

Reflexiones sobre las bases del análisis de estructuras

Por JUAN MURCIA VELA

Cátedra de Hormigón.

RESUMEN

Se realiza un «análisis del análisis de estructuras», dentro del campo estático, resaltando la incidencia de lo geométrico, lo mecánico y el material, especialmente en las dificultades que introducen y en la linealidad o no linealidad del análisis.

De forma concreta se aplica lo anterior a las estructuras lineales planas, incluyendo también unos ejemplos simples de una estructura isostática y otra hiperestática, analizadas en primer y segundo orden, para los diferentes tipos de acciones (cargas, deformaciones impuestas y desplazamientos impuestos) en un mismo plano de igualdad.

Dentro de las conclusiones se destacan las posibilidades de la resolución de problemas no lineales mediante iteración y superposición de casos lineales, de gran sencillez y potencia, pivotando sobre las condiciones del material.

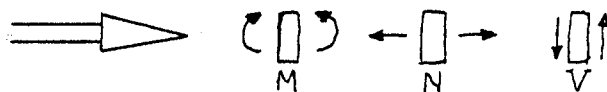
Palabras claves.

Análisis estructural, segundo orden, equilibrio, compatibilidad, geometría, diagrama M-c, deformaciones impuestas, desplazamientos impuestos, linealidad, no linealidad.

Notación.

- c: Curvatura.
- c_1 : Curvatura como acción.
- c_M : Curvatura debida a un momento flector.
- C_1 : Constante de integración.
- C_2 : Constante de integración.
- E: Módulo de elasticidad.
- I: Inercia de sección.
- K: Rigidez de sección.
- l: Luz de vano.
- M: Momento flector.
- N: Esfuerzo axil.
- p: Carga repartida.
- P: Carga concentrada.
- v: Corrimiento de apoyo.
- V: Esfuerzo cortante.
- x: Abscisa, posición de sección en la estructura.
- X: Incógnita hiperestática.
- y: Ordenada, deformada (flecha).

Convenio de signos.



1. INTRODUCCION

Las consideraciones que aquí se van a presentar son comunes en el fondo a todo tipo de estructuras (unidimensionales, bidimensionales, tridimensionales; discretas o continuas) aplicando el término de estructura en su más amplio sentido mecánico, retomando, o recordando al menos, los nombres clásicos de los tratados sobre estos temas en el sentido de «Mecánica de las construcciones», o, más abstractamente, «Mecánica de las estructuras».

En un gran esfuerzo de síntesis se podría incluso contemplar dentro del concepto de estructura a todo aquello que se analiza o puede ser analizado mecánicamente o, empleando un lenguaje más técnico y abstracto, a todo «espacio mecánico» (una autopista, una máquina, una aeronave, un barco, una presa de tierra, una presa bóveda, un puente, un túnel, un pozo, una corriente de agua, un terreno, una playa, un depósito, etc.) introduciendo explícitamente ciertas condiciones adicionales que dentro del concepto clásico restringido de estructura se dan implícitamente por supuestas.

Claro está que no se pretende ni mucho menos hacer esto aquí, sino sólo señalarlo como algo que posiblemente se producirá con mayor o menor amplitud, con el avance del conocimiento y de la comprensión, en el sentido de un cuerpo teórico (o cuerpo de doctrina) de análisis «total» de estructuras que sintetice y englobe el concepto en su sentido mecánico más extenso de «espacio mecánico». Trataremos de las estructuras en su sentido clásico.

Por razones obvias en línea con el objetivo de reflexionar sobre los fundamentos del análisis de estructuras y no menos por tratar de evitar en lo posible la abstracción y abordar lo concreto, nos ceñiremos prácticamente al ámbito sencillo y conocido de las estructuras lineales planas con acciones en su plano. Pero con la idea siempre presente de que básicamente casi todo lo que se diga es, con

dificultad mayor o menor, ampliable y extrapolable a estructuras lineales (en otras condiciones que las supuestas), bidimensionales y tridimensionales, discretas o continuas. Al mismo tiempo, y por las mismas razones, desarrollaremos el tema en el campo estático y, dentro de él, nos limitaremos a la problemática sin tener en cuenta el tiempo (piénsese, por ejemplo, dentro del campo estático, el análisis de estructuras de materiales viscoelásticos). Pero tampoco esto significa que las reflexiones que aquí se hacen no se puedan extrapolar, convenientemente adaptadas, a tales campos.

Todas las limitaciones en lo concreto redundarán con seguridad en beneficio de la comunicación, haciendo más fácil el discurso, por un lado, y la comprensión por otro.

2. LO MECANICO Y LO GEOMETRICO

Líneas arriba se ha hablado de estructuras, en abstracto, como «espacio mecánico». El empleo de estos términos tiene una justificación (ajena por completo a la retórica superficial del tecnicismo que suena más o menos bien).

Es muy importante resaltar aquí, precisamente, el sesgo «mecánico» que el tratamiento del análisis estructural ha tenido históricamente frente al aspecto «geométrico» (y no precisamente porque la Mecánica no incluya consideraciones geométricas, dado que la Geometría es anterior históricamente a la Mecánica); «mecánico» lo entendemos aquí en un sentido restringido a nivel de «estático» o «dinámico», más cercano al empleado clásicamente en el ámbito de las estructuras.

Dentro de una concepción causa-efecto, tanto las acciones, de las que se parte en el análisis, como los efectos, que se buscan mediante el mismo, incluyen en paralelo ambos aspectos, el mecanismo y el geométrico, perfectamente diferenciables.

Posiblemente una razón del desequilibrio histórico en perjuicio de la geometría sea debido a la función más urgente (y también casi única en el pasado, que no en la actualidad) del análisis: que la estructura no colapse, no «se caiga», esto es, en definitiva, el carácter *resistente* clásico del análisis estructural. Y lo resistente se ha venido asociando siempre con lo mecánico (tensional, etc.) y no con lo geométrico, aunque desde la perspectiva actual esto sea ya más que discutible.

Por supuesto, esta afirmación del sesgo mecánico en detrimento del geométrico no significa que no se hayan considerado acciones geométricas (el problema de las deformaciones por cambios y gradientes térmicos, por ejemplo, es antiguo, no sólo en su conocimiento, sino en su tratamiento) o, mucho menos, efectos geométricos. Se trata más bien

de un desequilibrio en las bases y en el planteamiento del análisis. Tampoco significa que esto haya sido igual en todas partes y por todos los autores; si puede hablarse de escuelas nacionales en la materia, existen algunas donde este desequilibrio no ha sido tan intenso, como es el caso de la italiana.

