

PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA

Por J. J. CONDE ALDEMIRA (*)

Dr. Ingeniero de C.C. y P.
Lcdo. en Ciencias Exactas

En este artículo se analizan algunos de los problemas que existen en el cálculo numérico de la refracción de una onda monocromática. La existencia de los cáusticos, la estabilidad de los diagramas al variar las condiciones de cálculo y la relación entre diagramas numéricos y gráficos, son aspectos que se tratan en el artículo. También se indica el campo de aplicación de los diagramas y su insuficiencia para describir situaciones en donde simultáneamente con la refracción existen otros fenómenos —reflexión, rotura, etc.— o el fenómeno original es de características diferentes al ondulatorio, como ocurre en el caso del oleaje.

1. INTRODUCCION

LOS primeros diagramas de refracción se obtuvieron por métodos gráficos siendo los de Iribarren (1941) y Johnson O'Brien-Isaacs (1948) los de mayor aplicación. Con la publicación del artículo de Munk-Arthur (1945), se establecen las ecuaciones de una normal y de la variación de la altura de onda a lo largo de ella. Griswold (1961), tomando como base el artículo anterior construye el primer método numérico, a partir del cual se publican gran cantidad de métodos numéricos a partir del cual se publican gran cantidad de métodos basados todos ellos en las mismas ecuaciones básicas establecidas por Munk-Arthur, difiriendo solamente en los procedimientos de integración aproximada del problema de contorno planteado.

En el año 1974 el Laboratorio de Puertos «Ramón Iribarren» publicó un método que se aplicó fundamentalmente el análisis de diagramas obtenidos variando las condiciones de cálculo y a la realización sistemática de planos de ondas de las zonas Sur y Oeste del litoral español, con el fin de obtener información para planificar la redacción de un «Atlas de Planos de Oleaje del Litoral Español».

(*) Subdirector de Estudios del Laboratorio de Puertos «Ramón Iribarren».

En este artículo y tras una breve descripción de los fundamentos comunes a los diversos métodos, se resumen los principales resultados obtenidos sobre las limitaciones de los diagramas numéricos tomando como referencia las hipótesis físicas y matemáticas en que se basan y las características de los diagramas obtenidos. Se indican también al final del artículo la insuficiencia de los diagramas cuando conjuntamente con la refracción de una onda existen otros fenómenos de estructura diferente como es el de la propagación del oleaje.

2. FUNDAMENTOS GENERALES DE LOS METODOS

Como es conocido, los diagramas de refracción de ondas monocromáticas, representan aproximadamente, la deformación de un tren de ondas cilíndrico al propagarse por un área determinada y ser afectado por el fenómeno de refracción debido a la influencia del fondo. Esta representación aproximada se hace mediante una malla discreta formada por dos familias de curvas ortogonales, los frentes de onda —curvas que corresponden a las sucesivas posiciones del frente de onda inicial— y las normales —trayectorias ortogonales de los frentes de onda—. Esta malla, que define el aspecto geométrico de la deformación, se complementa con el valor de la altura de onda en sus nudos.

La construcción de estos diagramas por métodos numéricos, se basa en la construcción de las normales por coordenadas y en la obtención del valor de la altura de onda en estos puntos. Los frentes de onda se pueden obtener como las curvas definidas por las coordenadas de las normales correspondientes al mismo instante. Como consecuencia las ecuaciones generales han de ser las que definen la normal y la variación de la altura de onda. Para su obtención se introducen las siguientes hipótesis generales: 1. El fluido es irrotacional. 2. No existe transmisión de energía entre flujos delimitados por normales adyacentes. 3. El área a que se refiere el diagrama es lo suficientemente pequeña para no tener que considerar la curvatura de la tierra. 4. Los diagramas se refieren solamente al fenómeno de refracción. Como hipótesis posterior, que permite desarrollar la formulación general se introduce la

PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA

siguiente: 5. La onda del tren cilíndrico viene representada por una onda de Airy. En estas circunstancias las ecuaciones son las siguientes:

a) Ecuaciones de una normal:

$$1a \quad \begin{cases} dx = ds \cos \alpha \\ dy = ds \sin \alpha \\ \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{c} \frac{dc}{dn} \end{cases}$$

en donde: α es el ángulo de la normal con el eje OX^+ del sistema cartesiano ortogonal, contado positivo en sentido contrario a las agujas del reloj; $\frac{d}{ds}$ y $\frac{d}{dn}$ son operadores diferenciales dados por $\frac{d}{ds} = (\cos \alpha) \frac{\partial}{\partial x} + (\sin \alpha) \frac{\partial}{\partial y}$ y $\frac{d}{dn} = -(\sin \alpha) \frac{\partial}{\partial x} + (\cos \alpha) \frac{\partial}{\partial y}$; c es la celeridad de onda, cuya expresión para la onda de Airy es

$$1.b \quad C = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{d}{L}$$

en donde $d = d(x, y)$ es la profundidad, g la aceleración de la gravedad, T el periodo y L la longitud de onda.

b) Expresión de altura de onda

Para la onda de Airy la condición de conservación de flujo de energía entre normales adyacentes, da como expresión de la altura de onda, en un punto A la siguiente:

$$2.1 \quad A = A_0 K_1 K_2$$

en donde: A_0 es la altura de onda en profundidad indefinida; K_1 coeficiente que da la variación de la altura de onda como consecuencia de la separación entre normales adyacentes, viniendo dado por

$$2.b \quad K_1^2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$$

con λ_0 separación en profundidad indefinida y λ_1 en la sección que se considera; K_2 coeficiente que viene expresado por:

$$2.c \quad K_2^2 = \frac{(C_g)_0}{(C_g)}$$

en donde $(C_g)_0$ es la celeridad de grupo en profundidad indefinida y (C_g) en el punto considerado, las cuales vienen dadas por:

$$2.d \quad \begin{cases} (C_g)_0 = \frac{C_0}{2} \\ (C_g) = \frac{C}{2} \left[1 + \frac{4\pi \frac{d}{L}}{\operatorname{Sh} 2\pi \frac{d}{L}} \right] \end{cases}$$

