

Formulación intrínseca de problemas elásticos en piezas lineales

Por EMILIO GARBAYO MARTINEZ

Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P.

RESUMEN

En este artículo se dan reglas para formular el problema elástico de equilibrio de una pieza lineal, tomando como incógnitas la deformación de la fibra media y el incremento relativo de curvatura. Se utiliza la formulación variacional, de mínimo de la energía total, como herramienta sistemática, que permite estudiar tanto el equilibrio como su estabilidad.

La formulación ofrecida tiene la ventaja teórica, que a menudo lo es también práctica, de expresar la energía interna como un funcional cuadrático de las aludidas incógnitas, incluso en la mayoría de aquellos casos en que la magnitud de desplazamientos y deformaciones no autoriza a suponer como correcta la aproximación mediante el problema linealizado.

INTRODUCCION

En el cálculo de piezas elásticas lineales, resulta a veces interesante eludir la clásica formulación de esfuerzos y desplazamientos y hacer un planteo puramente matemático, determinando la configuración de equilibrio como aquella que minimiza la energía interna más la potencial de las fuerzas exteriores. No siempre es el caso que las fuerzas exteriores deriven de un potencial; tal requerimiento debe satisfacerse, sin embargo, para poder abordar el aludido planteo matemático de mínimo y así supondremos en todo este artículo.

En lo que sigue nos limitaremos al caso de problemas planos y, en tal supuesto, notaremos por (γ) curva directriz de la pieza lineal antes de la deformación. Denotaremos por s la variable longitudinal

o arco sobre (γ) y por $\vec{t}$, $\vec{n}$ los versores tangente y normal, respectivamente, en el punto genérico P de (γ) determinado por el valor de la variable s . La variable ϕ , función de s , denotará el ángulo orienta-

do que la normal $\vec{n}$ forma con un eje ligado a un sistema de referencia fijo, por ejemplo, con el eje de ordenadas.

Cuando las letras anteriores se marquen con un asterisco, es decir (γ^*) s^* $\vec{t}^*$ $\vec{n}^*$ ϕ^* denotarán ele-

mentos respectivos a los que ya denotaban, pero en la configuración deformada.

Es bien conocido que mediante hipótesis auxiliares (por ejemplo, la hipótesis de indeformabilidad de las secciones normales) puede escribirse la energía potencial total como un funcional integral:

$$U = \int_{s_0}^{s_1} F(v, w, v', w', v'', \dots) ds \quad (1)$$

donde F es una expresión, que podría escribirse explícitamente, de las funciones $v(s)$, $w(s)$ y sus derivadas, donde v , w representan las componentes

del desplazamiento $\vec{P} \vec{P}^*$ según los vectores $\vec{n}$ $\vec{t}$, respectivamente.

$$\vec{P} \vec{P}^* = w \vec{t} + v \vec{n} \quad (2)$$

En la fórmula (1) s_0 , s_1 representan los respectivos valores de s para los extremos inicial y final de la pieza elástica considerada. Las funciones v , w y sus derivadas verifican ciertas condiciones de contorno en s_0 y en s_1 que expresan la situación de enlace (apoyos, empotramiento, articulación, etcétera) de los extremos de la pieza.

Las hipótesis auxiliares que se usan en un grandísimo número de casos y que nosotros asumiremos desde ahora corresponden a suponer que las secciones normales a la directriz lo siguen siendo cuando ésta se deforma, y se mueven además rigidamente; por otra parte, se considera que la única tensión que contribuye a la energía interna es la habitualmente denotada e_{ss} , perpendicular a las secciones normales, es decir:

$$U_{(\text{interna})} = \frac{E}{2} \iiint_V e_{ss}^2 dV \quad (3)$$

donde E denota el módulo de elasticidad y V el recinto (de integración) ocupado por la pieza en su configuración previa a deformarse. La fórmula (1) calculada por medio de la (3) no resulta en un funcional cuadrático en v , w por lo que las clásicas ecuaciones de Euler-Lagrange (que expresan la condición necesaria de mínimo anulando la primera

variación, δU) no son lineales. Sólo en los problemas en que desplazamientos y deformaciones pueden suponerse convenientemente pequeños, lo que abarca, sin embargo, una mayoría de los problemas prácticos de la ingeniería de construcción civil, es admisible hacer ciertas aproximaciones para reemplazar el funcional (1) por otro que sea cuadrático.