En cuanto a las acciones la parte mecánica estaría representada por lo que genéricamente se conoce por las cargas, del tipo que sean, mientras que lo geométrico abarca las deformaciones y los corrimientos (es de destacar que, de forma un tanto indicativa en el sentido apuntado más arriba, se suele añadir el adjetivo «impuestas» a estas acciones geométricas). Al otro lado del análisis, los efectos son en parte de tipo mecánico (esfuerzos, reacciones, tensiones, etc.) y en parte de tipo geométrico (curvaturas, giros, desplazamientos, deformaciones, etc.).

Son bien conocidas, por otra parte, dualidades tales como tensión-deformación (a nivel del material), esfuerzo-deformación (a nivel de la sección, de los tipos momento-curvatura, axil-elongación, cortante-distorsión) o reacción-coacción (en los apoyos y otras zonas de la estructura), entre factores mecánicos y geométricos.

Pero esta dualidad en paralelo de lo geométrico y de lo mecánico no se manifiesta únicamente en lo que podríamos llamar la entrada y la salida del análisis, sino en la propia naturaleza del mismo. En efecto, las condiciones que configuran el análisis estructural pueden dividirse en tres tipos:

- Condiciones de equilibrio (mecánicas).
- Condiciones de compatibilidad (geométricas).
- Condiciones del material (tenso-deformacionales).

Las primeras, puramente mecánicas, establecen, dada una geometría y unas coacciones de la estructura, el equilibrio entre las cargas (si existen), los esfuerzos y las reacciones (correspondientes a las coacciones de la estructura). Las segundas, puramente geométricas, aseguran la compatibilidad de deformaciones y corrimientos de la estructura, con arreglo a la continuidad, geometría y coacciones de la misma. Las terceras, inherentes al material particular (o materiales) de la estructura, son de tipo mecánico-geométrico (tenso-deformacionales) y sirven de nexo de unión de los dos tipos anteriores, totalmente independientes del material.

En el caso más general, son necesarios los tres tipos de condiciones del análisis para deducir los efectos de las acciones (caso hiperestático: se necesitan más condiciones que las puramente estáticas, esto es, las de equilibrio). No obstante, existen determinadas situaciones en que bastan las

condiciones de equilibrio para deducir los efectos de tipo mecánico (esfuerzos, reacciones, tensiones) derivándose ya de estos, a través de las condiciones (tenso-deformacionales) del material, los efectos de tipo geométrico (deformaciones y corrimientos, en general), teniendo en cuenta también las condiciones de compatibilidad (caso isostático: se necesitan exactamente las condiciones estáticas, las de equilibrio).

La combinación de la mayor o menor complejidad de la geometría de la estructura, esto es, del espacio estructural (unidimensional, recto o curvo, o bidimensional, planos o espaciales; tridimensional) y de sus coacciones, del sistema mecánico (estático o dinámico), de la naturaleza de los sistemas geométricos de deformaciones (deformaciones planas o no planas, grandes deformaciones o pequeñas, etc.) y de las propiedades tenso-deformacionales del material (elasticidad, plasticidad, viscosidad, etc.) de la estructura (o materiales, en cuyo caso es obvio el aumento de complejidad), configura la mayor o menor dificultad del planteamiento y resolución del análisis.

Pero, además, bajo la coincidencia de ciertas situaciones concretas de todos estos factores en juego, pueden producirse evidentes simplificaciones en el análisis, en relación al planteamiento teórico riguroso del mismo, que proporcionan aproximaciones suficientes. El caso más claro es el análisis de la llamada pieza lineal, la cual, en ciertas condiciones, puede ser estudiada en gran parte como un espacio unidimensional a partir del concepto de sección, en lugar de ser analizada como espacio tridimensional a partir del elemento paralelepípedo. Por supuesto es el caso más claro pero no el único (en la mayoría de los casos de análisis de estructuras bidimensionales se hacen similares simplificaciones, reduciendo un problema tridimensional a uno bidimensional).

De todas las afirmaciones anteriores podría deducirse que existe un perfecto paralelismo entre lo geométrico y lo mecánico en todo el proceso del análisis estructural, hasta el punto de ser aspectos duales simétricos. Sin embargo, si bien esto es cierto en la cualidad no lo es ni formalmente ni en las implicaciones de ambos campos en el análisis. Dentro de la perspectiva del análisis estructural que estamos considerando, el aspecto geométrico es el que plantea ciertamente más implicaciones y por ende más dificultades en su tratamiento (desde la geometría de la propia estructura hasta la geometría de las deformaciones); por el contrario, el aspecto geométrico es quizá lo más primario e intuitivo en la comprensión física del comportamiento estructural.

Esto que ahora se comenta se verá perfectamente al analizar más tarde unos cuantos casos concretos, pero ya de entrada baste recordar que la

clásica división en distintos órdenes del análisis estructural (primero, segundo, etc.) está directamente asociada a las implicaciones de las deformaciones y que la sencillez de la geometría, tanto de la estructura (piezas rectas, estructuras planas) como de las deformaciones (deformaciones planas, deformaciones pequeñas), es un requisito fundamental para posibles simplificaciones del análisis.

No queremos insistir más en resaltar la importancia de lo geométrico porque esto no trata ni mucho menos de ser un alegato; únicamente destacarlo al mismo nivel que lo mecánico en lo cualitativo e incluso por encima del mismo en cuanto a sus implicaciones en la dificultad del análisis. En este sentido, dominar la geometría es dominar el análisis estructural.

3. LAS CONDICIONES DEL ANALISIS

Después de estas consideraciones, conviene volver de nuevo a las condiciones del análisis estructural y estudiar sus implicaciones por separado.

Dada una estructura y unas acciones sobre ella, y establecido un cierto nivel del análisis, existen en general infinitas soluciones mecánicas (sistemas de esfuerzos, reacciones y tensiones) que satisfacen las condiciones de equilibrio, así como infinitas soluciones geométricas (sistemas de deformaciones y corrimientos) que satisfacen las condiciones de compatibilidad. Al introducir en la estructura un material determinado, con unas características tenso-deformacionales concretas, el número de soluciones se concreta también (varias, una o ninguna).