El cálculo de K_1 se hace a partir del coeficiente $\beta^2 = \frac{\lambda}{\lambda_0}$, que verifica la ecuación diferencial:

$$2.e \quad \frac{d^2 \beta}{ds^2} + p(s) \frac{d\beta}{ds} + q(s) \beta = 0$$

en donde:

$$p(s) = -(\cos \alpha) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) - (\sin \alpha) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

$$2.f \quad q(s) = (\sin^2 \alpha) \frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) -$$

$$-2(\sin \alpha)(\cos \alpha) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \right) + (\cos^2 \alpha) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right)$$

Establecidas las ecuaciones básicas éstas han de ser integradas a partir de la definición del fondo, y del tren de onda inicial.

3. CARACTERISTICAS DEL CALCULO APROXIMADO DE LOS DIAGRAMAS

Con independencia de la propia dificultad de integración de las ecuaciones, ésta ha de hacerse de forma aproximada pues los fondos, en los casos de aplicación, no admiten una expresión analítica. Ello hace que sus características han de introducirse por el cálculo a partir de una representación aproximada, siendo de gran importancia la elección del sistema de representación. No existe uniformidad de criterio para esta elección siendo las representaciones más utilizadas la que parten de mallas rectangulares o triangulares. El proceso de construcción del método es el siguiente: 1. Elección en el frente de onda inicial de un conjunto de puntos que son los iniciales de las normales que se van a calcular. 2. Integración de las ecuaciones introduciendo como variable

PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA

independiente el tiempo a partir de las relaciones $\Delta s = c\Delta t$, $L = cT$ en donde Δt es el intervalo de integración.

A partir de las dos características anteriores se define el esquema general de cálculo que varía según los diversos autores. El método empleado en el método del Laboratorio fue el siguiente:

a) Cálculo de los datos iniciales

1. Definición de la malla de batimétricas de tipo rectangular.

2. Obtención en los nudos de esta malla de los valores de la profundidad —a partir de la carta de batimétricas—, de la celeridad —mediante cálculo iterativo— y de las derivadas de la celeridad —mediante su expresión aproximada a partir de los incrementos.

3. Cálculo de los valores de la profundidad, celeridad y de las derivadas de la celeridad, para los puntos del frente de onda inicial, mediante doble interpolación a partir de los valores correspondientes a los nudos de la malla que contiene a cada punto.

b) Cálculo de una normal

1. Los valores iniciales son, en cada punto P_0 del frente inicial, las coordenadas (x, y) y el ángulo α .

2. A partir de estos valores el cálculo de los correspondientes al punto siguiente, P_1 , se hace por método iterativo, terminándose al obtener valores de dos iteraciones sucesivas que difieran en menos de un valor prefijado.

3. Obtenido P_1 , se obtienen por el mismo procedimiento los puntos $P_2, P_3, \dots$ que definen la normal.

c) Cálculo de la altura de onda

1. Cálculo de K_1 en los puntos P_n mediante integración aproximada de la ecuación diferencial tomando como valores iniciales $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

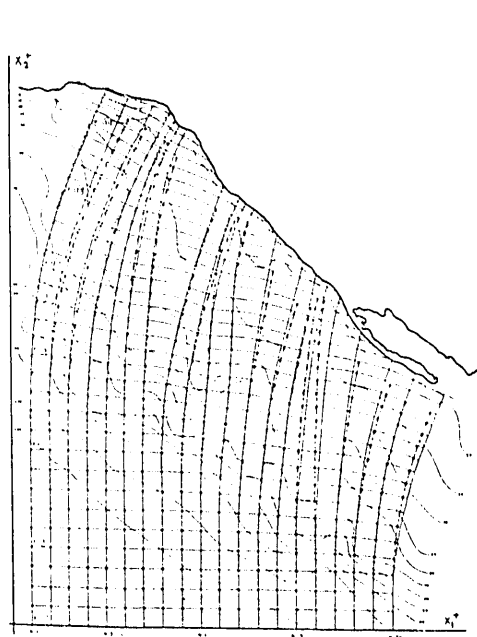
2. Cálculo de K_2 directo a partir de los valores de d y c en los puntos P_n .

d) Características del programa

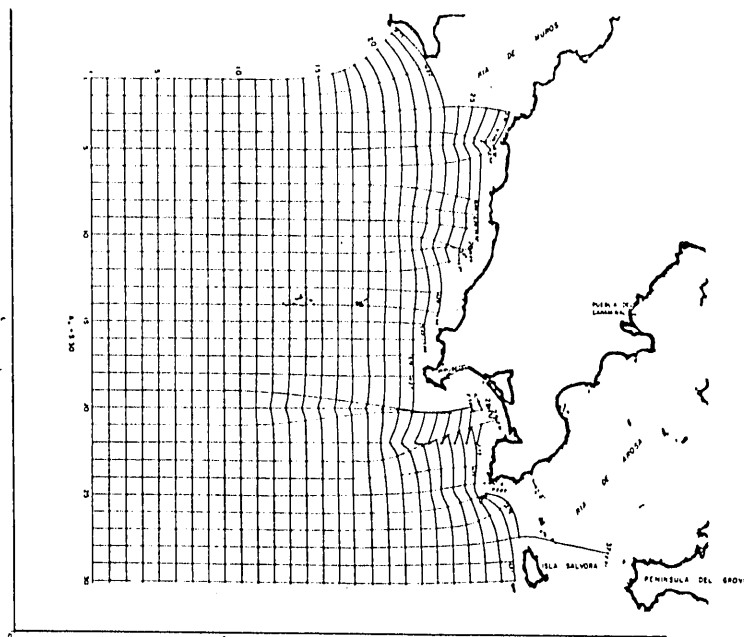
1. Número máximo de nudos de la malla de batimétricas 1.600, siendo 48 el número máximo según OX^+ .

