

Una interpretación del análisis espectral de máxima entropía

Por JUAN JOSE EGOZCUE

Licenciado en Física.

INTRODUCCION

Los métodos clásicos del análisis espectral (Blackman and Tukey, 1958) basados en la transformada discreta de Fourier, suponen una prolongación nula o periódica de la señal registrada que debe analizarse. En un intento de superar este inconveniente, J. P. Burg introdujo en 1957 el llamado método de máxima entropía (Burg, 1975), que, basándose en elementos de teoría de la información propone una extrapolación de la señal o de su autocorrelación fuera del intervalo de observación.

Desde el momento de su introducción el método fue objeto de estudio teórico y comenzaron a presentarse aplicaciones, especialmente en el campo de la geofísica y astrofísica.

Son de destacar los trabajos teóricos que fundamentaron el método, entre otros Lacoss (1971), Smylie et al. (1973), Burg (1975), Ulrych y Bishop (1975).

La experiencia acumulada en esta última década ha demostrado que el método de máxima entropía mejora considerablemente la resolución de máximos espectrales cercanos, incluso en el caso de frecuencias muy bajas con períodos del mismo orden de la longitud de la señal. También se cuenta con la ventaja de la obtención de un espectro continuo, por lo que la localización de los máximos espectrales tiene mayor precisión que en los métodos clásicos.

A pesar de estas ventajas, se trata de un análisis delicado y el resultado depende, al menos aparentemente, de un parámetro: la longitud del filtro de predicción de error elegido. Es notable también la dificultad que existe en estimar y comparar las densidades espectrales asociadas a cada máximo y la imposibilidad (por el momento) de controlar la varianza del resultado obtenido.

Esto ha llevado a que las aplicaciones hasta ahora conocidas sean, en gran medida, estudios sobre el mismo método. Un buen ejemplo de ello, que da una idea de las posibilidades del método, puede encontrarse en los trabajos de Cortillot et al. de los años 1976 y 1977. En ellos se realiza una aplicación sistemática del análisis de máxima entropía

a gran cantidad de señales procedentes del campo geomagnético y de los números de Wolf (medida de la actividad solar).

Por ello creemos que los conocimientos acerca de esta técnica son ya suficientes para comenzar una aplicación sistemática a todos los terrenos relacionados con el análisis espectral: análisis de vibraciones, pruebas no destructivas, sondeos eléctricos, sondeos sísmicos, transmisión de energía elástica, etc.

Abordaremos a lo largo de este trabajo la cuestión de la interpretación de los resultados del análisis y, más en concreto, el problema de la estima de la potencia asociada a cada componente armónica detectada.

BREVE DESCRIPCION DEL ALGORITMO

El algoritmo se basa en la búsqueda de unos coeficientes $g_0, g_1, \dots, g_m$, ($g_0 = 1$) (coeficientes del filtro de predicción de error, FPE) que permitan predecir la autocorrelación de la señal, $\phi(k)$, para cualquier valor discreto, $k \Delta t$, de la variable de la forma siguiente:

$$\phi(k) = - \sum_{j=1}^m g_j \phi(k-j) \quad (1)$$

Δt denota el intervalo de muestreo de la señal.

De hecho estos mismos coeficientes deben reducir la señal, por convolución discreta, a una señal de ruido blanco.

Es decir, que si $X(0), \dots, X(n)$ son los datos conocidos, que se suponen de media nula, entonces:

$$\varepsilon(k) = \sum_{j=0}^m g_j X(k-j) \quad (2)$$

es una señal de ruido blanco, o se asimila a ella, para los valores conocidos $k = m, m+1, \dots, n$. Nótese que $\varepsilon(k)$ puede interpretarse como el error cometido al predecir $X(k)$ a partir de $X(k-j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, mediante un proceso lineal, de aquí el nombre de filtro de predicción de error.

INTERPRETACION DEL ANALISIS ESPECTRAL DE MAXIMA ENTROPIA

Puede demostrarse que para hallar un FPE ajustado por mínimos cuadrados deben cumplirse las ecuaciones normales:

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(-1) & \phi(-2) & \dots & \phi(-m) \\ \phi(1) & \phi(0) & \phi(-1) & \dots & \phi(-m+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi(m) & \phi(m-1) & \phi(m-2) & \dots & \phi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ g_1 \\ \dots \\ g_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde P_m resulta ser la varianza de la señal $\varepsilon(*)$, conocida por potencia de predicción de error.