Con independencia de esto, a veces se concede especial relevancia a un solo tipo de condiciones, en general a las de equilibrio, forzando a que el análisis sea isostático; este caso es distinto de aquel en que, planteado un cierto nivel de análisis, existen casos particulares donde el análisis resulta isostático. Aquí el isostatismo se impone de entrada. Un ejemplo es el análisis de membrana en las láminas, en el cual se da especial relevancia a los esfuerzos en la superficie de la lámina, despreciando flexiones y cortantes; además, al no considerarse para nada condiciones de compatibilidad, se supone que no son operantes en absoluto, lo que en general no es cierto o, al menos, debe ser tanteado. Esta forma de plantear el análisis no es ajena, desde luego, a la experiencia más o menos generalizada de que, dentro de ciertos límites, las estructuras tienden a comportarse de la manera en que son concebidas en el análisis y proyectadas en consecuencia, por lo que se impone asegurar como mínimo alguna forma de equilibrio («para que no se caiga», dentro de la concepción resistente del análisis); desde el punto de vista que aquí se adopta, esto está ligado al hecho de que, al menos en

los materiales estructurales conocidos hasta la fecha, sus características tenso-deformacionales presentan en mayor o menor medida tendencia a la plastificación, creciendo la deformación a tensión constante (e incluso disminuyendo ésta) en las fases previas a la rotura.

Lo anterior tampoco es ajeno al hecho de que entre todas las formas posibles de equilibrio que, para un material determinado, supongan compatibilidad, la estructura adopta la que supone menos deformaciones (y menos tensiones, ya que ambos van ligados por el material de forma más o menos proporcional). Pero entramos en un tema físico, el energético, que, pudiendo decir que se encuentra en los fundamentos del análisis a nivel distinto que el planteado en estas páginas, no nos interesa aquí y ahora. Es bien conocida la relación entre la formulación energética y la que corresponde a las condiciones de equilibrio y compatibilidad que aquí abordamos. Sólo señalaremos que la formulación energética representa quizá la forma más sintética de plantear el análisis; por el contrario, el planteamiento que aquí hacemos se coloca en el otro extremo: analizar *por separado* las distintas condiciones que conforman el análisis estructural y sus implicaciones en el mismo.

Como consideración previa final conviene apuntar que, en teoría y en general, para una misma estructura con unas determinadas acciones existen diferentes niveles en los cuales *plantear* el análisis estructural; aunque por costumbre, sancionada más o menos por la experiencia o por razones de índole teórica (de tipo muy fundamental o físico, como las energéticas, o matemático, como los ajustes de modelos o niveles estructurales más sencillos), en la práctica pueda sólo existir uno.

Un nivel de análisis queda definido cuando se explicita con toda claridad su elemento básico (su «átomo», en otras palabras) y los factores tanto mecánicos (tensiones, esfuerzos, reacciones, etc.) como geométricos (deformaciones, curvaturas, elongaciones, desplazamientos, etc.) que se corresponden dualmente, señalando los que verdaderamente entran en juego en el mismo. En particular, tanto las acciones como los efectos deben definirse «a priori», correspondiendo a un mismo nivel (no tendría sentido, por ejemplo, analizar una estructura lineal como tal, suponiendo deformaciones planas, si se introducen como acciones deformaciones que no lo son; habría que pasar a otro nivel, en general).

4. ESTRUCTURAS LINEALES PLANAS: LINEALIDAD Y NO LINEALIDAD

Después de esta prolongada introducción, pasemos ya a analizar en concreto, dentro de la perspectiva que aquí se aborda, las estructuras lineales planas con acciones y efectos en su plano, particu-

larizando incluso en aquellas de geometría más sencilla, las compuestas por piezas rectas. Es bien conocido que, dentro de ciertas condiciones, fundamentalmente geométricas, se pasa con poco error de un nivel de análisis tridimensional a uno bidimensional (donde no cuenta ya la dimensión perpendicular al plano de la estructura) y de éste a uno unidimensional (donde puede llegarse a prescindir de otra de las dimensiones, introduciendo el concepto de sección y los de esfuerzos y deformaciones de la misma, para trabajar de hecho sobre la directriz de cada pieza, como si no tuviera dimensiones transversales).

Se ha hablado de sección y de esfuerzos (flexiones, axiles, cortantes) sobre la misma. En realidad, el paso de lo bidimensional a lo unidimensional no evita que no se considere en un cierto nivel el análisis según la otra dimensión; lo que ocurre es que éste se escalona y se simplifica en forma de:

- Análisis a nivel sección (según la dimensión transversal o canto).
- Análisis a nivel estructura (según la dimensión de la directriz).

El análisis a nivel sección, que ya implica la hipótesis de deformaciones planas, repite las mismas condiciones de siempre:

- Condiciones de equilibrio entre esfuerzos de la sección y tensiones del material (o materiales).
- Condiciones de compatibilidad entre deformaciones de la sección y deformaciones del material (o materiales).
- Condiciones del material (o materiales), características tenso-deformacionales del mismo.

Aquí puede hablarse también de isostatismo e hiperestatismo (caso este último en el que el material es heterogéneo o, en otras palabras, puede hablarse de distintos materiales con diferentes características tenso-deformacionales).

Del análisis a este nivel se obtienen las características tenso-deformacionales de la sección, que entran como condiciones del material en el análisis a nivel estructura, el cual queda configurado así:

- Condiciones de equilibrio, entre cargas (si existen), esfuerzos de las secciones y reacciones de la estructura.
- Condiciones de compatibilidad, entre las deformaciones de las secciones y la geometría y coacciones de la estructura.
- Condiciones del material, características tenso-deformacionales de las secciones.

Una vez delimitado el ámbito de las estructuras que vamos a considerar y definido su elemento, la sección, juntamente con el análisis que a tal nivel elemental se realiza, conviene precisar con claridad una serie de factores geométricos que, como es frecuente en la práctica de este tipo de análisis, se suponen de entrada. Estos son, a parte de que las deformaciones de las secciones son planas:

- Las deformaciones son pequeñas.
- Las deformaciones de las secciones se reducen a cambios en la curvatura (o a curvaturas, ya que las piezas son rectas en principio) o, dicho de otra manera, sólo se consideran deformaciones de flexión, despreciando las axiles (elongaciones) y las cortantes (distorsiones).

Puede apreciarse la cantidad de simplificaciones y omisiones que suponen el análisis, a este nivel que en la práctica puede llamarse normal, respecto de un planteamiento más riguroso teóricamente.

Por otro lado hay que recordar que, dentro de estas hipótesis, pueden distinguirse todavía dos órdenes:

- Primer orden, en que la geometría de la estructura se considera inalterada en las condiciones de equilibrio.
- Segundo orden, en que al deformarse la estructura, la geometría de ésta se considera alterada en las condiciones de equilibrio, siendo los desplazamientos no despreciables en ellas, aunque sean pequeños (recordemos que, en general, esto es así en estructuras geoméricamente esbeltas, al menos en una dimensión, en presencia de esfuerzos normales a la misma, como soportes, arcos o láminas).

Analicemos por separado las condiciones del análisis a este nivel.

Condiciones geométricas.

