, para lo cual se apoyó en la fórmula de O. Y. Shejter (1937). Posteriormente en 1973, y con el mismo sistema de cálculo, resolvió el caso de base rugosa aplicando la teoría de S. I. Iaglovski (1969).

Un modelo que en la actualidad se encuentra bastante desarrollado y que tiene un gran interés, por su gran aproximación a suelos reales, en una gran variedad de casos es el modelo de G. K. Klein (1956). Dicho modelo consiste en suponer que el módulo de deformación del suelo varía de acuerdo con la siguiente ley:

$$E = E_0 + E_n z^n$$

donde E_0 es el valor inicial del módulo para $z = 0$, E_n es el coeficiente que marca la variación del módulo con la profundidad, y n un índice de la heterogeneidad.

En este supuesto, Klein llega a determinar la relación básica para el cálculo de la deformación en superficie, obteniendo para una carga puntual de intensidad P la siguiente expresión:

$$w_0 = \frac{P}{\pi r (D_0 + D_n r^n)}$$

donde r es el radio vector o distancia del punto de aplicación de la carga al punto cuyo asiento se pretende determinar:

$$D_0 = \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2)} \quad D_n = \frac{2 E_n}{(3 + n) \left(\frac{1}{1 + n} - \nu_0 \right)}$$

Este modelo de suelo ha sido aplicado por A. E. Duraev (1976) a la solución del problema de la placa con una carga uniforme aplicada en un cuadrado de lado c , obteniendo unos resultados muy esperanzadores.

Este mismo modelo fue estudiado por R. E. Gibson (1967) quien plantea el modelo de suelo, estudiando la variación del módulo de cortante en profundidad en vez del módulo de deformación, pero tal como indica el propio Gibson es por una comodidad de cálculo. El trabajo de Gibson tenía entre otros el objeto de informar sobre este modelo de suelo que como el autor indica era debido a Klein, pero la dificultad de acceso a la bibliografía sobre el tema lo hacían desconocido en el mundo occidental.

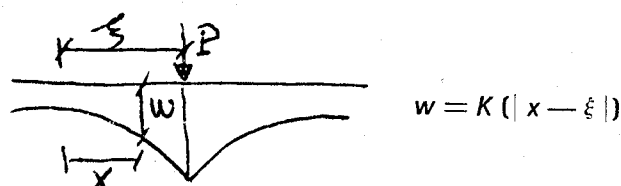
Y. A. Shevliakov (1977) estudia el caso de los suelos estratificados en diversos modelos de suelos, para lo cual emplea fundamentalmente dos métodos de cálculo. Por un lado, plantea determinados problemas mediante el método de las funciones iniciales expresando éste en forma matricial, lo que le permite encontrar la solución de diversos casos de heterogeneidad. En otros casos emplea el método que se denomina de las «Ecuaciones integrales duales». Pero su principal aportación es el estudio de aquellos tipos de suelos que tienen una variación sinusoidal del módulo de deformación o del módulo cortante con coeficiente de Poisson constante, con la profundidad, llegando en este caso a la determinación final del algoritmo que resuelve el problema, aplicándolo al caso de la placa circular rígida.

Esta variación sinusoidal del módulo de deformación con la profundidad constituye un caso particular de Imás general estudiado por Y. A. Naumov e Y. A. Shevliakov (1970) que estudian el caso de los suelos estratificados con variaciones de la heterogeneidad de las capas, en el espesor.

MODELOS QUE INTRODUCEN HIPOTESIS COMPLEMENTARIAS AL MODELO DE BOUSSINESQ

En el intento de encontrar la solución de nuestro problema, para este modelo de suelo, hubo al principio algunas simplificaciones. Dentro de éstas cabe destacar la debida a Wieghardt (1922).

Supone Wieghardt que la deformada del terreno es una función continua K de la diferencia absoluta de las coordenadas, es decir:



Si la carga está distribuida a lo largo de una recta de longitud l la deformada del terreno será:

$$w = \int_0^l p(\xi) K(|x - \xi|) d\xi$$

identificando la deformada del terreno a la flecha de la viga obtiene una ecuación íntegro-diferencial que soluciona el problema.

