

Cálculo de las intersecciones de recta con clotoide

Por A. SAN PEDRO WANDELMER

Cátedra de Matemáticas.

INTRODUCCION

Ante la complejidad de la ecuación de la clotoide, es frecuente el uso en problemas de trazado en carreteras de fórmulas aproximadas que sólo tienen validez para arcos de clotoide de corto desarrollo.

El presente trabajo intenta sentar las bases que, con toda generalidad, permitan el cálculo sistemático, mediante ordenador o calculador de mesa, de las intersecciones de clotoide y recta, con el que se pueden abordar problemas más generales como los de cálculo de las tangentes o normales a la clotoide por un punto.

Se elige como sistema coordenado de referencia el formado por los ejes OXY de la figura, respecto a los cuales resulta cómodo expresar las coordenadas (x, y) de un punto genérico de la clotoide en función de s o de φ . Para ello hacemos uso de la ecuación de la clotoide, $S = A\sqrt{2}\varphi$, y de las conocidas relaciones:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \varphi$$

$$\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} = e^{i\varphi}$$

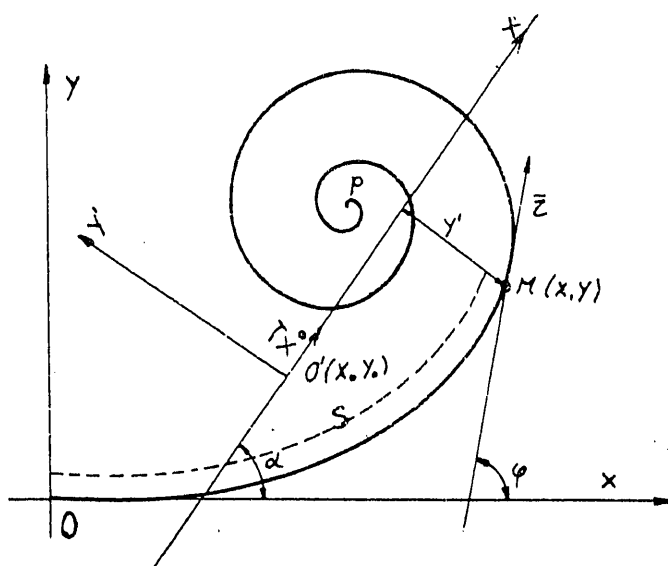
de donde:

$$x + iy = \int_0^s e^{i \frac{s^2}{2A^2}} ds = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{e^{i\varphi}}{\varphi} d\varphi$$

Supongamos definida la recta de un punto O' (x, y) y un versor $\bar{x}'_0$ $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ cuyo momento respecto al polo $P \left(A \frac{\sqrt{\pi}}{2}, A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$ de la clotoide sea positivo y tomemos un sistema directo de ejes $O'X'Y'$, de origen O' y que tenga $\bar{x}'_0$ por versor de $O'X'$, en los que el valor de la ordenada y de un punto $M(x, y)$ de la clotoide será:

$$y' = -\sin \alpha \cdot (x - x_0) + \cos \alpha \cdot (y - y_0) = y'(s) \quad (1)$$

Esta función $y' = y'(s)$ es, simplemente, la expresión de la clotoide en coordenadas (s, y') , de



CALCULO DE LAS INTERSECCIONES DE RECTA CON CLOTOIDE

manera que los valores de s o de φ que satisfagan la ecuación $y'(s) = 0$ definirán los puntos de la clotoide de distancia nula a la recta dada, es decir, las intersecciones que buscamos. Por estas razones, vamos a ver si la función (1) nos dice alguna cosa acerca de las intersecciones mencionadas.

Derivando (1) respecto a s , obtendremos que:

$$\frac{dy'}{ds} = -\sin \alpha \cdot \frac{dx}{ds} + \cos \alpha \cdot \frac{dy}{ds} = -$$

$$-\sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi = \sin(\varphi - \alpha) \quad (2)$$

la cual se anula para los valores de $\varphi \geq 0$, tales que $\varphi = \alpha - k\pi$, lo que nos indica que los puntos de la clotoide cuya distancia a la recta presenta un máximo o un mínimo relativo son los de tangente paralela a la recta. Por otra parte:

$$\frac{d^2 y'}{ds^2} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \cos(\varphi - \alpha) = \frac{s}{A^2} \cos(\varphi - \alpha) \quad (3)$$