No obstante, queda indeterminado el número m de coeficientes necesarios para una predicción óptima. Es más, podría ser infinito, lo cual lo haría inútil para el cálculo.

La hipótesis de máxima entropía, o equivalentemente, de que la extrapolación que se realiza de la señal y de su autocorrelación se haga con incertidumbre máxima, permite asegurar que m es finito e inferior a n , aunque no sirve para determinarlo totalmente.

Dadas las relaciones (1) y (2) la teoría de procesos estocásticos permite estimar la densidad espectral buscada a partir del FPE como:

$$S(f) = \frac{\Delta t P_m}{\left| \sum_{k=0}^m g_k e^{-i 2 \pi f k \cdot \Delta t} \right|^2} \quad (4)$$

donde Δt es el intervalo de muestreo de la señal y f es la frecuencia. La fórmula (4) puede escribirse alternativamente:

$$S(f) = \hat{S}(z) = \frac{\Delta t P_m}{G(z) \cdot G^*(1/z^*)} ; \quad z = e^{-i 2 \pi f \Delta t} \quad (5)$$

donde $G(z)$ es la transformada de z del FPE:

$$G(z) = \sum_{k=0}^m g_k z^k \quad (6)$$

En la práctica todo se reduce a calcular los coeficientes del FPE y P_m , previa elección a priori de m . Para ello hay que resolver las ecuaciones (3), bien entendido que los valores $\phi(k)$, $n = 0, 1, \dots, m$, deben ser estimados de alguna manera a partir de los datos. Burg (1975) propuso la utilización de un cálculo recurrente de las ecuaciones (3) para valores crecientes de m basándose en la recurrencia, ya conocida, de Levinson (1947) y la minimización en cada caso de P_m . Aunque han sido propuestos otros métodos (Fougere (1977, Ulrych y Clayton (1976), etc.) que mejoran algunos aspectos, el procedimiento de Burg se mantiene como el más usual y relativamente más sencillo.

LA INTEGRAL DE LA POTENCIA

En gran cantidad de aplicaciones se está interesado en trabajar con magnitudes relacionadas con el cuadrado de la señal registrada. Así, en señales de velocidad se trata con la energía cinética; en señales eléctricas la energía resulta proporcional al cuadrado del potencial; en señales de desplazamientos elásticos también su cuadrado es proporcional a la energía elástica. No resulta extraño, por tanto, que a la magnitud:

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n |X(k)|^2 \quad (7)$$

le llamemos densidad de energía o potencia de la señal. En general, E se estima sobre los datos disponibles mediante:

$$\hat{E} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |X(k)|^2 \quad (8)$$

Una de las relaciones básicas del análisis espectral expresa la densidad de energía a partir de la densidad espectral o espectro de potencia:

$$\hat{E} \simeq E = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \quad (9)$$

Si se supone que la señal analizada es limitada en banda de Nyquist obtenemos:

$$\hat{E} \simeq E = \int_{-\frac{1}{2\Delta t}}^{\frac{1}{2\Delta t}} S(f) df \quad (10)$$

Si se utiliza el algoritmo de máxima entropía para estimar $S(f)$ según (5) podremos reducir (10) a una integral compleja mediante el cambio:

$$z = e^{-i 2 \pi f \Delta t} ; \quad \frac{dz}{z} = -i 2 \pi \Delta t df$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2\pi i \Delta t} \oint_{|z|=1} \frac{\hat{S}(z)}{z} dz \quad (11)$$

Donde el cambio de orientación ha permitido el cambio de signo del integrando.

Ahora puede utilizarse el teorema de los residuos de Cauchy para evaluar la integral de (11). Pero antes es necesario hacer algunas consideraciones sobre las singularidades de la función meromorfa $\hat{S}(z)$.

En primer lugar las raíces de $G(z)$ (polos para $\hat{S}(z)$), deben estar en el exterior de $|z|=1$ (condición de estabilidad del FPE), y así es, en efecto, en la recurrencia que propone Burg.