Además del caso general, Wieghardt estudió el caso especial en el que la función K tenía la expresión:

$$K(|x - \xi|) = e^{-c|x - \xi|}$$

El problema de Wieghardt sólo coincide con el modelo de Boussinesq en el caso de que:

$$K(|x - \xi|) = c_1 \log |x - \xi| + c_2$$

Otro modelo de suelo basado en una simplificación del modelo elástico-lineal es el modelo de Kany (1959).

Para resolver el problema de la viga que se apoya en un semiespacio elástico lineal en estado plano, Kany supone que la deformada del terreno tiene una determinada forma. Dicha configuración de la deformada del terreno está realizada en base a numerosos ensayos, entre ellos numerosas medidas realizadas a escala real. En resumen, el método de cálculo se basa en las tres hipótesis siguientes:

- El suelo debe estar formado por capas horizontales y no debe mostrar ninguna variación de sus constantes elásticas en sentido horizontal.
- Las deformaciones del terreno bajo cualquier sección de la viga deben aumentar proporcio-

nalmente a la carga aplicada en la solera (Ley de Hooke). No se tiene en cuenta, por tanto, la relación entre el módulo de rigidez de la cimentación y la presión que actúa en cada punto.

- La viga de cimentación debe ser de rigidez (EI) constante).
- La sollicitación de la viga es plana (sin torsión), suponiéndose un reparto uniforme transversalmente al plano de cálculo. Por esta razón el método es aplicable principalmente a vigas de cimentación (o placas que trabajen como tal). En el caso de placas se puede utilizar el método clásico de descomposición en vigas estableciendo después las condiciones de continuidad expresadas por la igualdad de asientos. Se obtiene así bastante precisión, sobre todo si la placa es bastante rígida, en opinión del autor del método.

Otro modelo que tiene interés, sobre todo por la aplicación que ha tenido en el cálculo de pavimentos rígidos es el de H. M. Westergaard (1938), el cual supone que no pueden existir dilataciones en sentido horizontal.

En estas condiciones Westergaard ha calculado la distribución de tensiones y asientos bajo diversos tipos de carga entre las que se encuentra la que hemos denominado ecuación básica, que para este caso tiene la expresión:

$$w = \frac{\eta P}{2 \pi R G}$$

donde w es el asiento, P la carga, R el radio del punto donde se desea calcular el asiento al punto de aplicación de la carga, y G el módulo de cortante

$$\eta = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$$

Modelos que introducen una variación significativa sobre el elástico-lineal.

Dentro de este grupo se encuentran fundamentalmente los modelos de O. K. Frölich (1934) y el propuesto por A. P. S. Selvadurai (1973).

En el estudio del modelo de Boussinesq se encuentra que para una carga concentrada y sólido incompresible ($\nu = 0,5$) se genera una radiación rectilínea. En el caso general de ν variable la solución se separa poco de ésta y Frölich lo que hace es admitir que es válida en todo caso y calcula la expresión básica de esta radiación en función de un factor que mide la mayor o menor concentración de la radiación, o sea, la mayor o menor concentra-

ción de las cargas bajo la zona cargada. La expresión básica en este modelo es:

$$\sigma_r = \frac{c P}{2 \pi} \frac{z^{c-2}}{c}$$

donde c es el denominado factor de la concentración.

Este modelo coincide con el de Boussinesq para el caso de que el factor de concentración sea 3. Este modelo se ha empleado frecuentemente para el cálculo de la distribución de tensiones en un semiespacio bajo cargas puntuales o uniformes repartidas, pero no se conoce que se hubiera aplicado al caso de cimentaciones con rigidez variable.

El otro modelo que se considera dentro de este grupo es el propuesto por A. P. S. Selvadurai, el cual parte de las ecuaciones básicas del equilibrio del semiespacio elástico homogéneo e introduce en éste propiedades que dependen de la microestructura del material. Estas singularidades tienen una cierta importancia en los suelos granulares.

Fruto de estos estudios sobre la microestructura y su influencia en las propiedades de deformación de los suelos reales, introduce en el modelo de Boussinesq dos parámetros nuevos, uno de los cuales tiene las dimensiones de una longitud.