En el párrafo que sigue se expone un método para representar el funcional (3) de la energía interna, de modo que resulte cuadrático. Ello se logra mediante un cambio de coordenadas curvilíneas, que sustituya las funciones incógnita $v(s)$, $w(s)$ por otras $a(s)$, $b(s)$ definidas así:

$$a(s) = -1 + \frac{ds^*}{ds}, \quad b(s) = -1 + \frac{d\phi^*}{d\phi} \quad (4)$$

Estas coordenadas $a(s)$, $b(s)$ podrían llamarse intrínsecas, en virtud de su analogía con la clásica descripción intrínseca de una curva plana. La función $a(s)$ tiene la sencilla interpretación geométrica del alargamiento unitario de la directriz. Si se hace la hipótesis adicional de que $a(s) = 0$, lo que por ejemplo puede ser plausible para arcos que sean suficientemente apuntados, la función $b(s)$ tiene la interpretación geométrica de variación relativa de la curvatura $1/r$ de la directriz:

$$b(s) = \frac{(1/r^*) - (1/r)}{(1/r)} \quad (5)$$

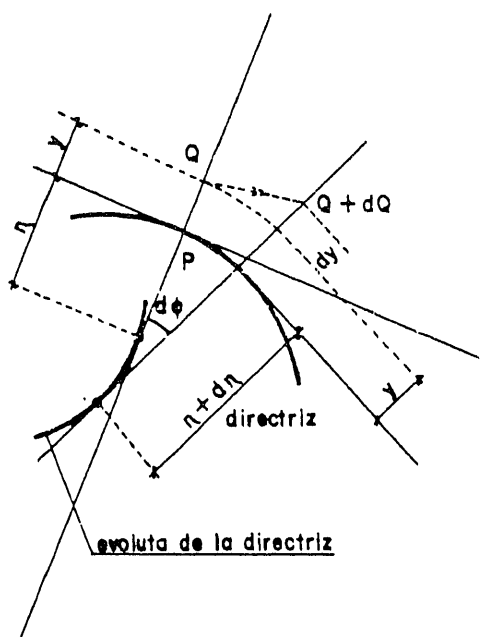
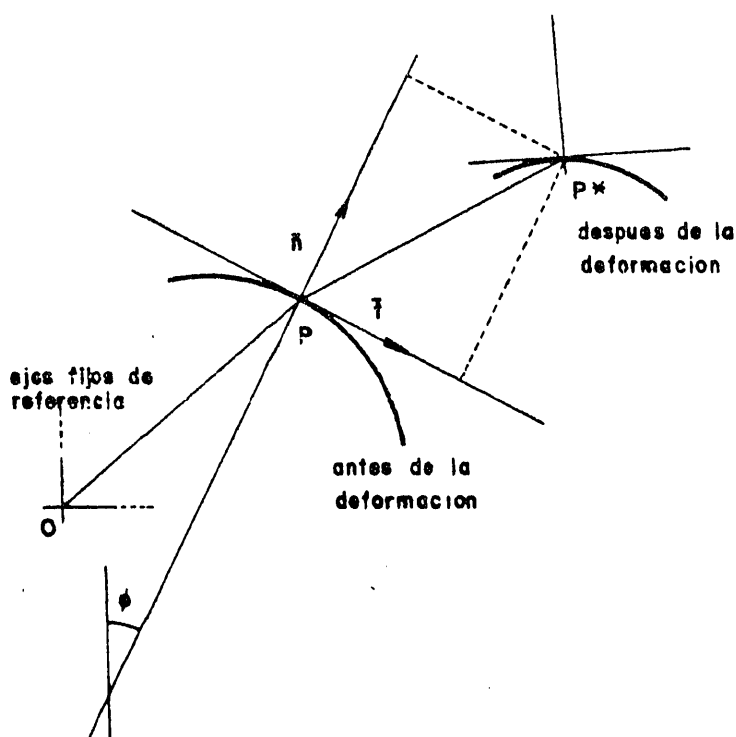
Conviene advertir desde ahora que pese a obtener la energía interna dada por (3) como un fun-

cional cuadrático en $a(s)$, $b(s)$, las ecuaciones del equilibrio no resultarán, en general, lineales ni siquiera semilineales (en el caso de que el potencial de las fuerzas externas no fuere cuadrático ni lineal en $a(s)$, $b(s)$, pero no dependiere de sus derivadas). Lo que esencialmente se debe según veremos, a las condiciones de contorno, que se expresarán en forma mucho menos simple que con las funciones v , w y que condensarán, por así decirlo, el carácter no lineal del problema matemático $\delta U = 0$, que originariamente resultaba del propio funcional (1) de las $v(s)$, $w(s)$.