2. Número máximo de normales 30 siendo 100 el número máximo de salida de cada normal.

3. Error admitido para el cálculo de la celeridad $\varepsilon \leq 0.001$.

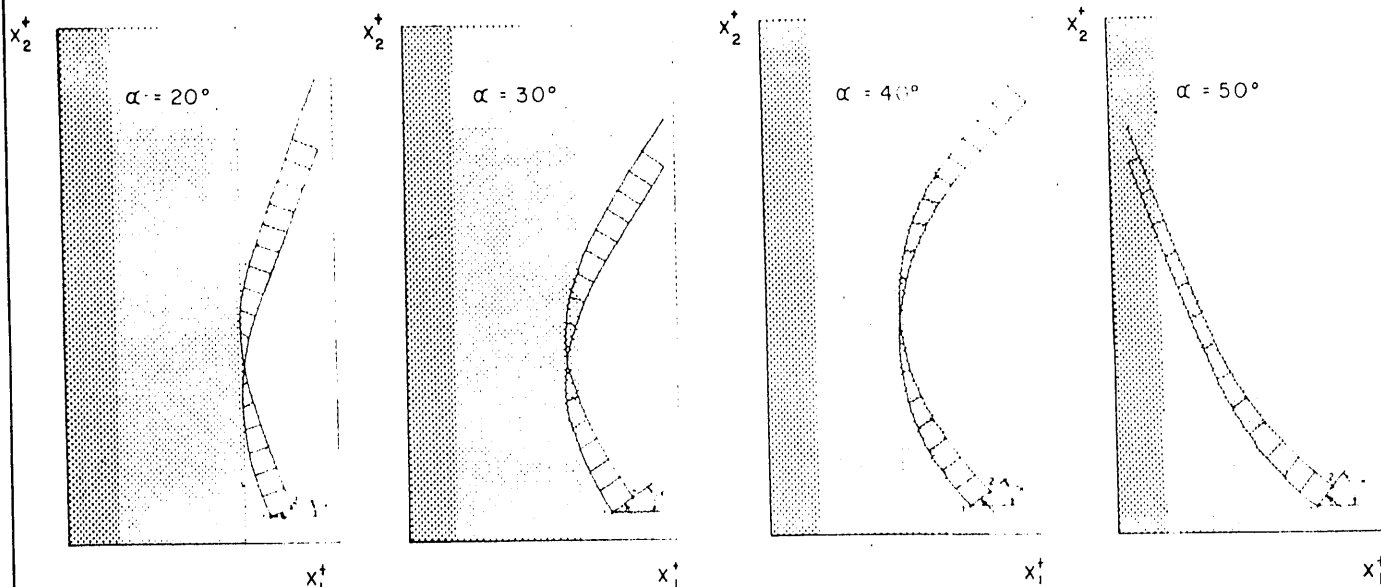


a)



b)

PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA



4. Error admitido para el cálculo de las normales $\varepsilon \leq 0.1$.

5. Dibujo de los diagramas por coordenadas de las normales, considerando para los frentes tramos rectos, entre coordenadas adyacentes correspondientes al mismo instante.

e) Proceso de cálculo de un diagrama

1. Elección de la hipótesis de cálculo; H_c :
a) Cálculo puntual (C.P.). b) Cálculo con cuadrilátero de avance (C.C.A.).

2. Elección del intervalo de integración $\Delta t = vT$.

3. Elección de la escala del diagrama.

4. Elección del tipo de malla de batimétricas y posterior definición de las longitudes de los lados de cada malla y del número total de nudos según las direcciones OX^+ , OY^+ .

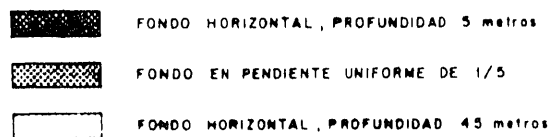
5. Definición del frente de onda inicial.

a) Frente recto en profundidad indefinida. Viene definido por: A_0 , T ; distancia entre normales Δn ; número de normales; ángulo de las normales iniciales con OX^+ .

b) Frente de forma cualquiera que viene definido por: A_0 , T ; valores de las coordenadas (x_1, y_1) ángulo de las normales α_1 y valor de la altura de onda, A_1 , en el conjunto de puntos que se tomen en el frente inicial.

f) Ejemplos de diagramas

Como complemento de la descripción anterior, en la figura 1 se presentan dos ejemplos de diagramas obtenidos el primero, figura 1.a, para $T = 15.90s$; avances $20L$; número de normales 20: El segundo, figura 1.b, para $T = 12s$; avances $4.4L$; número de normales 30.



4. ANALISIS DE RESULTADOS

En este apartado resumimos los resultados obtenidos de las aplicaciones realizadas tomando como referencia las características de algunos diagramas, su variación al modificar las condiciones de cálculo y su comportamiento con relación a los diagramas gráficos.

4.1. Existencia de caústicos

La aplicación de los métodos numéricos ha puesto de manifiesto que para determinadas características de los fondos las normales llegan a cruzarse. En la figura 1.b se puede observar este fenómeno, que se conoce como el de formación de caústicos. El caústico se define como lo envolvente de la familia de normales que se cruzan, presentándose con su existencia un nuevo aspecto del problema planteado ya que en la zona del caústico la teoría clásica de la refracción deja de ser válida debido a que en ella al cruzarse las normales la altura de ola debería de ser infinita aplicando los resultados de la teoría.