MODELOS MIXTOS

Cada uno de los modelos estudiados ha sido un intento de encontrar un modelo matemático del suelo real válido en la mayoría de los casos. Sin embargo, este objetivo no se ha logrado plenamente. Continuando en este camino y apoyándose en el hecho de que diversos modelos de suelos tienen aplicación a diversos casos de los suelos reales, nacen los modelos mixtos o modelos formados a partir de dos o más modelos conocidos.

Es conocido el hecho de que en determinados casos la solución que se obtiene por el método de coeficiente de balasto es mejor que la que se obtiene por el modelo de Boussinesq y viceversa, en muchos casos reales la solución obtenida con este modelo es más acertada que la obtenida con el primero.

Con este hecho conocido, L. N. Repnikov (1967) crea un modelo mixto que englobe a los dos modelos anteriormente descritos y que tenga como casos límites la igualdad a uno u otro modelo. De esta forma obtiene un modelo cuya ecuación básica es:

$$w = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \iint_S \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} + \frac{1}{k} p(x, y)$$

donde el primer sumando representa la deformación elástica de Boussinesq y el otro sumando nos da una deformada del tipo de la del coeficiente de balasto. Con este modelo Repnikov estudió el problema de la viga en estado de deformación plana obteniendo unos resultados muy concordantes con los ensayos realizados. Este modelo como es fácil comprender representa a los suelos lineales, o sea, aquellos suelos cuyo comportamiento bajo carga es tal que la relación tensión-deformación es lineal. A pesar de esta limitación, este modelo tiene una gran aplicación.

Un modelo de suelo aún más general y que ya es aplicable a suelos cuyo comportamiento no es lineal es el de I. I. Cherkasov (1958). Este modelo surge de los estudios del autor sobre las propiedades mecánicas de deformación de los suelos. La expresión básica del modelo, o sea, la que correlaciona la carga y el asiento es:

$$w(x, y) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \iint_S \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} + \frac{1}{k} p(x, y) + p^n(x, y) \quad \text{sig } p(x, y)$$

El primer sumando de esta expresión tiene en cuenta la linealidad existente al menos en un cierto intervalo y coincide con la fórmula de Boussinesq. El segundo sumando viene a ser equivalente a un cierto coeficiente de balasto, con lo que se sigue manteniendo la linealidad entre tensión y deformación. Por último, el tercer sumando expresa la no linealidad, pues considera una cierta hiperbolicidad en el comportamiento del suelo.

En la actualidad el modelo está bastante desarrollado y se encuentran resueltos todos los problemas básicos para su posible aplicación. La determinación experimental de los parámetros propios de este modelo ha sido estudiada y resuelta de forma satisfactoria por B. V. Ubarov (1976).

La solución para el caso de la viga ha sido publicada por B. V. Ubarov en 1971, tanto para carga uniforme como para una carga concentrada.

Estos modelos mixtos los podemos denominar también modelos multiparamétricos, pues las propiedades de deformación del suelo vienen determinadas por más de dos parámetros. En esta línea de modelos multiparamétricos, se encuentra el modelo de S. A. Rivkin (1967) que considera que la presión de contacto se puede calcular mediante la expresión:

$$p = k [1 + \beta e^{-\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 m + \alpha_4 \eta}] w$$

donde p es la presión de contacto, w el desplazamiento

del suelo, k, β, α los parámetros del suelo,

$$\xi = \frac{y}{l}, \quad \eta = \frac{x}{l} \quad \text{coordenadas relativas.}$$

$$m = \frac{b}{l}$$

Este modelo se manifiesta muy útil en el cálculo de placas, sobre todo cuando éstas tienen inclusiones rígidas. Existe además una cierta correspondencia con los otros modelos de suelos ya indicados. Por ejemplo, para:

$\beta = 0$ corresponde el modelo de Winkler.

$\beta \neq 0, \alpha \rightarrow \infty$ corresponde el modelo de Pasternak.

$\beta = 5,5, \alpha = 10$ corresponde el modelo de Boussinesq.

$\beta = 5,5, \alpha > 10$ corresponde a un semiespacio elástico de potencia finita.

MÉTODOS MATEMÁTICOS EMPLEADOS EN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTACTO

La solución de los numerosos problemas de cálculo que se presentan al intentar resolver el problema de contacto en elementos de rigidez variable se ha buscado por diversos caminos. Aunque no se pretende plantear de forma completa los métodos existentes, de los cuales tenga conocimiento el autor de este artículo, sí pretendemos presentar al menos de forma escueta los medios con los que se cuenta para poder encontrar la solución que se busca.

