

LAS AGUAS SUBTERRANEAS Y LOS NUMEROS DE FIBONACCI

Por **ALBERTO BENITEZ**
Dr. Ingeniero de Caminos

Casi en los últimos años de la Enseñanza General Básica se presenta a los alumnos la sucesión de números de Fibonacci, con una génesis tan elemental como que los dos primeros términos de la sucesión son 1,1 y cada término siguiente es la suma de los dos anteriores, o sea que la sucesión empieza siendo:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... etc.

Leonardo de Pisa, apodado Fibonacci (1175-1230), fue casi el único matemático de importancia que llenó el profundo vacío científico de la Edad Media, que transcurre desde los matemáticos indios del siglo VII hasta el Renacimiento en el siglo XVI, con Tartaglia, Copérnico, Galileo, Kepler y tantos otros nombres ilustres.

La sucesión de fracciones obtenidas dividiendo cada número de Fibonacci por el siguiente, es decir la sucesión:

$1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55, \dots$

resultó tener entre otras la interesante propiedad de que converge hacia la sección aurea $(\sqrt{5} - 1)/2$ de los antiguos griegos. También parece tener una

clara relación con figuras helicoidales o espirales naturales tales como la distribución de brotes de ramas o espinas en muchas plantas o la distribución de las semillas en la flor del girasol. Tienden éstas a seguir la sucesión de Fibonacci, siendo el numerador una expresión del giro en la hélice o espiral y el denominador una expresión del radio de puntos de la espiral o del desplazamiento vertical en el tronco, correspondiente a un nuevo brote. También la sucesión de fracciones de Fibonacci coincide muy exactamente con formas espirales animales como de la de la bien conocida concha del Nautilus. También modelos genéticos relacionados con las leyes de Mendel utilizan la sucesión.

Quizá al llegar a este punto el lector se preguntará: ¿qué diablos puede tener todo esto que ver con la exploración de aguas subterráneas? y, sin embargo, la sucesión de Fibonacci permite un moderno enfoque mucho más económico a la exploración hidrogeológica.

Un clásico problema de los que nos dedicamos a las aguas subterráneas es el de determinar el punto más profundo de un sección acuífera como la indicada en la figura 1. Evidentemente el punto óptimo de perforación de un pozo o galería suele estar en la parte más profunda del acuífero en