Teniendo en cuenta la geometría de estas estructuras, compuestas por piezas rectas, la consideración geométrica de la deformada de cada pieza (desplazamiento normal a la directriz) no sólo es inmediata y directa como una función $y = y(x)$ de la posición de la sección en la pieza, sino que, incluyendo además la hipótesis de pequeñas deformaciones, puede suponerse con gran aproximación que la curvatura $c(x) = y''(x)$, lo que establece una relación tan simple como importante entre las deformaciones de las secciones (curvaturas) y los desplazamientos de la estructura. De esta relación deriva la linealidad existente entre curvaturas y

deformadas en una estructura dada, así como el hecho de que el conjunto de las deformadas compatibles (que son en general infinitas) en una estructura forma espacio vectorial (la diferencia o suma de dos deformadas compatibles es compatible y el producto por constante de deformada compatible también lo es). Téngase presente que las condiciones de borde (de coacción en los apoyos) son también lineales (en general de dos tipos: $y(x_i) = 0$ ó $y'(x_i) = 0$) y que la estructura conserva su continuidad al deformarse (igualdad de los valores de $y(x)$ y de $y'(x)$, equiparable al giro, en los nudos o puntos de unión de diferentes piezas). Como puede apreciarse, en todas estas consideraciones no aparece para nada referencia alguna a las condiciones de equilibrio ni a las del material; son puramente geométricas y de ellas se deriva la *linealidad geométrica* en este nivel del análisis.

En este punto y dentro de este contexto, cabe comentar, en particular, que los conocidos teoremas de Mohr se demuestran únicamente en términos geométricos en función de las curvaturas (el primero es inmediato; el segundo, mediante superposición, puesto que ello es posible, de los efectos producidos por curvaturas en sucesivas secciones de longitud finita y paso al límite, longitud diferencial, con lo que se llega a una integral).

Condiciones mecánicas.

Aquí cabe distinguir entre el análisis en primer orden y segundo orden.

En primer orden, la linealidad entre cargas y esfuerzos de las secciones, se deriva directamente de los principios de la Estática, teniendo en cuenta que la geometría de la estructura no varía. En general, si una estructura es hiperestática de grado n los esfuerzos en una sección genérica pueden considerarse como combinación lineal de los esfuerzos debidos a las cargas y a las n incógnitas hiperestáticas (momentos, fuerzas, reacciones, etc.) tomadas en el seno de la estructura, establecidos todos los esfuerzos en la configuración isostática correspondiente.

Está claro que, en estas circunstancias, las condiciones de equilibrio son lineales. Existe *linealidad mecánica*.

Por otro lado es obvio que el sistema de esfuerzos en la estructura, producido por cada incógnita hiperestática, es autoequilibrado (se entiende, equilibrado con sus reacciones correspondientes). En tal situación el sistema resultante de la combinación lineal de los sistemas de esfuerzos producidos por las n incógnitas hiperestáticas es también autoequilibrado. Puede decirse, generalizando, que el conjunto de esfuerzos autoequilibrados en una es-

estructura hiperestática de grado n forma espacio vectorial de dimensión n .

En particular, por la geometría de las estructuras compuestas por piezas rectas, resulta que en este caso los esfuerzos autoequilibrados en las mismas, poseen leyes $f(x)$ que son lineales (momentos flectores) y constantes (esfuerzos axiales y cortantes).

En segundo orden, se pierde la linealidad mecánica por causa de la influencia en los esfuerzos de la geometría (deformada) de la estructura, la cual ya no es un dato constante de entrada del análisis, sino un efecto o resultado del mismo.

Condiciones del material.

Como ya se ha visto, corresponden estas condiciones a las características tenso-deformacionales de la sección, derivadas del análisis a dicho nivel. Suponen una relación entre esfuerzos y deformaciones de la sección que, con las hipótesis que se consideran en cuanto a estas últimas (sólo curvaturas) y la relación entre tensiones y esfuerzos de la sección, puede formalizarse de una manera general así:

$$c(x) = c(x, M(x), N(x))$$

que corresponde al diagrama momento-axil-curvatura, que depende de la sección y , por tanto, de su posición x . Puede formalizarse también como:

$$M(x) = M(x, c(x), N(x))$$

Si el material es homogéneo, lineal y elástico, el análisis a nivel sección conduce, como es bien conocido, a $M(x) = K(x) \cdot c(x)$, donde la llamada rigidez, $K(x)$, es $K(x) = E \cdot I(x)$ siendo E el módulo de elasticidad del material e $I(x)$ la inercia de la sección. En este caso, la condición tenso-deformacional es muy simple y lineal. Existe *linealidad por el material*. Siendo los tres tipos de condiciones lineales el *análisis en primer orden es lineal*, existiendo linealidad entre acciones y efectos.

En el caso general, ya mencionado, la condición del material no es lineal, por lo que, a pesar de que las otras (geométricas y mecánicas) lo sean el *análisis en primer orden no es lineal*.

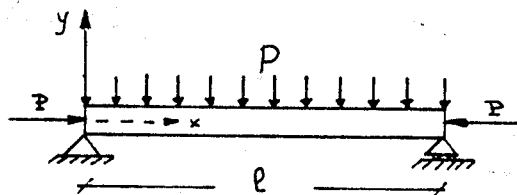
5. EJEMPLOS

Para ilustrar mejor todas estas consideraciones anteriores, llegando a lo más concreto, expondremos a continuación unos ejemplos muy sencillos, de estructura isostática y de hiperestática, con acciones tipo carga, deformación y corrimiento.

ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

Análisis en primer orden.

CARGAS



Sección constante de inercia I .

$$A) \text{ Equilibrio: } M(x) = \frac{p x (l - x)}{2}$$

$$N(x) = -P$$

$$V(x) = -p \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

Necesarias y suficientes para calcular los efectos mecánicos (isostatismo).

LINEALIDAD

B) *Compatibilidad*: No son operativas para calcular efectos mecánicos (isostatismo). Sí para calcular efectos geométricos:

$$c(x) = c_M(x) = y''(x) \Leftrightarrow y(x) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

LINEALIDAD

C) *Material*: En general, $M(x) = M(x, c_M(x), N(x))$, NO LINEALIDAD.

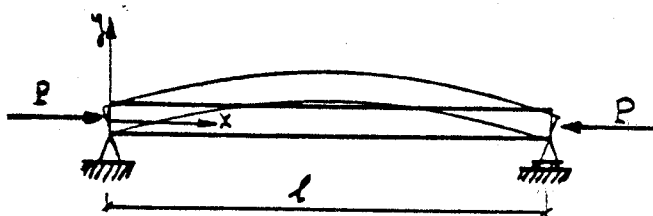
CASO PARTICULAR: Material homogéneo, elástico y lineal $M(x) = K \cdot c_M(x)$ donde K (rigidez) = $E I$. LINEALIDAD.