Para una más fácil expresión de los métodos de cálculo, los hemos dividido en cuatro grandes grupos (fig. 4):

- Métodos analíticos.
- Métodos numéricos.
- Métodos que plantean un sistema de ecuaciones.
- Métodos empíricos.

MÉTODOS ANALÍTICOS

Dentro de este grupo existen dos vías fundamentales. Una primera que se basa en la teoría de las transformadas integrales (I. N. Sneddon (1972)) y que resuelve el problema planteando una ecuación integral. Su aplicación es muy general. La segunda vía es la solución de la ecuación diferencial que plantea el problema de contacto. Como ejemplos tenemos las soluciones en el modelo de Winkler y en el modelo de Pasternak para el caso de viga de

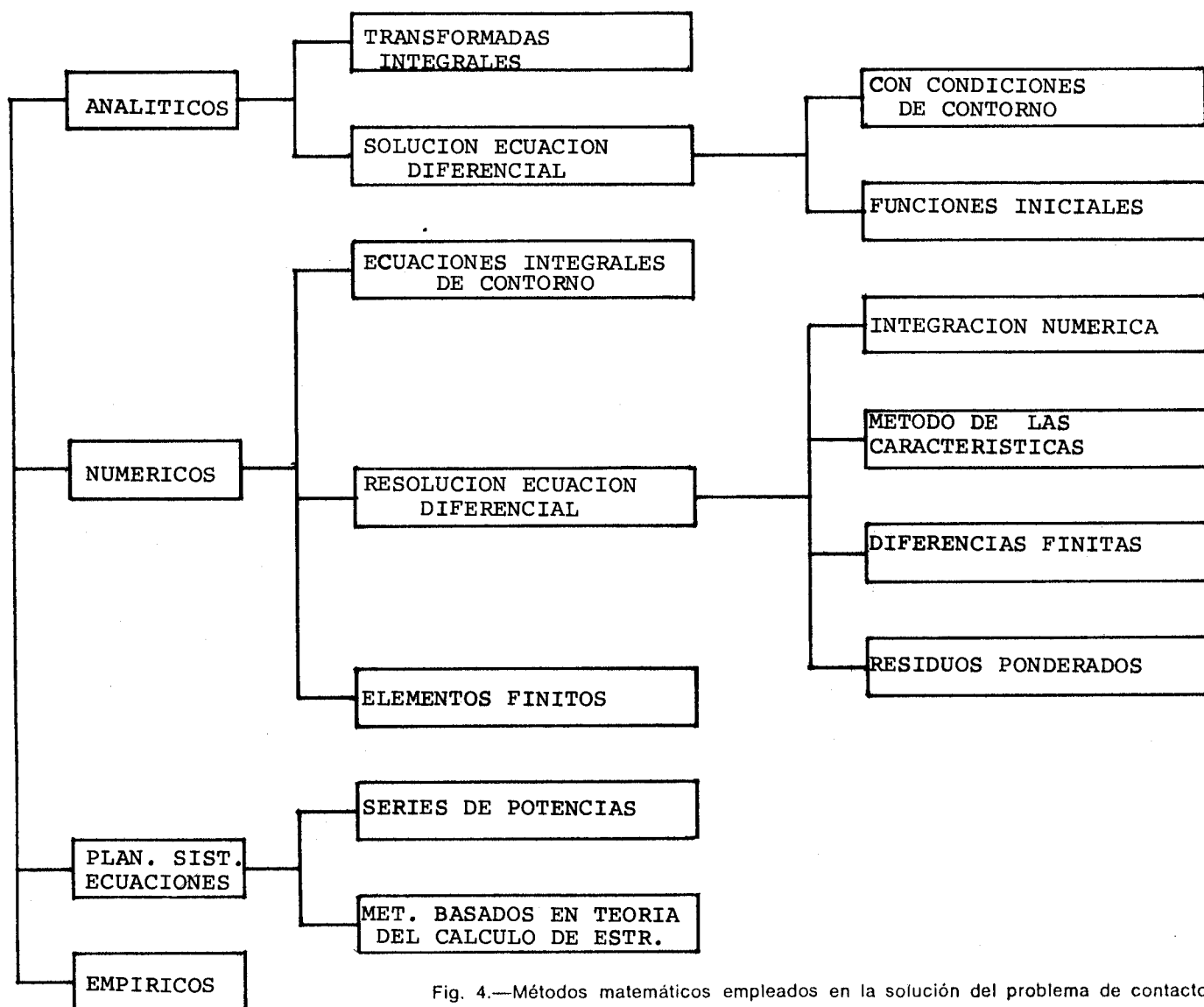


Fig. 4.—Métodos matemáticos empleados en la solución del problema de contacto.

longitud infinita con una carga concentrada. En esta segunda vía de solución merecen destacarse dos medios de encontrarla. Uno que se apoya en las condiciones de contorno (método de M. Hetenyi, Timoshenko, etc.) y otro que emplea el método de las funciones iniciales. La aplicación de este segundo método se encuentra bastante desarrollada en el libro de A. P. S. Selvadurai (1979).

MÉTODOS NUMÉRICOS

Uno de los métodos más modernos y potentes y que puede servir de base a otros medios de solución, es el que se basa en la solución del problema mixto de contorno mediante el planteamiento de un sistema de dos ecuaciones integrales o

sistema dual. Este método está profundamente desarrollado en el libro de I. N. Sneddon (1966).

Otra vía es la que plantea la solución de la ecuación diferencial por métodos numéricos. Dentro de esta vía se pueden distinguir cuatro caminos:

- La integración numérica de la ecuación diferencial.
- El empleo del método de las características.
- Las diferencias finitas, empleadas de forma directa para la solución de la ecuación o ecuaciones diferenciales o indirectamente a través del método de las características, como se hace en la teoría del estado límite (V. V. Sokolouski (1960)), por ejemplo.
- Los residuos ponderados operan directamente sobre la ecuación diferencial. Generalmente este método se aplica a problemas que