No es difícil ver que si $G(z)$ tiene sus raíces en $z = z_j$, $j = 1, \dots, m$, entonces $G^*(1/z^*)$ las tiene en $z = 1/z_j^*$. Si además la señal es real, lo que supone que $G(z)$ es un polinomio de coeficientes

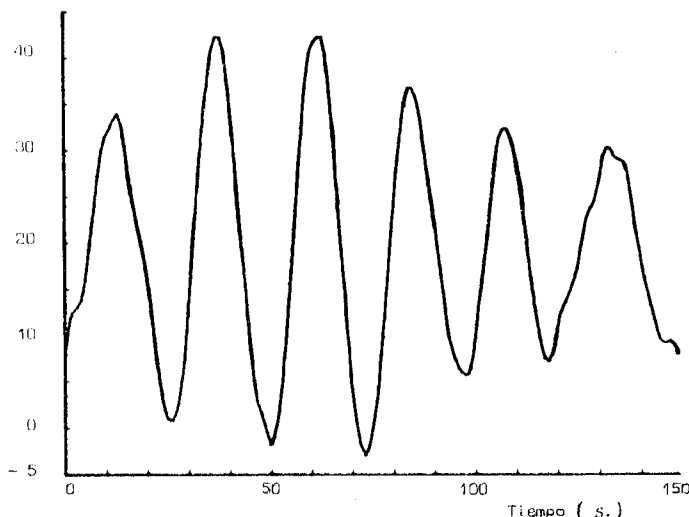


Fig. 1.—Representación de una onda superficial (Rayleigh) registrada en la estación GRC (componente 06) correspondiente a un sismo del 24 de mayo de 1978. Intervalo de muestreo 1 s. La señal consta de 150 puntos y su potencia es 145.2383 estimada a partir de los datos en unidades arbitrarias. Se ha realizado un suavizado previo de la señal.

TABLA 1.— Posición y potencia asociadas a las singularidades de $S(z)/z$ del semiplano superior y exterior al círculo unidad (w , argumento de z_j ; f , frecuencia; r , módulo de z_j).

FPE 24					FPE 25			
j	w (rad.)	f (Hz)	r	$\text{Re } L_j$	w (rad.)	f (Hz)	r	$\text{Re } L_j$
1	0.00000	0.0000	1.893	+ 8.180 e-6				
2	0.25216	0.0401	1.006	+ 7.051 e 1	0.25200	0.0401	1.009	+ 7.888 e 1
3	0.31468	0.0501	1.057	+ 1.761 e 0	0.27460	0.0437	1.049	— 6.749 e 0
4	0.60925	0.0970	1.092	+ 2.339 e-1	0.48385	0.0770	1.105	+ 2.805 e-1
5	0.87117	0.1387	1.284	+ 8.167 e-3	0.70125	0.1116	1.082	+ 9554 e-2
6	1.08087	0.1720	1.072	+ 7.252 e-2	1.04263	0.1659	1.049	+ 6.486 e-2
7	1.32886	0.2115	1.098	+ 1.627 e-2	1.25417	0.1996	1.077	+ 2.542 e-2
8	1.59934	0.2545	1.046	+ 9.983 e-3	1.56574	0.2492	1.086	+ 1.489 e-2
9					1.65088	0.2627	1.205	— 1.537 e-3
10	1.90431	0.3031	1.051	+ 2.055 e-3	1.93470	0.3079	1.068	+ 1.716 e-3
11	2.20327	0.3507	1.044	+ 7.054 e-4	2.22476	0.3541	1.042	+ 6.301 e-4
12	2.49577	0.3972	1.049	+ 1.773 e-4	2.51386	0.4001	1.038	+ 1.616 e-5
13	2.75280	0.4381	1.042	+ 3.055 e-5	2.76618	0.4403	1.031	+ 2.688 e-6

Para longitud de FPE 25 aparecen las potencias negativas.