EXPRESION DE LA ENERGIA INTERNA

Todo punto Q de la pieza lineal viene definido por sus tres coordenadas curvilíneas (s, x, y) donde (x, y) son las coordenadas de Q en los ejes de la sección plana normal, a la cual pertenece, la que a su vez viene situada por el valor s del punto de la directriz que es su centro de gravedad. Es claro que el sistema curvilíneo (s, x, y) es triortogonal y que también lo es el sistema deformado (s^*, x, y) por la hipótesis relativa al desplazamiento de las secciones (nótese que, por la indeformabilidad de éstas, puede identificarse el par x^* , y^* con el par x, y). Podemos también elegir cómodamente los sistemas coordenados definidos por las ternas (ϕ, x, y) , (ϕ^*, x, y) ya que hay una relación simple de s con ϕ y de s^* con ϕ^* por medio de los radios de curvatura de la directriz, antes y después de la deformación:

$$ds = r d\phi, \quad ds^* = r^* d\phi^* \quad (6)$$



Estos sistemas curvilíneos también son triortogonales y permiten expresar fácilmente el cuadrado de las respectivas distancias elementales $d\sigma$, $d\sigma^*$ mediante sencillas consideraciones de geometría diferencial que se resume en la figura, y que pueden escribirse mediante las fórmulas:

$$(d\sigma)^2 = (r + y)^2 (d\phi)^2 + (dy)^2 + (dx)^2 \quad (7)$$

$$(d\sigma^*)^2 = (r^* + y)^2 (d\phi^*)^2 + (dy)^2 + (dx)^2 \quad (8)$$

Las relaciones (4) y (6) permiten expresar $d\sigma^*$ por medio de las variables (ϕ, x, y) previas a la deformación, en la sencilla forma:

$$(r^* + y)^2 (d\phi^*)^2 = \left(r \frac{a+1}{b+1} + y \right)^2 (b+1)^2 (d\phi)^2 \quad (9)$$

Las componentes tensoriales f_{ij} de la deformación se expresan ahora (ver referencia [2]) por las fórmulas:

$$2f_{ij} = g_{ij}^* - g_{ij} \quad (10)$$

donde g_{ij} es el tensor métrico, que expresa el cuadrado de la distancia elemental, en el sistema de coordenadas elegido. Las fórmulas (7) a (9) indican claramente que sólo la componente f_{11} , que notaremos también por $f_{\phi\phi}$, es diferente de cero (*), verificándose:

$$2f_{\phi\phi} = (r(a+1) + y(b+1))^2 - (r+y)^2 \quad (11)$$

La llamada componente «física» e_{ss} del tensor f_{ij} se expresa (ver referencia [2]) mediante la fórmula:

$$(r+y)^2 e_{ss} = f_{\phi\phi} \quad (12)$$

que conduce a la expresión:

$$e_{ss} = \frac{1}{r+y} (ra+yb) \left(1 + \frac{ra+yb}{2(r+y)} \right) \quad (13)$$

En el caso de piezas rectas o arcos esbeltos (mucho mayor que el máximo de y) en los que extensión de la directriz pueda considerarse casi nula ($a \approx 0$) se obtiene la expresión suficientemente aproximada:

$$e_{ss} = \frac{1}{r+y} (ra+yb) \quad (14)$$

con la que operaremos de ahora en adelante.

(*) Esto conduce a una paradoja, que ha sido poco reflexionada en la literatura y que está implícita en la hipótesis de las secciones planas, según se examinará en una nota de próxima publicación.