no plantean ecuaciones lineales. La aplicación y su base teórica se encuentran desarrollados en el libro de B. A. Finlayson (1972). Estos residuos apoyados en el método de Galerkin constituyen uno de los procedimientos más comúnmente usados en el método de los elementos finitos.

La tercera vía que hemos considerado dentro del grupo de los métodos numéricos es la de la aplicación del método de los elementos finitos. Actualmente constituyen un método muy desarrollado con una extensa bibliografía al respecto de la que se cita a título de ejemplo la de D. C. Zienkiewicz (1971). (Existe una nueva versión ampliada.)

METODOS QUE PLANTEAN UN SISTEMA DE ECUACIONES

Dentro de este grupo, que podemos considerar intermedio entre los métodos analíticos y los numéricos propiamente dichos se perfilan dos vías fundamentales.

Una primera vía es la que plantea la solución de la ecuación diferencial mediante el empleo de series de potencias. Este método ha sido aplicado por H. Borwicka (1936) para encontrar la solución de la losa circular con rigidez variable sobre el semiespacio de Boussinesq y que posteriormente Garbunov-Posadov (1937, 1949) aplicó a la generalidad de los problemas de contacto en este semiespacio.

La segunda vía es la que aplica los métodos propios del cálculo de estructuras a la solución de este problema. Los ejemplos más destacados en este grupo son entre otros los trabajos de J. Ohde (1942) que es quizá el primero en esta vía, el método de B. N. Yemochkin (1947) y el método empleado por M. Kany (1959) basado en el método de J. Ohde, del año 1942.

METODOS EMPIRICOS BASADOS EN LA EXPERIENCIA

Son aquellos que encuentran la solución con la ayuda de datos empíricos fruto de la experiencia profesional del autor. Aunque ya ha sido comentado en el apartado anterior quizá el ejemplo más conocido es el de M. Kany (1959) que basa su solución en considerar que la deformada del terreno tiene una determinada forma que el autor determinó experimentalmente.

CONCLUSION

Como resumen y conclusión de todo lo expuesto se aprecia que el empleo de modelos simples de

suelos obliga a elegir, en función del tipo de suelo y del nivel de cargas transmitidas al terreno, diversos modelos. Como ejemplo de esta afirmación tenemos el reciente trabajo de R. J. Krizek y D. K. Atmatzidis (1977) sobre la elección del modelo de suelo para el análisis numérico de la interacción suelo-conducción.