OBSERVACIONES: La frecuencia asociada a la singularidad número 2 se mantiene prácticamente invariable. A pesar del aparente cambio de $\text{Re } L_2$, es mejor considerar el conjunto de $\text{Re } L_2 + \text{Re } L_3$. Las singularidades 5, 6, ..., 13 para las que aparecen máximos espectrales notables en la figura 4 tienen una potencia prácticamente despreciable, por lo que sus fluctuaciones en frecuencia no deben tenerse en cuenta.

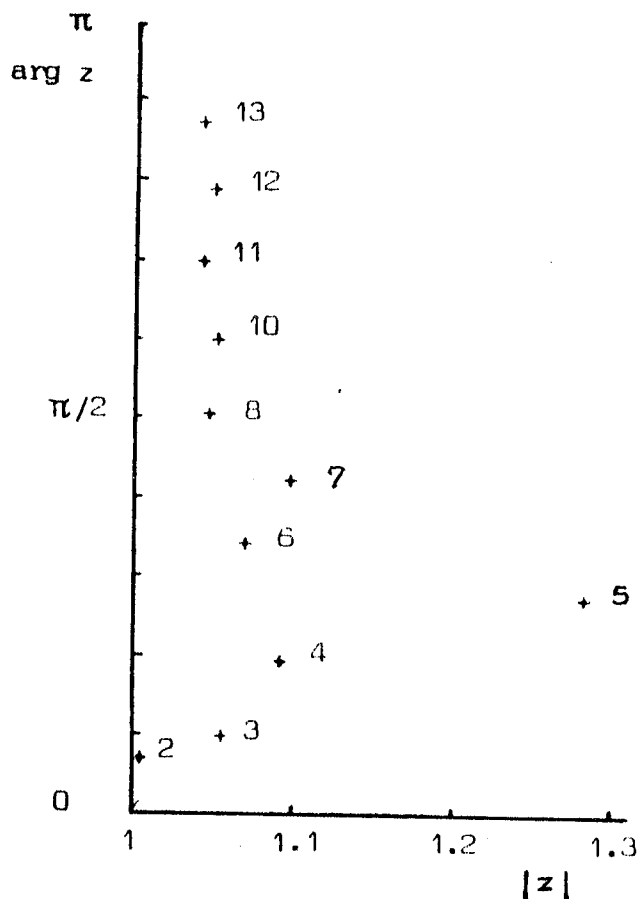


Fig. 2.—Diagrama de posición de las singularidades de $\hat{S}(z)/z$ para un FPE de 24 puntos. Obsérvese la proximidad del polo número 2 causante del máximo espectral más destacado en la figura 4. El polo número 1 queda fuera de la escala del dibujo sobre el eje real. La relación de posiciones y residuos se da en la tabla 1.

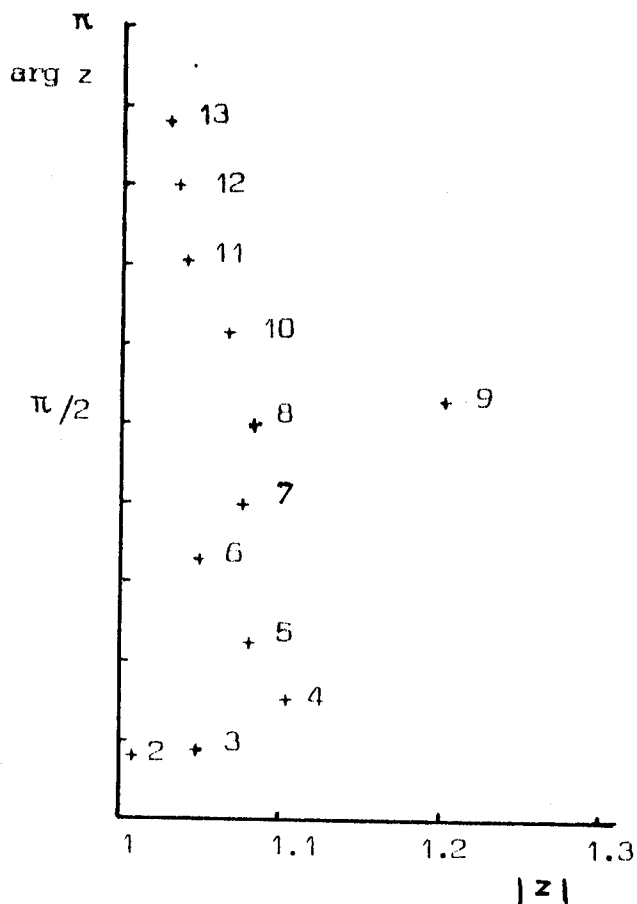


Fig. 3.—Diagrama de posición de las singularidades de $\hat{S}(z)/z$ para un FPE de 25 puntos. La parte real del residuo de las singularidades números 3 y 9 son negativas. La relación de posiciones y residuos se da en la tabla 1.