En el momento actual no existe una solución de este problema, que ofrezca una interpretación física y una cuantificación del fenómeno. El planteamiento teórico se basa en la teoría de la óptica

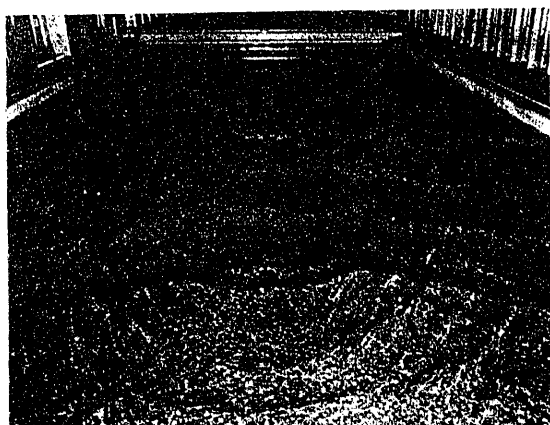
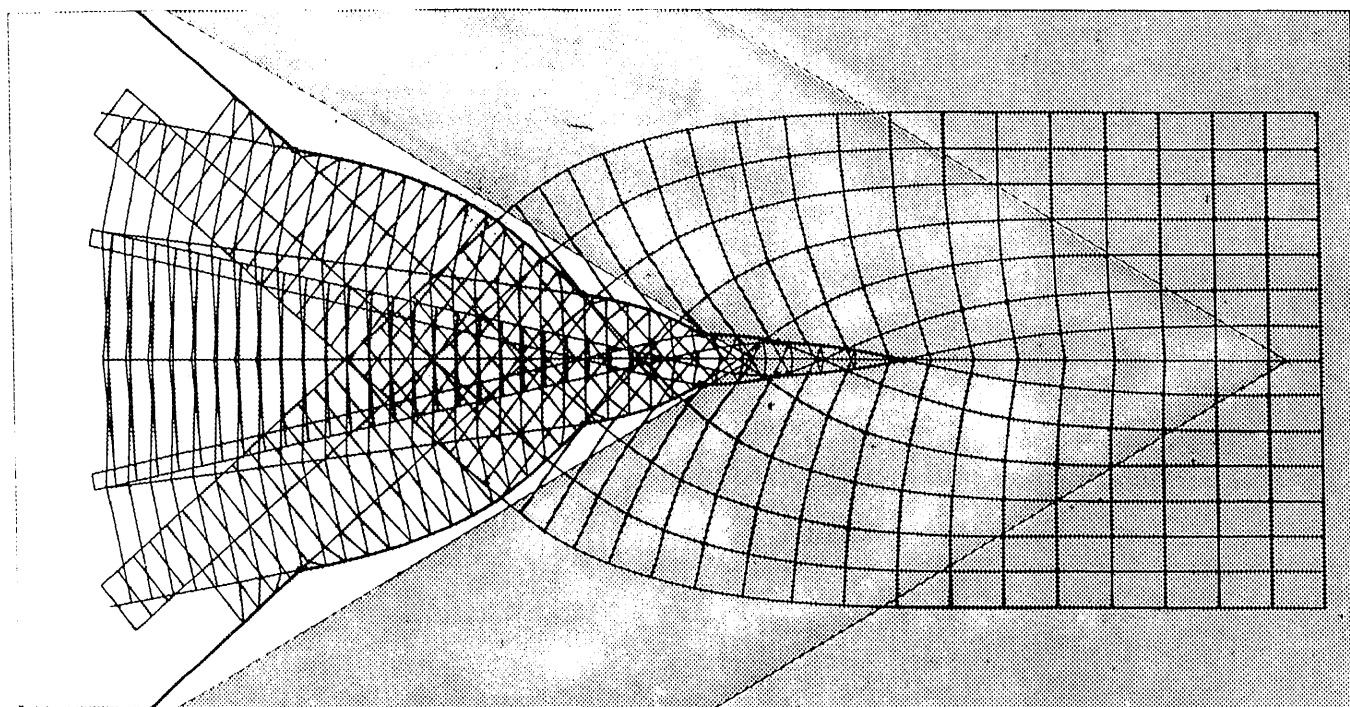
PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA

geométrica, habiendo obtenido Ludwig (1965) una aproximación asintótica para cáusticos de muy pequeña curvatura. Chao (1970) trató un caso, el de cáustico recto, que se produce cuando el frente inicial pasa de profundidad muy reducida a profundidad indefinida a través de una zona de transición con pendiente uniforme y de fuerte inclinación. Obtuvo que la formación del cáustico depende del ángulo inicial del frente, resultado que se confirmó mediante la aplicación del método del Laboratorio según se puede ver en la figura 2.

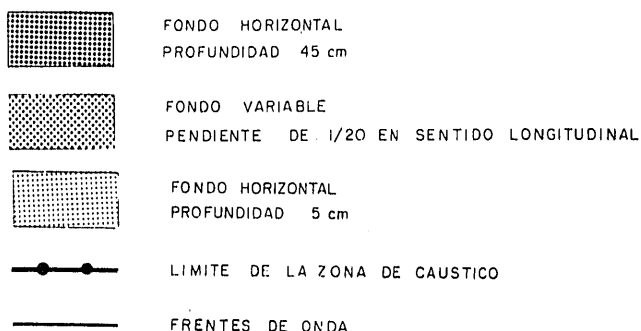
La existencia de este cáustico recto que se forma para determinadas direcciones del frente inicial cuando se crea una depresión del fondo, fue aplicada en Sidney (Australia) para disminuir

la agitación en la Bahía de Botany desviando los frentes de ondas lateralmente mediante un dragado en la entrada de la Bahía. Después de un estudio previo de diagramas de refracción en donde se observó una fuerte concentración de normales, se construyó un modelo reducido que permitió definir las características del dragado de entrada y de las condiciones de agitación resultantes.