cuyos valores para:

$$\varphi = \alpha + 2k\pi \quad \text{son } > 0$$

$$s = 0 \quad \text{ó} \quad \varphi = \alpha + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{son } = 0$$

$$\varphi = \alpha + (2k + 1)\pi \quad \text{son } < 0$$

verificándose, además, que:

$$y'(\alpha + 2k_1\pi) < y'(\alpha + 2k_2\pi)$$

$$y'(\alpha + (2k_1 + 1)\pi) > y'(\alpha + (2k_2 + 1)\pi)$$

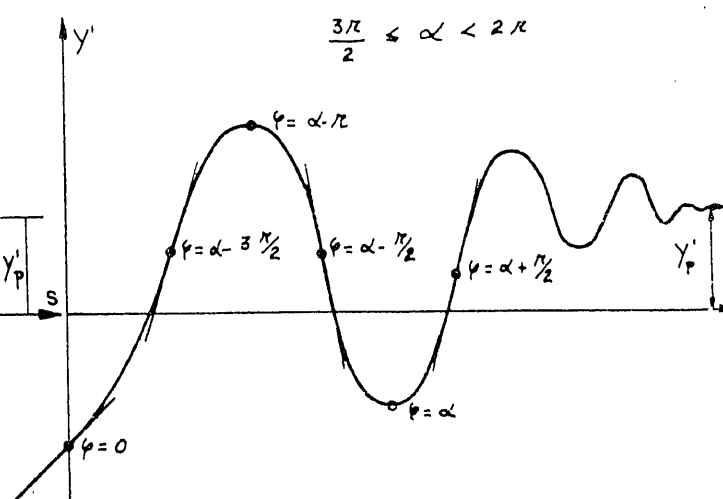
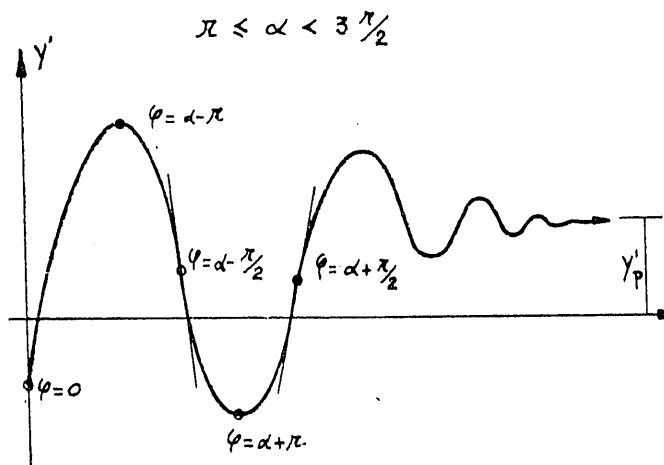
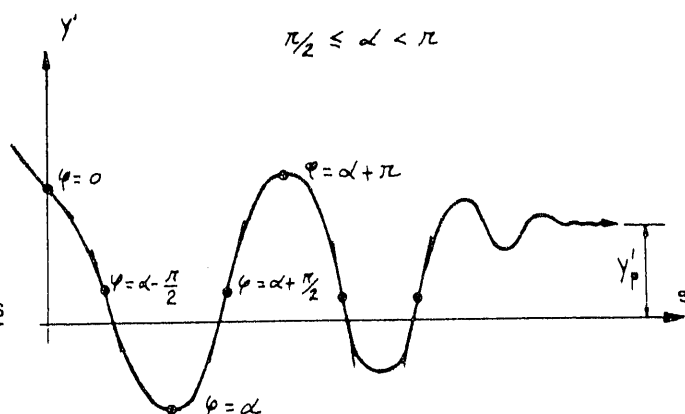
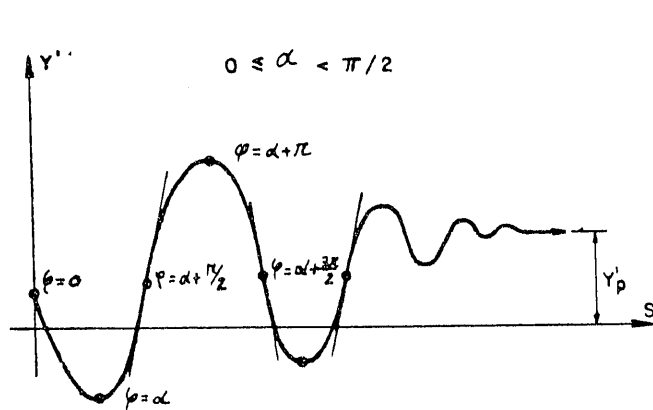
$$\text{si } k_1 < k_2$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(\alpha + 2k\pi) = y'_p =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} y(\alpha + (2k + 1)\pi)$$

(donde y'_p es la ordenada del polo P), en virtud de la forma espiral de la clotoide.