La fórmula (3) permite calcular la energía interna, si expresamos el elemento integral de volumen en la forma:

$$dV = (r+y) d\phi dx dy \quad (15)$$

La sustitución de (14) y (15) en la (3) nos conduce, tras sencillos cálculos, a expresar:

$$U_{(interna)} = \frac{E}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_0} d\phi \int_A \frac{1}{r+y} (ra+yb)^2 dx dy$$

$$= \frac{E}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_0} (Ca^2 - 2Dab + Db^2) r d\phi \quad (16)$$

donde A indica el área de la sección normal y donde a, b, r son funciones de ϕ solamente (o, lo que es igual, del arco s). Los coeficientes C, D resultan ser funciones de ϕ (o de s) dados por:

$$C = r \int_A \frac{1}{r+y} dx dy \quad (17)$$

$$D = - \int_A y \frac{1}{r+y} dx dy$$

Por una parte, es inmediata la relación $C = A + D$, donde A es el área de la sección normal y , por otra parte, el desarrollo en serie geométrica:

$$\frac{1}{r+y} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{y}{r} + \frac{y^2}{r^2} - \frac{y^3}{r^3} + \dots \right) \quad (18)$$

permite evaluar, tras cálculos simples, el coeficiente D en la forma aproximada:

$$D = \frac{1}{r^2} I + \dots \quad (19)$$

donde I representa el clásico momento de inercia de la sección A respecto al eje x que pasa por su centro de gravedad, es decir:

$$I = \int_A y^2 dx dy \quad (20)$$

Obtenemos así la fórmula final:

$$U_{(interna)} = \frac{E}{2} \int_{s_0}^{s_1} A a^2(s) ds +$$

$$+ \frac{E}{2} \int_{s_0}^{s_1} D (a(s) - b(s))^2 ds \quad (21)$$

que se simplificaría en el caso usual de que A pudiera considerarse constante con s .

EXPRESION DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Si O es un origen fijo y P un punto genérico de la directriz antes de deformarse, la notación * adoptada permite escribir:

$$\vec{t}^* = \frac{d}{ds^*} \vec{OP}^* = \frac{ds}{ds^*} \frac{d}{ds} (\vec{OP} + \vec{PP}^*) \quad (22)$$

si ahora escribimos la (2) y tenemos en cuenta las clásicas fórmulas de Frenet (*) de la geometría diferencial de curvas, llegamos sin dificultad a expresar:

$$\vec{t}^* = H \vec{t} + K \vec{n} \quad (23)$$

donde, si indicamos la derivación $\frac{d}{ds}$ por el acento ' ,

$$H = \left(1 + w' + \frac{v}{r} \right) \frac{ds}{ds^*} \quad (24)$$

$$K = \left(v' - \frac{w}{r} \right) \frac{ds}{ds^*}$$

Es evidente que, al ser $\vec{t}^*$ unitario, la fórmula (23) implica:

$$H^2(s) + K^2(s) = 1 \quad (25)$$

De las relaciones anteriores se deducen sin dificultad las varias condiciones de contorno. Así, por ejemplo, una articulación del extremo s_0 , se expresaría:

$$w(s_0) = v(s_0) = 0 \quad (26)$$

mientras que un empotramiento deslizante equivaldría a la igualdad $\vec{t}_0 = \vec{t}_0^*$, es decir:

$$K(s_0) = v'(s_0) - \frac{1}{r(s_0)} w(s_0) = 0 \quad (27)$$

Si el empotramiento y la articulación se dan conjuntamente:

$$w(s_0) = v(s_0) = v'(s_0) = 0 \quad (28)$$

y análogas condiciones en el otro extremo s_1 .

$$(*) \quad \vec{dOP} = \vec{tds}, \quad r \vec{dt} = -\vec{nds}, \quad r \vec{dn} = \vec{tds} \quad \cdot$$

ECUACIONES INTRINSECAS

Llamaremos así a las relaciones entre las funciones $a(s)$, $b(s)$ definidas por la (4) y los desplazamientos $v(s)$, $w(s)$ dados por la (2). Si derivamos la (23) respecto a s^* obtenemos después de un sencillo cálculo que tenga en cuenta la (24) y las fórmulas de Frenet:

$$\frac{d\vec{t}^*}{ds^*} = \frac{ds}{ds^*} \frac{d\vec{t}^*}{ds} = \frac{ds}{ds^*} \left[\left(H' + \frac{1}{r} K \right) \vec{t} + \left(K' - \frac{1}{r} H \right) \vec{n} \right] \quad (29)$$