reales, a cada raíz $z = z_j$ se le asocia otra en $z = z_j^*$. Por ello para señales reales las singularidades de $\hat{S}(z)$ van asociadas de cuatro en cuatro para valores imaginarios de z_j y de dos en dos para los reales. Esta simetría de $\hat{S}(z)$ lleva a sencillas relaciones entre los residuos en cada uno de los cuatro polos asociados. En efecto, para una señal real si $z = z_j$ es un cero de $G(z)$ complejo con $|z_j| > 1$ y llamamos R_j al residuo de $\hat{S}(z)/z$ en z_j y L_j al residuo en $z = 1/z_j^*$, entonces:

$$R_j = -L_j^* \quad (12)$$

Además también es fácil comprobar que los residuos de polos conjugados son a su vez conjugados.

De todo ello se desprende que (11) puede escribirse:

$$\hat{E} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} L_j \quad (13)$$

supuestos los polos simples.

Puesto que $\hat{E}$ es una magnitud esencialmente positiva, cabe preguntarse si las partes reales de los L_j , $j = 1, \dots, m$, son a su vez positivos. La respuesta es negativa. No obstante, en la práctica resulta fácil obtener longitudes del FPE para la cual son efectivamente positivos.

También es frecuente que si alguna parte real es negativa su magnitud es despreciable frente a los demás sumandos.

A modo de ejemplo la figura 1 presenta una

INTERPRETACION DEL ANALISIS ESPECTRAL DE MAXIMA ENTROPIA

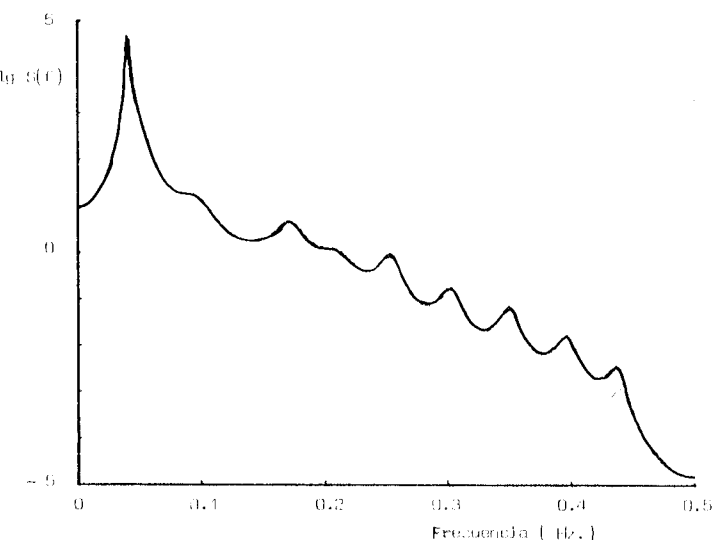


Fig. 4.—Espectro de potencia (escala logarítmica) de la señal de la figura 1 realizada con un FPE de longitud 24.

señal correspondiente al registro de una onda superficial (Rayleigh). En las figuras 2 y 3 se presenta un diagrama con la posición de las raíces de $G(z)$, y los valores de los residuos de esas singularidades para dos longitudes de FPE consecutivas en la tabla 1.