Todo lo anterior nos define los elementos fundamentales de la curva $y' = y'(s)$, cuya forma será:



CALCULO DE LAS INTERSECCIONES DE RECTA CON CLOTOIDE

(c) donde se deduce que:

1.º Si $y'(\alpha + 2k\pi) > 0$, no existirá ninguna raíz en el intervalo $(\alpha + 2k\pi, \infty)$.

2.º Si $y'(\alpha + 2k\pi) \leq 0$, existirá una sola raíz en cada uno de los intervalos $(\alpha + (2k-1)\pi, \alpha + (2k)\pi)$, $(\alpha + 2k\pi, \alpha + (2k+1)\pi)$.

3.º Si $\alpha_0 \geq 0$ es el mínimo de $(\alpha, \alpha - \pi)$ y los valores de $y'(s)$ en $\varphi = 0$ y $\varphi = \alpha_0$ son de signo contrario, existirá una sola raíz en un intervalo cualquiera $(\alpha + 2k\pi, \alpha + (2k \pm 1)\pi)$.

CALCULO DE LAS RAICES

Dado que en cada intervalo $(\alpha + 2k\pi, \alpha + (2k \pm 1)\pi)$ puede existir una sola raíz sencilla o bien una doble en el extremo $\alpha + 2k\pi$, el método de bisección nos permitiría el cálculo de la raíz de dicho intervalo siempre que se tomase éste como intervalo inicial.

No obstante, el método de bisección es relativamente lento en comparación con el de Newton-Raphson, cuyo fundamento es el siguiente: si x_{n-1} es un valor aproximado de una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, se toma como siguiente aproximación el valor x_n de la intersección de la tangente a la curva en x_{n-1} con el eje de las X . Es decir, que:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

que en nuestro caso, conduce a:

$$s_n = s_{n-1} - \frac{y'(s_{n-1})}{\sin(\varphi_{n-1} - \alpha)}$$

La única dificultad de este método consiste en la elección de una primera aproximación que garantice la convergencia hacia la raíz deseada, pero la simple inspección de las figuras anteriores nos in-

dica que la solución inicial a tomar para la determinación de la raíz del intervalo $(\alpha + 2k\pi, \alpha +$

$+ (2k \pm 1)\pi$) es el $\varphi = \alpha + \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi$, correspondiente al punto de inflexión en el que el valor de $|dy'/ds|$ es máximo e igual a 1, y que el problema se puede plantear en el intervalo $(0, \alpha_0)$ donde pueden existir dos puntos de inflexión.

No obstante, como para $\alpha \simeq 2\pi$, $(dy'/ds)_0 = \sin(0 - \alpha) \simeq 0$, el punto de intersección de la tangente a la curva en $\varphi = 0$ puede cortar el eje de las s en valores de s tan grandes como se desee; es claro que la solución a desechar es la $\varphi = 0$.

En resumen, la aproximación n -ésima de la raíz del intervalo $(\alpha + 2k\pi, \alpha + (2k \pm 1)\pi)$ vendrá dada por:

$$s_n = s_{n-1} - \frac{y'(s_{n-1})}{\operatorname{sen}(\varphi_{n-1} - \alpha)} \quad ; \quad s_{n-1} = A\sqrt{2\varphi_{n-1}}$$

con las soluciones iniciales:

$$\varphi_0 = 0 \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq \pi/2 \\ \pi \leq \alpha \leq 3\pi/2 \end{array} \right.$$

(para el cálculo de la raíz en $(0, \alpha_0)$)

$$\varphi_0 = \alpha_0 - \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi/2 \leq \alpha \leq \pi \\ \text{ó} \\ 3\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$\varphi_0 = \alpha + \left(2k \pm \frac{1}{2}\right) \pi$ para el cálculo de las restantes raíces.