Los efectos geométricos se obtienen, a partir de las condiciones B), sustituyendo en ellas las A) y C), integrando dos veces $y''(x)$ e imponiendo las condiciones de borde:

$$y(x) = \frac{P}{24 K} (-x^4 + 2 l x^3 - l^3 x)$$

DEFORMACIONES

$$c_A(x) = c_0 \text{ (soleamiento, por ejemplo)}$$



REFLEXIONES SOBRE LAS BASES DEL ANALISIS DE ESTRUCTURAS

A) *Equilibrio*: Condiciones idénticamente nulas, salvo $N(x) = -P$.

B) *Compatibilidad*:

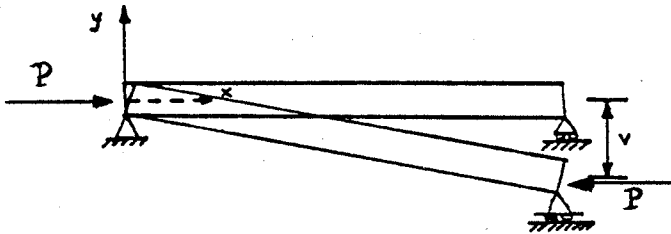
$$c(x) = c_0 = y''(x) \Leftrightarrow y(x) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

De aquí se obtiene directamente el valor de la deformada (arco de círculo, evidentemente).

C) *Material*: No son operativas.

DESPLAZAMIENTOS

$$y(l) = v \text{ (descento de apoyo)}$$



A) *Equilibrio*: Condiciones idénticamente nulas, salvo $N(x) = -P$.

B) *Compatibilidad*:

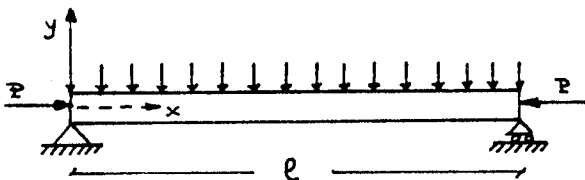
$$c(x) = y''(x) = 0 \Leftrightarrow y(x) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = v \end{cases}$$

De aquí se obtiene directamente el valor de la deformada (recta).

C) *Material*: No son operativas.

Análisis en segundo orden.

CARGAS



Sección constante de inercia I .

A) *Equilibrio*: $M(x) = \frac{p x (l - x)}{2} - P y(x)$

$$N(x) = -P \quad \text{NO LINEALIDAD}$$

B) *Compatibilidad*:

$$c(x) = c_M(x) = y''(x) \Leftrightarrow y(x) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

LINEALIDAD

C) *Material*: En general, $M(x) = M(x, c_M(x), N(x))$, NO LINEALIDAD.

CASO PARTICULAR: Material homogéneo, elástico y lineal, $M(x) = K \cdot c_M(x)$ donde $K = EI$. LINEALIDAD.

Conjugando los tres tipos de condiciones se resuelve el análisis.

En el caso particular de condición del material lineal, se llega a la ecuación diferencial lineal:

$$M(x) = K \cdot c(x) = K \cdot y''(x) = \frac{p x (l - x)}{2} - P \cdot y(x)$$

$$\text{con } y(0) = y(l) = 0$$

es decir:

$$K \cdot y''(x) + P y(x) = \frac{p x (l - x)}{2} \Rightarrow \text{condiciones}$$

$$\text{borde } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

de donde:

$$y(x) = \frac{p x (l - x)}{2 P} + \frac{K \cdot p}{P^2} + C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{K}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{K}} x$$

con:

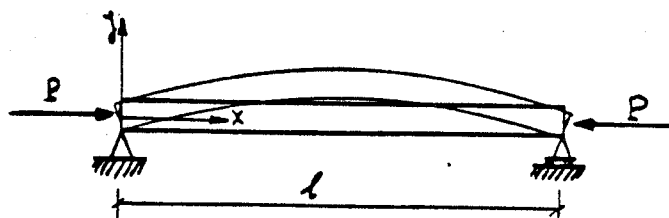
$$C_1 = \frac{-\frac{K p}{P^2} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{K}} l \right)}{\sin \sqrt{\frac{P}{K}} l}$$

$$C_2 = \frac{-K p}{P^2}$$

Es fácil observar que, al irse acercando P al valor de la carga de Euler $\left(P = \frac{\pi^2}{l^2} K \right)$, la deformada crece muy rápidamente, por lo que la hipótesis de deformaciones pequeñas ya no se mantiene a dicho nivel y no es aplicable el análisis que aquí consideramos.

DEFORMACIONES

$$c_1(x) = c_0 \text{ (soleamiento, por ejemplo)}$$



A) *Equilibrio*: $M(x) = -P \cdot y(x)$
 $N(x) = -P$ NO LINEALIDAD

B) *Compatibilidad*:

$$c(x) = c_0 + c_M(x) = y''(x) \Leftrightarrow y(x) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

LINEALIDAD

C) *Material*: En general, $M(x) = M(x, c_M(x), N(x))$, NO LINEALIDAD.

CASO PARTICULAR: $M(x) = K \cdot c_M(x)$, donde $K = EI$, LINEALIDAD.

En este caso particular, conjugando las tres condiciones, se llega a la ecuación diferencial lineal:

$$K \cdot y''(x) + P \cdot y(x) = K \cdot c_0 \Leftrightarrow \text{condiciones}$$

$$\text{borde} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

de donde:

$$y(x) = \frac{K \cdot c_0}{P} + C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{K}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{K}} x$$

con:

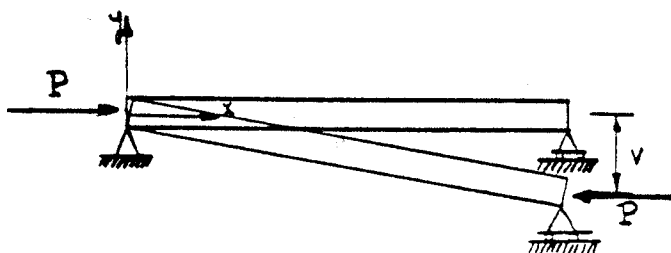
$$C_1 = \frac{-\frac{K \cdot c_0}{P} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{K}} l\right)}{\sin \sqrt{\frac{P}{K}} \cdot l}$$

$$C_2 = -\frac{K \cdot c_0}{P}$$

También en este caso, al aproximarse P al valor de la carga de Euler $\left(P = \frac{\pi^2}{l^2} K\right)$, la deformada crece muy rápidamente, con la consiguiente repercusión sobre la hipótesis de deformaciones pequeñas.