En general los casos de cáusticos que se han estudiado, teórica y experimentalmente, parten de fondos muy simples —casquete esférico, en forma de tejado, etc.—. Un ejemplo de este tipo se analizó en el laboratorio para el caso de un fondo en forma de cuña, obteniéndose el diagrama numérico, y construyéndose un modelo en el



Modelo de cáustico ensayado en el laboratorio



PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA

tanque de ensayos. En general la interpretación de los resultados tiene sólo un valor cualitativo ya que en la zona de cáustico los valores del diagrama no son representativos. En este aspecto cualitativo los resultados experimentales permitieron observar que cuando la altura de onda inicial era muy pequeña se generaba un caústico sin rotura, el cual se propagaba dando lugar a una deformación del tipo de la del diagrama numérico. Al aumentar la altura de onda ésta rompía dando lugar entonces a otro tipo de diagrama de refracción por generarse después de la rotura frentes de onda de diferentes características que el inicial. Este resultado, obtenido también en otros laboratorios invalida una primera interpretación intuitiva del fenómeno, según la cual en la zona de un caústico debería de romper el frente de onda. En las figuras 3a y 3b pueden verse el diagrama numérico y una fotografía del modelo que se construyó en el Laboratorio.

Hasta el momento actual las investigaciones teóricas y experimentales se refieren solamente al análisis de caústicos para situaciones muy simples, análogas a las indicadas anteriormente. Incluso para esos casos las conclusiones se refieren a aspectos cualitativos de los resultados por lo que en los casos de aplicación cuando se origina un caústico no existe un criterio cuantitativo que de una medida de su importancia.

4.2. Estabilidad de los diagramas

Para analizar la influencia de las variables que intervienen en el cálculo de los diagramas, se aplicó el método a nueve ejemplos —tres para frente inicial recto en profundidad indefinida, seis para frente de forma cualquiera— variando las condiciones de cálculo. El esquema general de cálculo fue el siguiente: a partir de una malla de batimétricas inicial, se fijaron distintos intervalos de integración realizándose para cada uno de ellos el cálculo de dos diagramas; uno teniendo en cuenta el cuadrilátero de avance y otro mediante el cálculo puntual. Se repitió el mismo esquema variando la malla de batimétricas. Las características del conjunto de los diagramas fueron los siguientes:

a) Valores iniciales de cálculo

1. Malla de batimétricas cuadrada, de lados $1_0 = 1_x = 1_y$, siendo 1_0 el lado de la malla que se toma como inicial.
2. Intervalo de integración t , del orden de $1/4$ ó $1/5$ del avance prefijado para los frentes.

b) Campo de variación de los parámetros

1. Malla de batimétricas, $1^* = \frac{1}{1_0} = 0.5 - 1.0$
—2.0
2. Intervalo de integración $\Delta t^* = \frac{\Delta t}{T} = 0.10 - 0.50$
—2.0
3. Hipótesis de cálculo (H_c): a) Cálculo puntual (C.P.) b) Cálculo con cuadrilátero de avance (C.C.A.).

Los diagramas resultantes se compararon numéricamente tomando como referencia las coordenadas de las normales. Como parámetro el valor de la diferencia de las coordenadas expresada en tanto por ciento $-R_x$ para la coordenada x y R_y para la coordenada y . Para cada normal se obtuvieron los máximos relativos y del conjunto de normales comparadas se obtuvieron los intervalos de las oscilaciones máximas, siendo los resultados obtenidos los siguientes:

Ejemplo 1. Malla de batimétricas e intervalo de integración fijos ($1 = \text{cte}$; $\Delta t = \text{cte}$), con variación de la hipótesis de cálculo, ($H_c = \text{C.P.}; \text{C.C.A.}$).

Máxima variación:

$$\begin{aligned} R_x &= 13 \% \text{ para } 1^* = 0.5 & \Delta t^* &= 2.0 \\ R_y &= 8 \% & \text{ para } 1^* &= 1.0 & \Delta t^* &= 2.0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Malla de batimétricas e hipótesis de cálculo fijas ($1 = \text{cte}$, $H_c = \text{cte}$) con variación del intervalo de integración ($\Delta t^* = 0.1 - 0.5 - 2.0$).

Máxima variación:

$$\begin{aligned} R_x &= 17 \% \text{ para } H_c = \text{C.P. } 1^* = 0.5 & \Delta t^* &= \begin{cases} 0.5 \\ 1.0 \end{cases} \\ R_y &= 6 \% \text{ para } H_c = \text{C.C.A. } 1^* = 0.5 & \Delta t^* &= \begin{cases} 0.5 \\ 1.0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Hipótesis de cálculo e intervalo de integración fijos ($H_c = \text{cte}$, $\Delta t = \text{cte}$) con variación de la malla de batimétricas ($1^* = 0.5 - 1.0 - 2.0$).