Para intentar evitar este problema actualmente se empiezan a desarrollar modelos mixtos de los cuales hemos comentado dos, uno con comportamiento lineal y otro más general que tiene en cuenta el comportamiento no lineal del suelo.

La solución de los problemas planteados en los diversos modelos de suelos, cuenta con suficiente número de métodos matemáticos que permiten la aplicación práctica de estos modelos con una precisión que en la generalidad de los casos es suficiente.

BIBLIOGRAFIA

1. GORBUNOV-POSADOV, M. J.: "Cálculo de obras sobre bases elásticas". Editorial de la Construcción Moscú (en ruso), 1973.
2. SHERIF, G., and KONIG, G.: "Platten und Balken auf nachgiebigen Baugrund". Springer, 1975.
3. SELVADURAI, A. P. S.: "Elastic analysis of soil-foundation interaction". Elsevier, 1979.
4. HERTZ, H.: "Gesammelte Werke". Vol. 1. Leipzig, 1882.
5. HERTZ, H.: "Sobre el equilibrio de placas elásticas flotantes". Ann. Phys. Chem., Vol. 22 (en alemán), 1884.
6. BOUSSINESQ, J.: "Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques". Paris, 1885.
7. WINKLER, E.: "Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit". 1867.
8. ZIMMERMAN, H.: "Die Berechnung des Eisenbahnoberbaus". Berlín, 1888.
9. SADOWSKY, M. A.: "Zweidimensionale probleme der Elasticitätstheorie". Z.A.M.M., E-8, No. 2, 1928.
10. BOROWICKA, H.: "Influence of rigidity of a circular foundation slab over the contact surface. Proceeding". I.C. S.M.F., Vol. 2, 1936.
11. HETENYI, M.: "Beams on elastic foundation". Cambridge Mass., 1946.
12. PUZIRIESKI, N. N.: "Cálculo de cimentaciones". L.N.I.P. (en ruso), 1923.
13. TERZAGHI, K.: "Evaluation of coefficients of subgrade reaction". Gotechnique, Vol. 5, 1965.
14. SOBOLEV, D. N.: "Métodos prácticos para la determinación de los esfuerzos de cálculo en edificios prefabricados por paneles sobre una base heterogénea". Editorial de la Construcción 1963 (en ruso), 1963.
15. MUSTAFAEV, A. A.: "Mecánica de los suelos colapsables". Editorial de la Construcción (en ruso), 1978.