DESPLAZAMIENTOS

$$y(l) = v \text{ (descenso de apoyo)}$$



A) *Equilibrio*: $M(x) = -P \cdot y(x)$
 $N(x) = -P$ NO LINEALIDAD

B) *Compatibilidad*:

$$c(x) = c_M(x) = y''(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = v \end{cases}$$

LINEALIDAD

C) *Material*: En general, NO LINEALIDAD.

CASO PARTICULAR: $M(x) = K \cdot c_M(x)$ donde $K = EI$, LINEALIDAD.

En este caso, se llega a $K \cdot y''(x) + P \cdot y(x) = 0$

$$\text{con} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = v \end{cases} \text{ de donde } y(x) = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{K}} x,$$

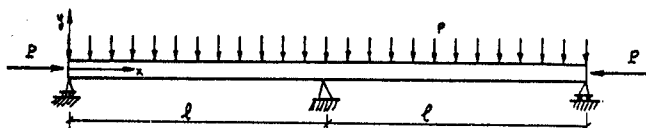
$$\text{con } C_1 = \frac{v}{\sin \sqrt{\frac{P}{K}} l}, \text{ por lo que, al acercarse } P$$

al valor $\frac{\pi^2}{l^2} K$, ocurre lo que en los casos estudiados anteriormente, respecto a la hipótesis de deformaciones.

ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

Análisis en primer orden.

CARGAS



Sea una viga continua de sección constante (inercia I), de la cual, por simetría, sólo estudiaremos la parte izquierda.

A) *Equilibrio*:
$$M(x) = \frac{p x (l - x)}{2} + \frac{X x}{l}$$
$$N(x) = -P, \quad \text{LINEALIDAD}$$

(X es la incógnita hiperestática: momento flector sobre apoyo central.)

B) *Compatibilidad*:

$$c(x) = c_M(x) = y''(x) \Leftrightarrow y(x)$$

con

$$y(0) = y(l) = y(2l) = 0$$

o bien, por simetría

$$y(0) = y(l) = y'(l) = 0$$

C) *Material*: En general, $M(x) = M(x, c_M(x), N(x))$, NO LINEALIDAD.

CASO PARTICULAR: Material homogéneo, elástico y lineal: $M(x) = K \cdot c_M(x)$ donde $K = E \cdot I$, LINEALIDAD.

Conjugando las tres condiciones se resuelve el análisis.

En el caso particular de condición del material lineal, al realizar la doble integración de $y''(x)$ e imponer las condiciones de borde, resulta un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas (X y dos constantes de integración):

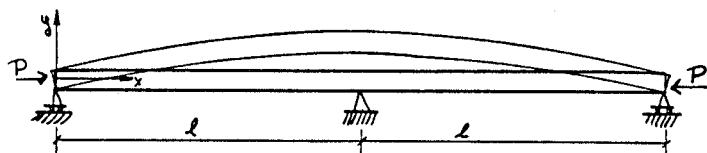
$$X = -\frac{p l^2}{8}$$

$$y(x) = \frac{p}{48 \cdot K} (-2x^4 + 3lx^3 - l^3x)$$

$$M(l) = X$$

DEFORMACIONES

$$c_A(x) = c_0 \text{ (soleamiento, por ejemplo)}$$



Sea una viga continua de sección constante (inercia I), de la cual, por simetría, estudiaremos la viga de la izquierda.

A) *Equilibrio*:
$$M(x) = \frac{X x}{l} \quad (\text{X es la incógnita hiperestática: momento flector sobre apoyo central})$$
$$N(x) = -P, \quad \text{LINEALIDAD}$$

B) *Compatibilidad*:

$$c(x) = y''(x) = c_0 + c_M(x) \Leftrightarrow y(x)$$

con
$$y(0) = y(l) = y(2l) = 0$$

o bien, por simetría

$$y(0) = y(l) = y'(l) = 0$$

LINEALIDAD

C) *Material*: En general, $M(x) = M(x, c_M(x), N(x))$, NO LINEALIDAD.

CASO PARTICULAR: Material homogéneo, elástico y lineal: $M(x) = K \cdot c_M(x)$, donde $K = E \cdot I$, LINEALIDAD.

Conjugando los tres tipos de condiciones se resuelve el análisis.

En el caso de material lineal, al realizar la doble integración de $y''(x)$ e imponer las condiciones de borde resulta un sistema lineal de tres ecuaciones como en el caso anterior:

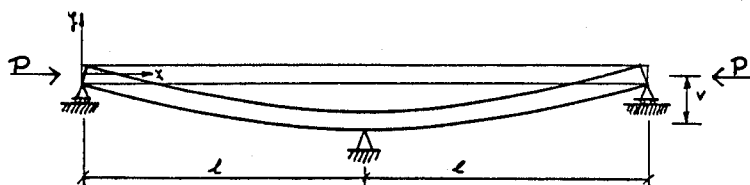
$$X = -\frac{3}{2} K c_0 \quad (\text{como } c_0 \text{ es negativo, } X \text{ es positivo.})$$

$$y(x) = \frac{c_0}{2} \left(-\frac{x^3}{2l} + x^2 - \frac{l}{2} x \right)$$

$$M(l) = X$$

DESPLAZAMIENTOS

$$y(l) = v \text{ (descenso del apoyo central)}$$



Seguiremos estudiando, por simetría, la viga de la izquierda.

A) *Equilibrio*:
$$M(x) = \frac{X x}{l}$$

$$N(x) = -P, \quad \text{LINEALIDAD}$$

B) *Compatibilidad*:

$$c(x) = c_M(x) = y''(x) \Leftrightarrow y(x)$$

con
$$y(0) = y(2l) = 0$$

$$y(l) = v$$

o bien, por simetría

$$y(0) = y'(l) = 0$$

$$y(l) = v$$

LINEALIDAD

REFLEXIONES SOBRE LAS BASES DEL ANALISIS DE ESTRUCTURAS

C) *Material*: En general, como siempre, NO LINEALIDAD.

CASO PARTICULAR: $M(x) = K \cdot c_M(x)$ donde $K = E \cdot I$, LINEALIDAD.