Ahora calculamos $d\vec{t}^*/ds^*$, con las fórmulas de Frenet para la directriz deformada y con la propia fórmula (23):

$$\frac{d\vec{t}^*}{ds^*} = -\frac{1}{r^*} \vec{n}^* = +\frac{1}{r^*} (K \vec{t} - H \vec{n}) \quad (30)$$

e igualamos las (29) y (30) para obtener:

$$H' = -\zeta(s) K, \quad K' = \zeta(s) H \quad (31)$$

con:

$$\zeta(s) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \frac{ds^*}{ds} \quad (32)$$

que se expresa sencillamente, por medio de las fórmulas (4) y (6):

$$\zeta(s) = \frac{-1}{r(s)} b(s) \quad (33)$$

INTEGRACION DE LAS ECUACIONES INTRINSECAS

Mediante la integración del sistema diferencial (31) se pueden expresar los desplazamientos $v(s)$, $w(s)$ por medio de las funciones $a(s)$, $b(s)$ y ciertas constantes arbitrarias de integración.

El aludido sistema es lineal homogéneo de coeficientes variables. Su solución general puede darse en forma explícita, si se le escribe en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} H' \\ K' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta(s) \\ \zeta(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} \quad (34)$$

y se comprueba que se dan las condiciones que la teoría de ecuaciones diferenciales establece (ver

referencia [3]) para que la solución sea expresable en la forma matricial exponencial:

$$\begin{pmatrix} H(s) \\ K(s) \end{pmatrix} = \left(\exp \int_{s_0}^s \begin{pmatrix} 0 & -\xi(t) \\ \xi(t) & 0 \end{pmatrix} dt \right) \begin{pmatrix} H_0 \\ K_0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Sin entrar en el detalle del cálculo de la matriz exponencial, que corresponde a técnicas matemáticas ya establecidas, damos la solución general, cuya validez puede comprobarse por sustitución en (31):

$$\begin{aligned} H(s) &= H_0 \cos \xi(s) - K_0 \sin \xi(s) \\ K(s) &= K_0 \cos \xi(s) + H_0 \sin \xi(s) \end{aligned} \quad (36)$$

con:

$$\xi(s) = \int_{s_0}^s \xi(t) dt \quad (37)$$

y donde H_0, K_0 son constantes arbitrarias de integración.

Calculadas así $H(s), K(s)$, las ecuaciones (24) permiten plantear un nuevo sistema diferencial lineal, que ahora es no homogéneo, para obtener las $v(s), w(s)$:

$$\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K \frac{ds^*}{ds} \\ -1 + H \frac{ds^*}{ds} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Según los resultados clásicos (ver referencia [3]) la solución general del sistema (38) se tiene sumando a una solución particular, la solución general del sistema homogéneo asociado. La última es de la misma forma que la del sistema (34) y se escribe:

$$\begin{aligned} p_0 \cos \sigma(s) - q_0 \sin \sigma(s) \\ q_0 \cos \sigma(s) + p_0 \sin \sigma(s) \end{aligned} \quad (39)$$

con la notación:

$$\sigma(s) = \int_{s_0}^s \frac{-1}{r(t)} dt \quad (40)$$

La obtención de una solución particular puede lograrse por el método de variación de las constantes. El resultado final de los sencillos pero algo

laboriosos cálculos es (referencia [3]) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} v(s) \\ w(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sigma(s) & -\sin \sigma(s) \\ \sin \sigma(s) & \cos \sigma(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(s) \\ q(s) \end{pmatrix} \quad (41)$$

donde las derivadas de p, q tienen la expresión matricial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} p(s) \\ q(s) \end{pmatrix} &= \frac{ds^*}{ds} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(\xi(s) + \sigma(s)) & \sin(\xi(s) + \sigma(s)) \\ -\sin(\xi(s) + \sigma(s)) & \cos(\xi(s) + \sigma(s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ K_0 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} \sin \sigma(s) \\ \cos \sigma(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

Al integrar (42) para sustituirla en la (41) tenemos dos constantes de integración p_0, q_0 que corresponden al sumando (39). Las cuatro constantes arbitrarias H_0, K_0, p_0, q_0 se reducen a tres, ya que la relación (25) permite escribir:

$$H_0 = \cos \beta_0 \quad K_0 = \sin \beta_0 \quad (43)$$

donde β_0 es una nueva constante arbitraria.