16. BOLOTIN, V. V.: "Deformaciones elásticas de conducciones subterráneas realizadas en un suelo estadísticamente heterogéneo". M.C.C.E., No. 1 (en ruso), 1965.
17. SOBOLEV, D. N.: "Sobre el cálculo de vigas que se apoyan en un suelo estadísticamente heterogéneo". M.C.C.E., No. 1 (en ruso), 1965.
18. ALONSO, E., and KRIZEK, R. J.: "Behaviour of beams on Randomly non homogenous bases". T.R.R. 510 Wash. D. C., 1974.
19. ALONSO, E.: "Stochastic formulation of soil properties". Proceedings 20 I.C.A. St. and P. Germany, 1975.
20. IGNATOV, V. P.: "Método numérico de cálculo de vigas de longitud finita sobre un suelo estadísticamente heterogéneo". O.F.M.G. (en ruso), 1970.
21. KLEPIKOV, S. N.: "Cálculo de edificios prefabricados por paneles, para asientos no uniformes del suelo". Budivelnik (en ruso), 1966.
22. PASTERNAK, P. L.: "Bases del nuevo método de cálculo de cimentación sobre bases elásticas con dos coeficientes de balasto". Leningrado (en ruso), 1954.
23. FLAMANT, M.: "Sur la repartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement". C.R., No. 25, 1890.
24. GORBUNOV-POSADOV, M. J.: "Cálculo de vigas sobre bases elásticas en las condiciones del problema plano de la teoría de la elasticidad". Conjunto de trabajo del I.C.C. y F-1 (en ruso), 1937.
25. GORBUNOV-POSADOV, M. J.: "Placas sobre bases elásticas". Editorial de la Construcción (en ruso), 1941.
26. GUILMAN, L. S.: "Sobre el problema de la determinación de las tensiones en la superficie de un medio elástico". Conjunto de trabajo del L.J.J.P.C. (en ruso), 1934.
27. KRASHENINNIKOVA, G. V.: Tesis Doctoral en el M.J.S.I. sobre "Investigaciones sobre el comportamiento de vigas en un suelo compresible de potencia finita" (en ruso), 1967.
28. YEMOCHKIM, B. N.: "Métodos prácticos de cálculo de vigas y placas de cimentación sobre bases elásticas". Editorial de la Construcción (en ruso), 1947.
29. SHEJTER, O. Y.: "Sobre la determinación de los desplazamientos del suelo sobre una base rígida". Construcciones Hidroeléctricas, No. 10 (en ruso), 1937.
30. KRASHENINNIKOVA, G. V.: "Límites de la influencia de la capa elástica sobre los resultados del cálculo de vigas teniendo en cuenta la adherencia del suelo con la capa rígida inferior". O.F.M.G., No. 2 (en ruso), 1973.
31. IAGOLKOVSKI, S. I.: "Influencia de la rugosidad de la capa rígida subyacente en los resultados del cálculo de vigas". O.F.M.G., No. 4 (en ruso), 1969.
32. KLEIN, G. K.: "Influencia de la heterogeneidad en la distribución de las deformaciones y otras propiedades mecánicas de los suelos en el cálculo de obras sobre el semiespacio". Conjunto de trabajo M.I.S.I. (en ruso), 1956.
33. GIBSON, R. E.: "Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space". Geotechnique, 58-67, 1967.
34. SHEVLIKOV, Y. A.: "Algoritmos matriciales en la teoría de los medios heterogéneos elásticos". Gran Escuela Kiev (en ruso), 1977.
35. NAUMOV, Y. A., and SHEVLIKOV, Y. A.: "Sobre la solución de los problemas básicos de la teoría elástica de las capas con heterogeneidad variable en el espesor". Mecánica Aplicada T. G. (en ruso).
36. WIEGHARDT, K.: "Über dem Balken auf nachgiebiger Unterlag". Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1922.
37. KANY, M.: "Berechnung von Flächen Gründungen". Berlin, 1959.
38. WESTERGAARD, H. M.: "A problem of elasticity suggested by a problems in soil mechanics. Contribution to the mechanics of solids". N. Y., 1938.
39. FROLICH, O. K.: "Druckverteilung und Baugrunde". Berlin, 1934.
40. REPNIKOV, L. N.: "Cálculo de vigas sobre bases elásticas que reúnen propiedades de deformación del modelo de Winkler y del modelo elástico lineal". O.F.M.G. (en ruso), 1967.
41. CHERKASOV, I. J.: "Propiedades mecánicas de los suelos de cimentación". Moscú (en ruso), 1958.
42. UBAROV, B. V.: "Método experimental de determinación de los parámetros de bases que no se deforman linealmente del tipo mixto". O.F.M.G., No. 1 (en ruso), 1976.
43. UBAROV, B. V.: "Sobre el cálculo de vigas en bases que se deforman no linealmente del modelo combinado". O.F.M.G., No. 4 (en ruso), 1971.
44. RIVKIN, S. A.: "Proyecto de cimentaciones". Kiev (en ruso), 1967.
45. SNEDDON, I. N.: "The use of integral transforms". McGraw-Hill, 1972.
46. SNEDDON, I. N.: "Mixed Boundary value problems in potential theory". J. W., 1966.
47. SOKOLOVSKI, V. V.: "Static of soil media". Butn. London, 1960.
48. FINLAYSON, B. A.: "The methods of weighted Residuals and variational principles". Academic Press, 1972.
49. ZIENKIEWICZ, O. C.: "The finite element method in engineering science". McGraw-Hill, 1971.
50. OHDE, J.: "Die Berechnung der Sohldruckverteilung unter Gründungskörpern". Bauningenieur, No. 23, 1942.
51. KRIZEK, R. J., and ATMAZIDIS, D. K.: "Assessment of soil constitutive models for numerical analysis of buried concrete pipe systems". A.S.T.M. S.T.P. 630, 1977.