En este caso de material lineal, al realizar la doble integración de $y''(x)$ e imponer las condiciones de borde resulta un sistema similar al de los casos anteriores:

$$X = -\frac{3 K v}{l^2} \text{ (como } v \text{ es negativo, } X \text{ es positivo.)}$$

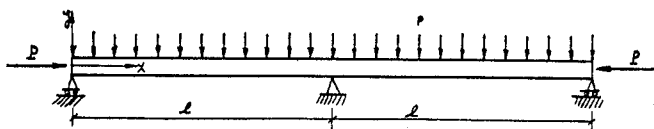
$$y(x) = -\frac{v \cdot x^3}{2 l^3} + \frac{3}{2} \frac{v}{l} x =$$

$$v \left(-\frac{x^3}{2 \cdot l^3} + \frac{3}{2} \frac{x}{l} \right)$$

$$M(l) = X$$

Análisis en segundo orden.

CARGAS



Solución simétrica:

$$y(x) = \frac{1}{P} \left(\frac{p x (l-x)}{2} + \frac{X x}{l} \right) + \frac{K p}{P^2} + C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{K}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{K}} x$$

con:

$$C_1 = \frac{\frac{K p}{P^2} \left(\cos \sqrt{\frac{P}{K}} l - 1 + l \sqrt{\frac{P}{K}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{K}} l \right) - \frac{p l^2}{2 P}}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{K}} l - l \sqrt{\frac{P}{K}} \cos \sqrt{\frac{P}{K}} l}$$

$$C_2 = -\frac{K p}{P^2}$$

$$X = \frac{K p}{P} \left(\cos \sqrt{\frac{P}{K}} l - 1 \right) - C_1 \cdot P \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{K}} l$$

Vamos a estudiarlo sobre la misma viga de sección constante de inercia I .

$$A) \text{ Equilibrio: } M(x) = \frac{p x (l-x)}{2}$$

$$-P y(x) + \frac{X x}{l}$$

$$N(x) = -P, \quad \text{NO LINEALIDAD}$$

B) *Compatibilidad*:

$$c(x) = c_M(x) = y''(x) \Rightarrow y(x)$$

$$y(0) = y(l) = y(2l) = 0$$

$$\text{o bien } y(0) = y(l) = y'(l) = 0$$

(solución simétrica)

LINEALIDAD

C) *Material*: En general, $M(x) = M(x, c_M(x), N(x))$, NO LINEALIDAD.

CASO PARTICULAR: $M(x) = K \cdot c_M(x)$, donde $K = E \cdot I$, LINEALIDAD.

Conjugando los tres tipos de condiciones se resuelve el análisis.

En el caso particular de condición del material lineal, se llega, como en el caso similar de la viga simple, a una ecuación diferencial lineal:

$$K y''(x) + P \cdot y(x) = \frac{p x (l-x)}{2} + \frac{X x}{l}, \text{ condi-}$$

ciones de borde

$$y(0) = y(l) = y(2l) = 0$$

$$\text{o bien } y(0) = y(l) = y'(l) = 0$$

(solución simétrica)

REFLEXIONES SOBRE LAS BASES DEL ANALISIS DE ESTRUCTURAS

En particular, para la carga de Euler, $P = \frac{\pi^2 K}{l^2}$

$$X = -\frac{2 K p}{P} = -\frac{p l^2}{4,935}$$

$$M(l) = X$$

DEFORMACIONES

$c_A(x) = c_0$ (soleamiento, por ejemplo). Sección constante de inercia I .



A) *Equilibrio*: $M(x) = -P \cdot y(x) + X \cdot \frac{x}{l}$
 $N(x) = -P$, NO LINEALIDAD

B) *Compatibilidad*:

$$c(x) = y''(x) = c_0 + c_M(x) \Leftrightarrow y(x)$$

$$y(0) = y(l) = y(2l) = 0$$

o bien

$$y(0) = y(l) = y'(l) = 0$$

(solución simétrica)

LINEALIDAD

C) *Material*: En general, $M(x) = M(x, c_M(x))$, $N(x)$, NO LINEALIDAD.

CASO PARTICULAR: $M(x) = K \cdot c_M(x)$, donde $K = E \cdot I$, LINEALIDAD.

En este caso particular, conjugando los tres tipos de condiciones se llega a la ecuación diferencial lineal:

$$K(y''(x) - c_0) = -P \cdot y(x) + X \cdot \frac{x}{l}$$

es decir:

$$K \cdot y''(x) + P \cdot y(x) = X \frac{x}{l} + K \cdot c_0$$

con las condiciones de borde expuestas más arriba.

Solución simétrica:

$$y(x) = \frac{1}{P} \left(\frac{X x}{l} + K c_0 \right) +$$

$$+ C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{K}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{K}} x$$

con:

$$C_1 = \frac{K c_0}{P} \left(\cos \sqrt{\frac{P}{K}} l - 1 + l \sqrt{\frac{P}{K}} \sin \sqrt{\frac{P}{K}} l \right)$$

$$\sin \sqrt{\frac{P}{K}} l - l \sqrt{\frac{P}{K}} \cos \sqrt{\frac{P}{K}} l$$

$$C_2 = -\frac{K c_0}{P}$$

$$X = K c_0 \left(\cos \sqrt{\frac{P}{K}} l - 1 \right) - C_1 P \sin \sqrt{\frac{P}{K}} l$$

En particular, para la carga de Euler, $P = \frac{\pi^2 K}{l^2}$

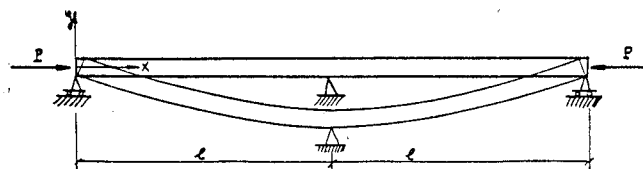
$X = -2 K \cdot c_0$ (como c_0 es negativo, X es positivo).

$$M(l) = X$$

DESPLAZAMIENTOS

$y(l) = v$ (descenso del apoyo central)

Sección constante de inercia I .



A) *Equilibrio*: $M(x) = -P \cdot y(x) + X \cdot \frac{x}{l}$
 $N(x) = -P$, NO LINEALIDAD

B) *Compatibilidad*:

$$c(x) = y''(x) = c_M(x) \Leftrightarrow y(x) \begin{cases} y(0) = y(2l) = 0 \\ y(l) = v \\ \text{o bien} \\ y(0) = y'(l) = 0 \\ y(l) = v \end{cases}$$

LINEALIDAD

(solución simétrica)

C) *Material*: En general, $M(x) = M(x, c_M(x))$, $N(x)$, NO LINEALIDAD.

CASO PARTICULAR: $M(x) = K \cdot c_M(x)$, donde $K = E \cdot I$, LINEALIDAD.

En este caso de material lineal, se llega a la ecuación diferencial lineal:

$$K \cdot y''(x) + P \cdot y(x) = \frac{X x}{l}$$

con las condiciones de borde expuestas más arriba.