Si recordamos la (4) para calcular el término ds^*/ds de la (42), llegamos a la fórmula matricial definitiva que expresa $v(s), w(s)$ en función de $a(s), b(s)$:

$$\begin{pmatrix} v(s) \\ w(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sigma(s) & -\sin \sigma(s) \\ \sin \sigma(s) & \cos \sigma(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (44)$$

donde $\sigma(s)$ viene dada por la (40) y donde:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(s) \\ q(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} - \int_{s_0}^s dt \begin{pmatrix} \sin \sigma(t) \\ \cos \sigma(t) \end{pmatrix} + \\ &+ \int_{s_0}^s dt (a(t) + 1) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(\xi(t) + \sigma(t) + \beta_0) & \sin(\xi(t) + \sigma(t) + \beta_0) \\ -\sin(\xi(t) + \sigma(t) + \beta_0) & \cos(\xi(t) + \sigma(t) + \beta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

donde, recordando las (33), (37) y (40):

$$\sigma(s) = \int_{s_0}^s \frac{-1}{r(\tau)} d\tau, \quad \xi(s) = \int_{s_0}^s \frac{-1}{r(\tau)} b(\tau) d\tau \quad (46)$$

Las fórmulas (44), (45), (46) determinan $v(s)$, $w(s)$ y, por tanto, la directriz (γ^*) deformada siempre y cuando se conozcan las tres constantes de integración (β_0 , p_0 , q_0) y las tres funciones $r(s)$, $a(s)$, $b(s)$.

UN EJEMPLO DE CONDICIONES DE CONTORNO

Las constantes p_0 , q_0 de la fórmula (45) tienen una interpretación geométrica sencilla; si constatamos que:

$$p(s_0) = p_0 \quad q(s_0) = q_0 \quad \sigma(s_0) = 0 \quad (47)$$

la (44) nos indica entonces, que (p_0, q_0) expresa el desplazamiento del origen de la pieza lineal, es decir:

$$v(s_0) = p_0 \quad w(s_0) = q_0 \quad (48)$$

La interpretación de la constante β_0 no es tan simple. Tomemos, a título de ejemplo, el caso importante de que la pieza consista en un arco biarticulado, lo que se expresaría inmediatamente en términos de desplazamientos:

$$v(s_0) = w(s_0) = v(s_1) = w(s_1) = 0 \quad (49)$$

pero cuya expresión «intrínseca», utilizando las funciones $a(s)$, $b(s)$ es mucho más compleja. La anulación de v , w en s_0 equivale a la de p_0 , q_0 . Por otra parte, la (48) indica que la anulación de v , w en s_1 equivale a la de $p(s_1)$, $q(s_1)$. Si tenemos en cuenta la ya supuesta igualdad $p_0 = q_0 = 0$, la fórmula (45) implica:

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} (a(t) + 1) \cos(\xi(t) + \sigma(t) + \beta_0) dt &= \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \cos \sigma(t) dt \end{aligned} \quad (50)$$

y además:

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} (a(t) + 1) \sin(\xi(t) + \sigma(t) + \beta_0) dt &= \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sin \sigma(t) dt \end{aligned} \quad (51)$$

Entre esas dos relaciones puede eliminarse β_0 y obtener una condición para $a(s)$, $b(s)$ que exprese la biarticulación. Calculamos típicos del álgebra trigonométrica elemental, nos permiten llegar a la igualdad:

$$\begin{aligned} &\left(\int_{s_0}^{s_1} (a(t) + 1) \cos(\xi(t) + \sigma(t)) dt \right)^2 + \\ &+ \left(\int_{s_0}^{s_1} (a(t) + 1) \sin(\xi(t) + \sigma(t)) dt \right)^2 = \\ &= \left(\int_{s_0}^{s_1} \sin \sigma(t) dt \right)^2 + \left(\int_{s_0}^{s_1} \cos \sigma(t) dt \right)^2 \end{aligned} \quad (52)$$

que indica una situación general, a saber, que las condiciones de contorno se expresan por la anulación de ciertos funcionales de las funciones $a(s)$, $b(s)$. El número de esos funcionales es, en general, igual al grado de hiperestatismo de la pieza lineal.

En nuestro caso particular, puede darse una fórmula explícita para β_0 :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \alpha_0 - l_0 + 2M\pi \quad (M \text{ entero}), \text{ siendo } \quad (53) \\ \text{tg } \alpha_0 &= J/I, \quad \text{tg } l_0 = B/A \end{aligned}$$

donde I , J , B , A denotan ordenadamente cada uno de los cuatro términos de la fórmula (52).