Para el caso de FPE de longitud 25 (fig. 3) la parte real negativa del residuo número 9 es despreciable frente a la potencia total. Asimismo, la

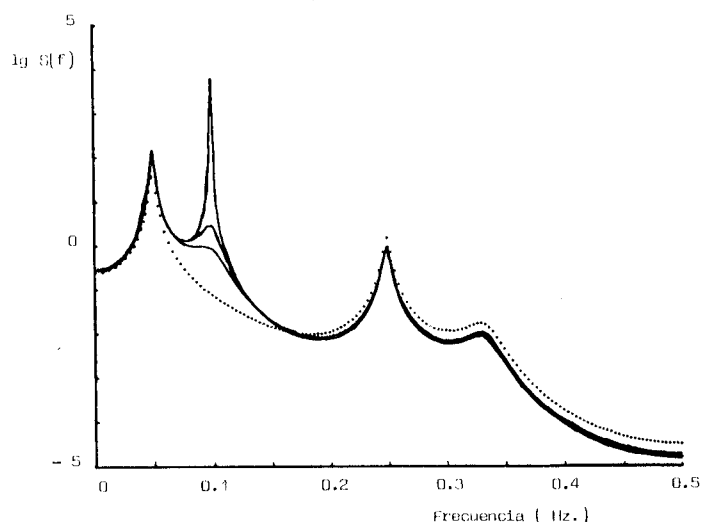


Fig. 5.—Gráficas de espectros de potencia simulados con las singularidades de $\hat{S}(z)/z$ en las siguientes posiciones:

$$z_1 = 1.01 \exp(i\pi/10); z_2 = 1.02 \exp(i\pi/2); z_3 = 1.1 \exp(i2\pi/3)$$

La cuarta singularidad se ha situado en cuatro posiciones: $z = r \exp(i\pi/5)$ con $r = 1.001, r = 1.05, r = 1.1, r = 1.5$ (gráfica a puntos). A medida que crece r el máximo espectral correspondiente se destaca menos y ensancha su base, llegando incluso a desaparecer.

TABLA 2.—Frecuencias correspondientes a los máximos espectrales de la figura 4 y frecuencias asociadas a los polos $\hat{S}(z)/z$ correspondientes.

FPE 24	
Frecuencias de los máximos espectrales (± 0.00025)	Polos: frecuencia asociada
0.0400	0.0401
0.1710	0.1720
0.2535	0.2545
0.3020	0.3031
0.3500	0.3507
0.3965	0.3972
0.4365	0.4381

singularidad número 2, aunque tiene potencia asociada negativa no despreciable sólo aparece para las longitudes de FPE entre 25 y 31.

La relación (13) nos brinda una interpretación muy útil del análisis. En efecto, a cada máximo espectral se le puede asociar, al menos, un polo en $|z| < 1$.

Puede obtenerse este resultado observando que $S(f)$ es diferenciable con continuidad, y la presencia de un máximo exige que $S'(f) = 0$. Se demuestra que $S'(f) = 0$ implica que $S'(z) = 0$ (derivación compleja), y esta derivada puede tener hasta $2m - 1$ ceros (Egozcue (1979)), que evidentemente pueden corresponder, a lo sumo, a m máximos espectrales. Por tanto, no existen nunca más de m máximos.

La experiencia indica que si un polo se sitúa cerca de la circunferencia unidad su argumento w es cercano a $2\pi f \Delta t$ siendo f la frecuencia del máximo espectral asociado.

A medida que el polo se aleja de $|z| = 1$ la diferencia entre w y $2\pi f \Delta t$ puede ser considerable (tabla 2 y figura 4). Al mismo tiempo es interesante observar que la proximidad o lejanía de los polos a $|z| = 1$ está directamente relacionada con la agudeza del máximo (como se muestra en la figura 5), que viene a ser una medida de la incertidumbre en la localización de la frecuencia dominante.

Por todo lo expuesto, pueden sustituirse las clásicas gráficas, donde se representa $S(f)$ o $\lg S(f)$, por una tabla en donde se indiquen los m polos (módulo y argumento) y las partes reales de los residuos de $\hat{S}(z)/z$.

En algunas aplicaciones ya se ha observado que la utilización de las partes reales de los citados

residuos es más estable frente a cambios de la longitud de FPE que la difícilmente calculable área bajo $S(f)$ (Egozcue-Paradís (1979)).

Por otra parte, los inconvenientes son fácilmente evitables. En general, la aparición de un término $Re L_j$ negativo puede evitarse incrementando m en una o dos unidades, si m aún no es excesivamente grande.