Solución simétrica:

$$y(x) = \frac{X x}{P l} + C_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{P}{K}} \cdot x$$

con:

$$C_1 = \frac{v}{\sin \sqrt{\frac{P}{K}} l - \sqrt{\frac{P}{K}} \cos \sqrt{\frac{P}{K}} l}$$

$$X = P \cdot v - C_1 \cdot P \sin \sqrt{\frac{P}{K}} l$$

En particular, para la carga de Euler, $P = \frac{\pi^2 K}{l^2}$

$$X = P \cdot v = \frac{\pi^2 K v}{l^2} = 9,87 \frac{K v}{l^2} \text{ (como } v \text{ es ne-}$$

gativo, X es negativo).

Como puede apreciarse, el momento flector sobre el apoyo central es en esta ocasión:

$$M(l) = -P \cdot v + X = -P \cdot v + P \cdot v = 0$$

6. CONCLUSIONES

En las páginas anteriores se ha ofrecido un panorama general del análisis estructural desde un punto de vista separativo de sus tres tipos de condiciones fundamentales (mecánicas, geométricas y del material), aplicándolo a las estructuras lineales planas con acciones en su plano.

En grandes rasgos, puede decirse que existen dos campos fundamentales, geométrico y mecánico, que abarcan tanto la entrada (acciones de ambos tipos) y la salida (efectos de ambos tipos) como el propio análisis (a través de sus correspondientes condiciones). El nexo de unión es el material de la estructura.

Este paralelismo entre lo mecánico y lo geométrico se decanta, sin embargo, hacia el segundo en

lo que se refiere a las dificultades que introduce en el análisis. Por ello, las simplificaciones que suelen realizarse provienen en general de este campo, tanto en la geometría de la estructura (por ejemplo, asimilación a una estructura formada por elementos rectos o planos) como en la de las deformaciones (por ejemplo, hipótesis de deformación plana).

El estudio por separado de las condiciones da la clave de la linealidad o no linealidad del análisis. En el caso mencionado de estructuras planas esto se desglosa así:

- Linealidad geométrica, cuando se suponen deformaciones planas y pequeñas.
- Linealidad mecánica, cuando se trabaja en primer orden.
- Linealidad del material, cuando las características tenso-deformacionales de éste son lineales a nivel sección.

Esta triple linealidad conduce a la linealidad del análisis.

Inversamente, es inmediato conocer los casos y razones de la no linealidad del análisis:

- No linealidad del material (llamada normalmente «no linealidad física»).
- No linealidad mecánica, en el caso del análisis en segundo orden (llamada normalmente «no linealidad geométrica» porque influye el cambio de geometría de la estructura en las condiciones de equilibrio, pero que no corresponde a lo que aquí se entiende bajo ese nombre).
- No linealidad geométrica, en el caso de que, aun considerando deformaciones planas, éstas no sean pequeñas.

Esto supone que el nivel de análisis en primer orden sólo puede ser no lineal por el material, mientras que en segundo orden y cuando existen grandes deformaciones la no linealidad es intrínseca.

El caso del análisis estructural lineal es el más simple, el más estudiado y, por tanto, el más conocido desde todos los puntos de vista. Dentro de la perspectiva aquí adoptada, suele formalizarse, con independencia de que el método concreto sea directo o iterativo, bien sobre las condiciones mecánicas o bien sobre las geométricas, incluyendo en ellas el resto de condiciones ya sustituidas. Un ejemplo muy claro es la formalización mediante el sistema de matriz de rigidez (condiciones mecánicas) o el de matriz de flexibilidad (condiciones geométricas).

Entre las singularidades del análisis lineal se

cuenta el concepto de líneas de influencia, tan conocidas y utilizadas cuando las acciones son cargas, pero no tanto para otros tipos de acciones, como es el caso de las deformaciones impuestas. (Aquí se manifiesta de nuevo el clásico sesgo mecánico que históricamente ha caracterizado al análisis estructural). Así, en análisis lineal puede hablarse de línea de influencia de cualquier efecto (mecánico o geométrico) producido por cualquier tipo de acción (mecánica o geométrica).

En el caso del análisis estructural no lineal, la concepción separativa supuesta en estas reflexiones puede ser interesante no sólo como base para el análisis y la mejor comprensión del tema sino también como vía para abordar nuevas investigaciones de interés teórico y de gran utilidad práctica.

Como muestra de esto, cabe indicar las amplias posibilidades que ofrece la resolución de problemas no lineales como superposición de casos de análisis lineal, generalmente mediante un proceso iterativo, pivotando sobre las condiciones del material en lugar de hacerlo sobre las mecánicas o las geométricas como es común en el análisis clásico. Esta «tercera vía», de adecuar a las condiciones del material real soluciones que cumplen ya el resto de las condiciones (esto es, soluciones equilibradas y compatibles) no tiene sentido práctico lógicamente en el análisis lineal, donde las condiciones del material se formalizan de manera sencillísima.

El futuro del análisis no lineal en esta dirección, especialmente en casos donde la geometría siga siendo sencilla (primero y segundo órdenes), parece bastante prometedor porque puede unir al cá-

rácter más intuitivo y comprensible del comportamiento de las estructuras una gran potencia, junto con la sencillez propia del análisis lineal. Es evidente que, en la práctica, se impone aquí también el cálculo mediante computador, pero por razones no intrínsecas al planteamiento del análisis, sino por las características de su proceso (iteraciones idénticas) y la envergadura de las estructuras a las que se aplique.

La potencia práctica de esta vía del análisis no lineal estriba sobre todo en la posibilidad de utilizar todos los recursos del análisis lineal, particularmente las líneas de influencia, que encuentran su campo de aplicación idóneo en la repetición de casos lineales en el proceso iterativo (que se suma al clásico de cargas móviles).

Para dar un mayor relieve a las condiciones generales que aquí se han apuntado, llegando a lo concreto, se han incluido unos ejemplos muy simples de estructuras, una isostática y otra hiperestática, que se han tratado en primer y segundo orden, donde se formalizan por separado los tres tipos de condiciones, tomando como acciones tanto cargas como deformaciones y corrimientos. En el caso particular y más simple de material lineal se ha llegado también a sus resultados, bien conocidos en buena parte de los casos. El interés de los mismos es quizá su comparación, especialmente entre el análisis en primer y segundo orden, dentro de la sistematización tanto para las acciones como para efectos, incluyendo en ambos los mecánicos y los geométricos. Con ello se ha querido también dar énfasis, en lo práctico y concreto, al paralelismo existente entre estos dos aspectos del análisis estructural.