COMPARACION EN UN CASO PARTICULAR

No ha sido propósito del presente artículo llegar a la resolución exhaustiva de ningún ejemplo o caso particular, sino solamente exponer un método para formular los problemas elásticos de piezas lineales, que reduzca la mencionada resolución a un problema meramente matemático, de minimizar un funcional de ciertas funciones incógnitas.

Elegimos el caso de un anillo delgado, sometido a presión uniforme F por unidad de longitud y que antes de la deformación tiene una directriz de sección normal constante, circular de radio r constante. Compararemos a continuación dos formulaciones distintas, según que las funciones incógnitas elegidas sean las $v(s)$, $w(s)$ o bien las $a(s)$, $b(s)$. En el primer caso, la energía interna tiene la expresión

$$U_{(\text{interna})} = \frac{E}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{1}{(r+y)^2} f^2_{\varphi\varphi} dx dy \quad (54)$$

donde $f_{\varphi\varphi}$ (ver referencia [2]) resulta ser:

$$\begin{aligned} f_{\varphi\varphi} &= (r+y) \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} + V \right) + \frac{1}{2} \left(W - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} + V \right)^2 \end{aligned} \quad (55)$$

donde V , W (ver referencia [1]) tienen las expresiones:

$$V(\varphi, y) = v(y) + y \times \left(\frac{r + v + w'}{\sqrt{(r + v + w')^2 + (w - v')^2}} - 1 \right) \quad (56)$$

$$W(\varphi, y) = w(y) - y \times \left(\frac{w - v'}{\sqrt{(r + v + w')^2 + (w - v')^2}} \right) = \frac{d}{d\varphi} \quad (57)$$

De este modo resulta evidente que, una vez efectuada la integración en la variable y , la energía interna es un funcional de la forma:

$$U_{\text{(interna)}} = \frac{E}{2} \int_0^{2\pi} G(v, w, v', w', v'', w'') d\varphi \quad (58)$$

donde G es una expresión sumamente prolija, que podría calcularse explícitamente utilizando las fórmulas (54) hasta (57). Es factible, a veces, reemplazar las (56) y (57) por fórmulas aproximadas, que conduzcan a un funcional no cuadrático que aproxime al (58) y que corresponda a una G no tan complicada (ver referencia [1], págs. 482 y 483). El que las aproximaciones hechas sean correctas dependen de hipótesis «ad hoc», a justificar en cada caso concreto por consideraciones de índole diversa (físicas, mecánicas, tipo de materiales, etc.) y que se refieren a menudo a una supuesta pequeñez de las deformaciones (lo que es muy frecuente en grandes grupos de problemas de piezas lineales) y a que los desplazamientos (lo que ya no tiene por qué ser tan frecuente) sean también suficientemente pequeños.

En la formulación a que se refiere este artículo, con la sola hipótesis de pequeñez de las «deformaciones» $a(s)$, $b(s)$, resulta:

$$U_{\text{(interna)}} = \frac{E A r}{2} \int_0^{2\pi} a^2(\varphi) d\varphi + \frac{E D}{2} \times \int_0^{2\pi} (a(\varphi) - b(\varphi))^2 d\varphi \quad (59)$$

donde:

$$D = \int_A \int \frac{y^2}{r + y} dx dy \simeq \frac{1}{r} I \quad (60)$$

siendo I el momento de inercia de la sección A respecto al eje x .

Examinada así la gran ventaja de sencillez que presenta la (59) frente a las (54) a (57), pasemos a comparar las condiciones de contorno. En la formulación en desplazamientos, obtenemos condiciones muy sencillas:

$$w(0) = v(0) = v'(0) = w(2\pi) = v(2\pi) = v'(2\pi) \quad (61)$$

que reflejan la continuidad del anillo (empotramiento fijo en ambos extremos, 0 y 2π , que resultan ser coincidentes).

En la formulación aquí presentada las condiciones de contorno se expresan más prolijamente. Las dos primeras de (61) equivalen a la anulación de los parámetros que notábamos p_n , q_n y la tercera a la del parámetro K_n , de donde se sigue $H_n = -1$, $\beta_n = 0$. Las condiciones cuarta y quinta indican, después de algunos cálculos que tengan en cuenta la significación especial de $\sigma(s)$ en este problema:

$$\int_0^{2\pi} (a(\varphi) + 1) \cos(\xi(\varphi) + \sigma(\varphi)) d\varphi = 0 \quad (62)$$

y también:

$$\int_0^{2\pi} (a(\varphi) + 1) \sin(\xi(\varphi) + \sigma(\varphi)) d\varphi = 0 \quad (63)$$

Estas fórmulas podrían elaborarse un poco más, teniendo en cuenta las significaciones especiales, en nuestro caso de arco circular, de las funciones $\xi(\varphi)$, $\sigma(\varphi)$.