Máxima variación:

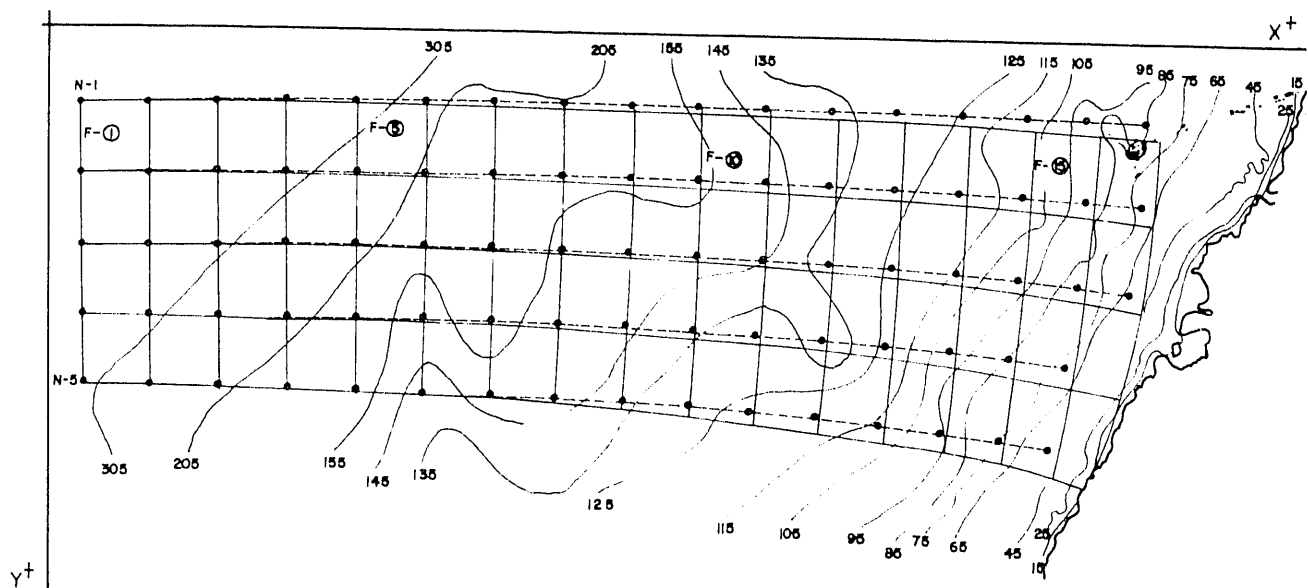
$$\begin{aligned} R_x &= 29\% \text{ } H_c = \text{C.P. } \Delta t^* = 2.0 & 1^* &= \begin{cases} 2.0 \\ 0.5 \end{cases} \\ R_y &= 15\% \text{ } H_c = \text{C.P. } \Delta t^* = 0.5 & 1^* &= \begin{cases} 2.0 \\ 0.5 \end{cases} \end{aligned}$$

Los resultados anteriores muestran una variación sensible de los diagramas al modificarse las condiciones de cálculo, habiéndose obtenido la máxima variación al modificar la representación

PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA

del fondo. Es claro que estos resultados son solamente una muestra indicativa de la estabilidad de los diagramas y no pueden generalizarse al depender básicamente de las características de los fondos que en cada caso se consideran.

dientes los cuales se compararon con los numéricos para las siguientes características de cálculo:
1) Cálculo con cuadrilátero de avance. 2) Avances iguales en ambos diagramas. Los resultados fueron los siguientes:



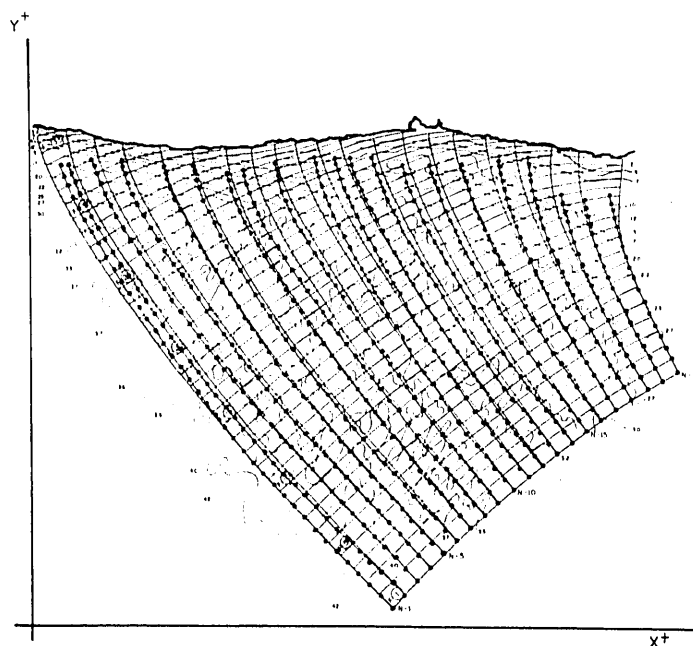
04.3. Comparación entre diagramas numéricos y gráficos

En la zona en que se calcularon los diagramas numéricos anteriores, por el método de Iribarren, se obtuvieron los diagramas gráficos correspondientes.