La sustitución de la frecuencia del máximo espectral por la calculada a partir de la posición del polo puede interpretarse como una ventaja en el sentido de que queda libre de la influencia de otras frecuencias dominantes.

CONCLUSIONES

La descomposición de la densidad de energía (13) se presenta como un potente instrumento para la interpretación de los análisis y posterior utilización de los resultados en aplicaciones.

La principal ventaja de la descomposición consiste en asociar una cierta potencia a cada frecuencia dominante, sin necesidad de recurrir a la medida del área bajo cierto pico, tarea imprecisa y normalmente dificultosa. Además, existen indicios de que los resultados obtenidos son relativamente estables frente a cambios de longitud del FPE.

La posición del polo da, por una parte, la frecuencia a la que está asociada a partir de su argumento, y su proximidad a la circunferencia unidad una idea de la precisión o pureza de la componente armónica detectada en la señal.

Esta interpretación evita, al menos, dos defectos usuales en el análisis: un pico «alto y agudo» del espectro no tiene por qué ser muy energético, pues su potencia asociada puede ser relativamente pequeña si el polo está situado muy cerca de la circunferencia unidad...

La otra ventaja es que en ocasiones un determinado muestreo del espectro puede ocultar las verdaderas dimensiones de un máximo espectral obligando a sucesivos muestreos más finos (Radoski et al, (1975)). En este tipo de interpretación ningún máximo deja de ser detectado.

Los inconvenientes parecen no ser importantes. La aparición de términos negativos en (13) puede ser obviada variando la longitud del filtro de predicción de error o nuevamente despreciando tal término que puede ser varios órdenes de magnitud inferior a los restantes.

Subsiste, no obstante, la dificultad de hallar una longitud de FPE adecuada.

Esta interpretación simplifica la obtención de resultados por el método de máxima entropía por lo que lo hace más fácilmente utilizable en aplicaciones sistemáticas.

REFERENCIAS

- BLACKMAN, R. B., and TUKEY, J. W.: "The measurement of power spectra", Dover, New York (1958).
- BURG, J. P.: "Maximum entropy spectral analysis". Ph. D. Thesis, Standford U. California, U.S.A. (1975).
- CORTILLOT, V., and LE MOUEL, J. L.: "On the long-period variations of the Earth's magnetic field from 2 month to 20 years". J. Geophys. Res., 81, 2941-2950 (1976).
- COURTILLOT, V.; LE MOUEL, J. L., and MAYAUD, N.: "Maximum entropy spectral analysis of Geomagnetic activity index over a 107, year interval". J. Geophys. Res., 82, 2641-2649 (1977).
- EGOZCUE, J. J.: "Análisis espectral de máxima entropía y sus aplicaciones a señales geofísicas". Tesis Doctoral en preparación. U. Barcelona (1979).
- EGOZCUE, J. J., and PARADIS, J.: "Aplicación del análisis espectral de máxima entropía a la determinación de parámetros de foco de un sismo". III Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica. Madrid (1979).
- FOUGERE, F. P.: "A solution to the problem of spontaneous line splitting in maximum entropy power spectrum analysis". J. Geophys. Res., 82, 1051-1054 (1977).
- LACOSS, R. T.: "Data adaptative spectral analysis methods". Geophys., 36, 661-675 (1971).
- LEVINSON, N.: "The Wiener R.M.S. error criterion in filter design and prediction". J. Math. Phys. Cambridge Mass., 25, 261 (1947).
- RADOSKI, H. R.; FOUGERE, P. F., and ZAWALICK, E. J.: "A comparison of power spectral estimates and applications of maximum entropy method". J. Geophys. Res., 80, 619-625 (1975).
- SMYLIE, D. E.; CLARKE, G. K. C., and ULRICH, T. J.: "Analysis of irregularities in the Earth's rotation". Methods Comput. Phys., 13, 391-430 (1973).
- ULRYCH, T. J., and CLAYTON, R. W.: "Time series modeling and maximum entropy". Phys. Earth Planet. Interiors, 12, 188-200 (1976).
- ULRYCH, T. J., and BISHOP, T. N.: "Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition". Rev. Geophys. Space Phys., 13, 183-200 (1973).