Finalmente, la sexta condición se expresa por $K(s_1) = 0$, es decir, $\sin \xi(s_1) = 0$, o bien:

$$\int_0^{2\pi} b(\varphi) d\varphi = m\pi \quad (64)$$

para algún entero m . En resumen, las condiciones de contorno se expresan por las (62), (63), (64) y las

$$p_n = q_n = \beta_n = 0 \quad (65)$$

Al comparar formulaciones en cuanto a la escritura del potencial de las fuerzas externas, puede decirse que la ventaja se producirá para una u otra formulación según el caso concreto. En evitación de dificultades que no son del caso, desarrollamos la comparación con la hipótesis adicional de deformación longitudinal nula en el anillo, es decir, $a(\varphi) = 0$.

La presión normal F realiza entonces un trabajo virtual:

$$\delta U = - \int_0^{2\pi} F(\delta v^*) ds \quad (66)$$

es decir:

$$\delta U_{(externa)} = \int_0^{2\pi} r F (\delta v^*) d\varphi = F \times \quad (67)$$

$\times \delta$ (Area interior del anillo)

de donde resulta:

$$\frac{1}{F} U_{(externa)} = \pi r^2 - (\text{Area interior a la directriz deformada}) \quad (68)$$

Con este resultado podemos expresar, sin otras dificultades que las típicas de geometría diferencial, la $U_{(externa)}$ tanto con la incógnita $b(s)$, como con las $v(s)$, $w(s)$. En el primer caso, calculamos el área interior a una curva cerrada (γ^*) mediante la clásica integral curvilínea:

$$\text{Area} = \frac{-1}{2} \int_{\gamma^*} \vec{O p} \cdot d\vec{O p} = \frac{1}{2} \int_{\gamma^*} Y dX - X dY \quad (69)$$

donde $\vec{O p} = X \vec{i} + Y \vec{j}$ es el vector de posición de un punto genérico P^* sobre (γ^*) , respecto a un sistema ortogonal fijo $X O Y$. Teniendo en cuenta que:

$$ds^* = ds, dX = (\cos \theta) ds, dY = (\sin \theta) ds \quad (70)$$

donde:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r^*} = \frac{1}{r} (1 + b(s)) \quad (71)$$

resulta después de cálculos elementales y con el cambio de notación a dependencia angular, $b(s)$ por $b(\varphi)$:

$$\frac{1}{F} U_{(externa)} = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\theta \sin(\theta(\phi) - \theta(\varphi)) d\varphi \quad (72)$$

donde:

$$\theta(\phi) = \int_0^\theta (1 + b(\varphi)) d\varphi \quad (73)$$

debiendo notarse que se ha redefinido el nivel cero del potencial, por supresión del término constante πr^2 en la fórmula (68).

Fórmulas similares a las (72) y (73) podrían deducirse en el caso de la formulación con $v(s)$, $w(s)$, suplementadas con otra que expresase la nulidad del alargamiento unitario para la directriz. Evitamos la escritura explícita de tales fórmulas debido a lo prolijas que resultarían.

Para terminar este artículo mencionaremos que las fórmulas (59), (62) a (65) y (72), (73) pueden usarse para determinar el valor crítico de F que corresponde a inestabilidad de la solución circular para el anillo deformado, lo que será objeto de una próxima publicación (ver referencia [4]).

REFERENCIAS

- [1] E. GARBAYO: "Un método energético para estudiar el pandeo de arcos". Revista de Obras Públicas, páginas 481 y 482, junio 1972.
- [2] WASHIZU: "Variational methods in elasticity and plasticity". Chapter III. Addison and Wesley Publ. Co.
- [3] W. HUREWICZ: "Ecuaciones diferenciales ordinarias". Capítulo III. Editorial Rialp.
- [4] J. LOPEZ REY y E. GARBAYO: "Cálculo diferencial en espacios de Banach y su aplicación a ciertos problemas de inestabilidad elástica". A publicar en una monografía de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Barcelona, aproximadamente en julio de 1980.