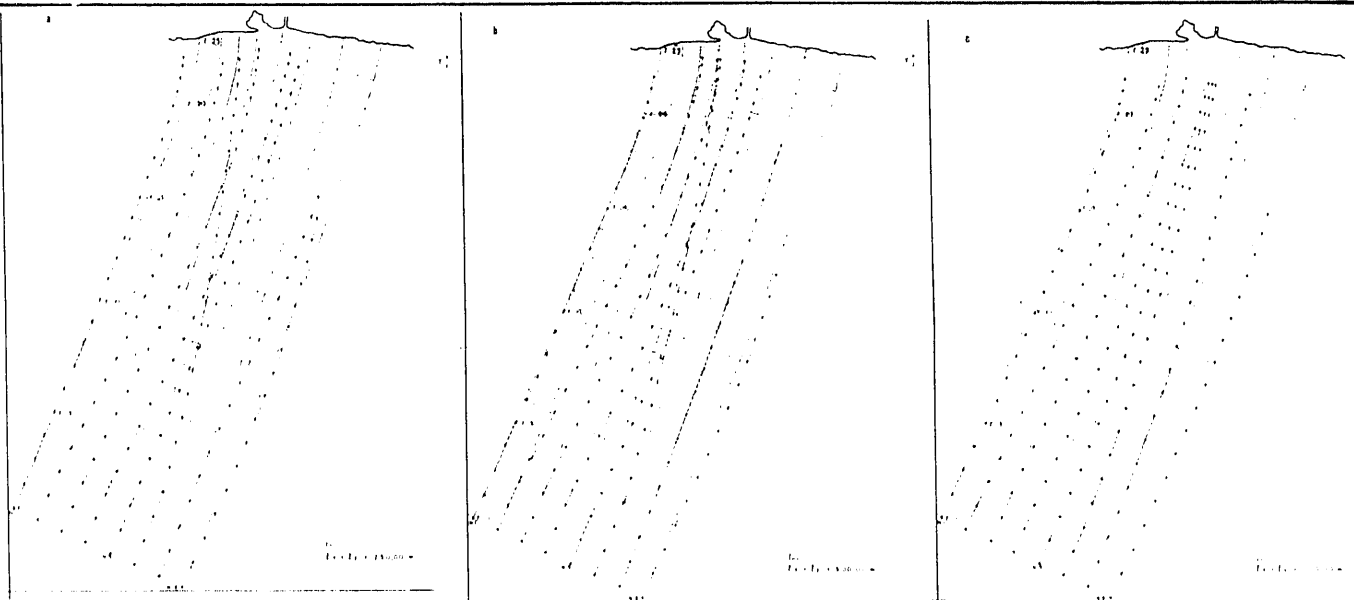
a) Comparación geométrica

1. Mayor aproximación para diagramas numéricos correspondientes a los mayores lados de la malla de batimétricas.

2. Aproximación para los diagramas con frente inicial recto en profundidad indefinida.



PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA



3. Profunda diferencia para diagramas con frente inicial en profundidad finita.

b) Variación de la altura de onda

1. Para los diagramas numéricos de mayor aproximación con los gráficos, las mínimas diferencias se obtuvieron para diagramas numéricos relativos al lado de malla mayor y frente en profundidad indefinida, siendo el intervalo de oscilación de la variación de alturas de onda — A_G altura del método gráfico, A_N altura del método numérico— el siguiente: $1.0004 \leq \frac{A_G}{A_N} \leq 1.043$. Los diagramas correspondientes son los de la figura 4.

2. Las máximas diferencias se obtuvieron para diagramas con frentes iniciales en profundidad finita y con fuertes concentraciones de normales siendo el intervalo de oscilación, $0.419 \leq \frac{A_G}{A_N} \leq 1.122$, los diagramas correspondientes son los de la figura 5.

3. Las máximas diferencias absolutas se obtuvieron cuando el diagrama gráfico se comparó con los tres numéricos obtenidos al variar la malla de batimétricas, para el caso de frente en profundidad finita, siendo el intervalo máximo de oscilación.

$$0.084 \leq \frac{A_G}{A_N} \leq 1.933$$

En la figura 6 se ven las tres comparaciones siendo los intervalos de oscilación para cada una los siguientes:

$$0.195 \leq \frac{A_G}{A_N} \leq 1.933 \text{ para } l_{\min}; \quad 0.085 \leq \frac{A_G}{A_N} \leq 1.3144 \text{ para } l_{\text{med}};$$

$$0.439 \leq \frac{A_G}{A_N} \leq 1.163 \text{ para } (l_{\max}).$$

En dicha figura se pueden observar la evolución de los diagramas numéricos desde un diagrama próximo al gráfico hasta diagramas de mayor complejidad en donde existen caústicos.

5. LIMITACIONES DE LOS METODOS

Al establecer las ecuaciones de una normal se tomó como modelo de onda la solución «onda de Airy». Hasta el momento actual los métodos que son de aplicación parten de este modelo, habiéndose publicado recientemente —Chu (1975), Skovgaard and Petersen (1977)— dos trabajos que tratan de incorporar soluciones no lineales —onda de Stokes y onda cnoidal— a la construcción de los modelos. Ambos intentos de construcción de diagramas no lineales han de considerarse como una iniciación a la investigación en este campo debido fundamentalmente a las condiciones excesivamente simplificadas de que han partido los autores para obtener las soluciones. La dificultad mayor para obtener una solución aproximada se deriva de que en las soluciones de tipo no lineal la celeridad es función de la altura de onda, por lo que no es posible obtener directamente mediante método iterativo las coordenadas de las normales, por lo que la integración aproximada se complica grandemente. Además de esta

PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA

La dificultad general existe en el hecho de que según los resultados de la teoría de las ondas a cada solución no lineal se le asocia un intervalo de profundidad relativa dentro del cual es válida dicha solución. Ello exige que los diagramas tengan distintos tipos de modelo de onda según la profundidad relativa que se considera. En el momento actual, debido a la ausencia de resultados generales, no se sabe en qué sentido los diagramas no lineales modifican la aproximación que representan los de tipo lineal, aspecto éste de gran interés, ya que permitiría decidir si la complicación que entraña su obtención da lugar a una mejor aproximación del fenómeno que se trata de interpretar.

En el campo de la aplicación, la variabilidad de los diagramas al modificar las características de cálculo y la existencia de fenómenos cuya interpretación se desconoce —formación de cáusticos— limitan el alcance práctico de los diagramas. En este campo de aplicación la excesiva idealización del modelo que no incorpora fenómenos tales como el de rotura, la reflexión y la difracción, representa también una limitación para el uso de los diagramas con fines prácticos. Conviene subrayar que cuando en la zona de refracción todos o gran parte de los fenómenos anteriores existen simultáneamente, es recomendable el estudio de la refracción en modelo reducido, pues los diagramas no dan entonces una información válida de lo que ocurre, ya que a partir de las zonas de cáusticos, rotura y reflexión se generan nuevos tipos de ondas que no se corresponden con la onda que sirve para definir el frente inicial.

Finalmente queremos indicar la limitación de estos diagramas cuando se aplican para representar un fenómeno de estructura diferente como es el del oleaje. Como es sabido una onda admite una representación analítica, mientras que la representación del oleaje es estadística, partiendo de su análisis como proceso aleatorio, cuya descripción estadística y física se hace a partir de la función espectral. La refracción del oleaje exige entonces conocer cómo se modifica el espectro como consecuencia de la influencia del fondo. La conexión entre diagramas de refracción de ondas y de oleaje, se establece por el hecho de que los de ondas son la base para construir modelos numéricos que den aproximadamente la refracción del espectro, una vez que se acepta que las componentes elementales del oleaje son ondas monocromáticas. El laboratorio trabaja actualmente en este problema con el fin de construir un modelo numérico que permita obtener las características del espectro refractado.

6. CONCLUSIONES

En este último apartado resumimos las que, según nuestro criterio, son las conclusiones más importantes de este artículo.

- Necesidad de construir modelos matemáticos de mayor complejidad incorporando modelos no lineales y viendo su aproximación con los basados en la solución lineal, onda de Airy.
- Inestabilidad de los diagramas al variar las características de cálculo, siendo el tipo de malla de batimétricas empleado el que determina fundamentalmente la forma del diagrama.
- Imposibilidad en el momento actual de cuantificar e interpretar físicamente el fenómeno de los cáusticos.
- Profunda diferencia entre diagramas numéricos y gráficos para los casos de una representación muy detallada del fondo a partir de una malla de lados pequeños.
- Necesidad de estudio en modelo de la refracción de ondas cuando existen fenómenos que no tienen interpretación —por ejemplo, cáusticos— y/o no son tenidos en cuenta en los diagramas —reflexión, rotura y difracción.
- Insuficiencia de los diagramas para interpretar la propagación del oleaje considerado como proceso aleatorio.

COLABORACIONES

Don Jesús Martínez González, doctor ingeniero, elaboró el programa de cálculo. Don Vicente Sánchez-Naverac, ingeniero técnico industrial, ha realizado los diagramas gráficos.

El Gabinete de Cálculo del C.E.E.O.P. ha puesto a disposición del laboratorio para realizar los ejemplos numéricos un computador I.B.M. 1130, modelos 3D y un Plotter I.B.M.-1627.

PROBLEMAS QUE PRESENTA EL CALCULO NUMERICO DE LA REFRACCION DE UNA ONDA MONOCROMATICA

BIBLIOGRAFIA

- AAGE BERTELSEN, J., IVAR G. JONSSON and OVE SKOVGAARD: «Refraction of surface gravity waves. Numerical calculation of wave orthogonal and heights». Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering Technical University of Denmark Report. Número 36 (1972).
- «Calculation of wave heights due of refraction and friction». Institute of Hydrodynamics and hydraulic Engineering. Technical University of Denmark (1973).
- CONDE, J. J.: «Soluciones aproximadas del problema de la onda de gravedad en un fluido irrotacional». Laboratorio de Puertos «Ramón Iribarren» (1973).
- «Cálculo numérico de la refracción de una onda monocromática». Laboratorio de Puertos «Ramón Iribarren» (1974).
- CHAO, Y. Y.: «An asymptotic Evaluation of the Gravity Waves Field Near a Smooth Caustic». *Jour. of Geophys. Res.* Oct. (1971).
- CHU, H. L.: «Numerical model for Waves refraction by finite amplitude wave Theories». Prc. Symp. on Modeling Techniques (Modeling 75). San Francisco, sept. 1975. *Am. Soc. Civ. Engrs.* Nueva York, N. Y. 2.º 1082 - 1100 (1975).
- GRISLOW, G.: «Numerical calculation of wave refraction». *Journal of Geophysical Research*. Vol. 68. Número 6. Marzo, 1963.
- IRIBARREN CAVANILLES, R.: «Obras de abrigo de los puertos». *Revista de Obras Públicas*. Madrid. Enero, 1941.
- JOHNSON, J. W.; O'BRIEN, M. P., and ISAACS, J. D.: «Graphical construction of wave refraction diagrams». Hydrographic Office. Publ. 605. January, 1941.
- LUDWIG, D.: «Uniform asymptotic expansions at a caustic». *Comm. Pure and Appl. Math.* Vol. 19, número 2, págs. 215-250 (1966).
- LEPETIT, J. P.: «Etude de la refraction de lahoule monochromatique par le calcul numerique». *Bulletin de Centre de Recherches et d'Essais de Chatou*. Número 9 (1964).
- «Analogie entre les ondes de gravité et les ondes ultrasonores». *Electricité de France*. Supplement au número 4. Serie A (1967).
- MUNK, W. H., and ARTHUR, R. S.: «Wave intensity a long a refracted ray». Gravity Waves. U. S. Departament of Commerce. Circular 521.
- PIERSON, W. J.: «The interpretation of crossed orthogonals in waves refraction phenomena». U. S. Army Beach Erosion Board, Tech. Report. 21 (1951).
- PIEST JÜRGEN: «Seegangsbestimmung und Seegangsrefraktion in einem Meer mit nicht-ebenem Boden. Eine theoretische Untersuchung». *Deutsche Hydrographische Zeitschrift. Heft. 6* (1965).
- SKOVGAARD, O., and PETERSEN, M. H.: «Refraction of cnoidal waves». *Coast. Eng.*, 1. Printed in Netherland (1977).
- «Refraction computations for practical applications». Ocean Wave Measurement and Analysis. A.S.C.E. (1976).