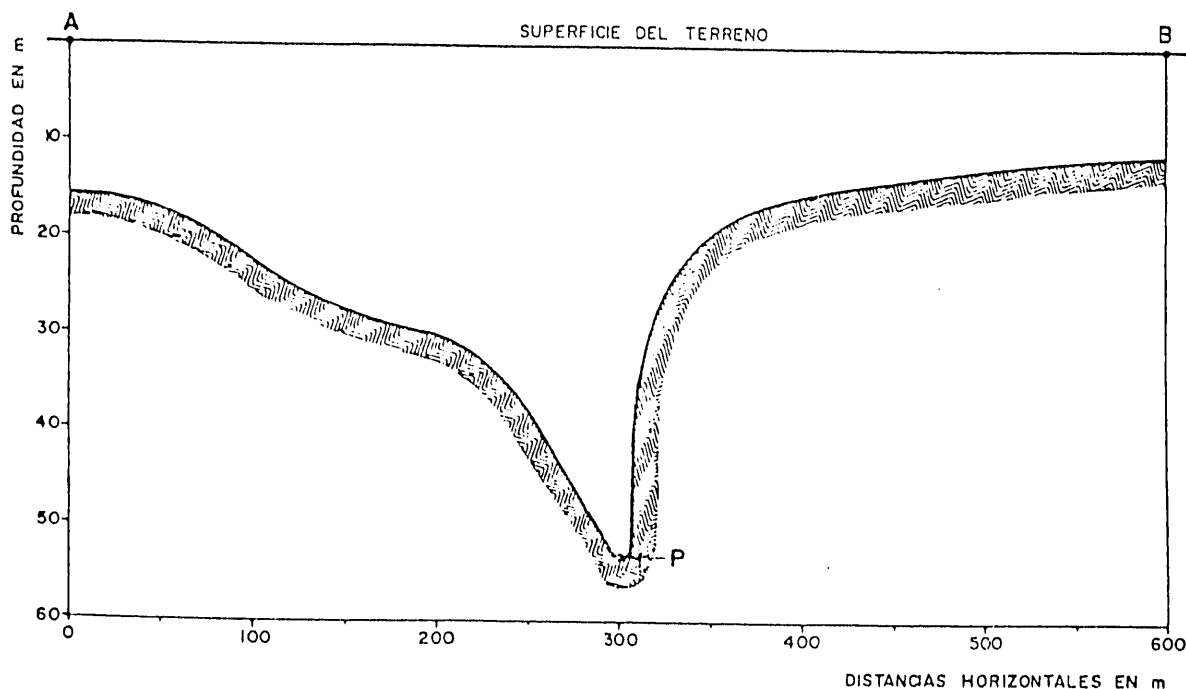


FIG. 1 - EJEMPLO DE SECCION DE ACUIFERO PARA ILUSTRAR EL METODO

LAS AGUAS SUBTERRANEAS Y LOS NUMEROS DE FIBONACCI

donde es mayor la carga hidráulica y por lo tanto la transmisividad y en donde también la capacidad de almacenamiento subterráneo es máxima.

Un problema cotidiano es conocer dónde está localizada esta profundidad máxima. El método comúnmente usado suele ser el de realizar una serie de sondeos, generalmente equidistantes, que cubran la sección y nos den en ellos el fondo del acuífero (ver figura 5). Con estos datos se dibuja el perfil correspondiente, se determina la parte más profunda y en ella se establece el pozo o galería de explotación. Este pedestre sistema viene a ser de un 60 a más del 100 % más caro del que podría conseguirse utilizando métodos de investigación operativa y, entre ellos uno de los más usados en países modernos, por su simplicidad y eficacia, es el de la utilización de los números de Fibonacci.

Partamos de una serie de hipótesis que, afortunadamente, suelen cumplirse en la mayor parte de los casos reales:

1. Que puede acotarse una anchura del acuífero $AB = t_0$, supuesto bidimensional, dentro de la cual está el punto más profundo buscado.
2. Que la sección del fondo del acuífero es una curva unicursal y que sólo tiene un punto mínimo (es decir, de máxima profundidad).
3. Que se establece una tolerancia final prefijada t_i en anchura, siéndonos indiferente construir el pozo de explotación en cualquier punto dentro del intervalo de tolerancia t_i , en relación con la distancia al punto más profundo buscado P .

Definamos algunos parámetros:

t_0 = Tolerancia inicial, es decir, antes de hacer ningún sondeo, que puede equipararse a toda la anchura acotada AB .

t_i = Tolerancia obtenida después de haber realizado i sondeos (hipotéticos o reales, según se verá).

n = Número de orden de la sucesión de Fibonacci F_n que, como después se verá, se identifica con el número máximo de sondeos a efectuar para una tolerancia dada t_i . Como ya se ha dicho:

$n = 0; F_0 = 1$	$n = 5; F_5 = 8$
$n = 1; F_1 = 1$	$n = 6; F_6 = 13$
$n = 2; F_2 = 2$	$n = 7; F_7 = 21$
$n = 3; F_3 = 3$	$n = 8; F_8 = 34$
$n = 4; F_4 = 5$	$n = 9; F_9 = 55$

i = Número de sondeos realizados en un momento determinado (hipotéticos o reales).

La tolerancia después de i sondeos puede definirse como:

$$t_i = \frac{F_{n-i}}{F_n} t_0 \quad (1)$$

A partir de esta fórmula se puede determinar el número máximo de sondeos n en función de la to-

lerancia final deseada t_i . Si expresamos en porcentaje la tolerancia final deseada respecto a la inicial, es decir, $100 t_i/t_0$, la figura 2 nos relaciona los valores máximos de n respecto a este porcentaje.

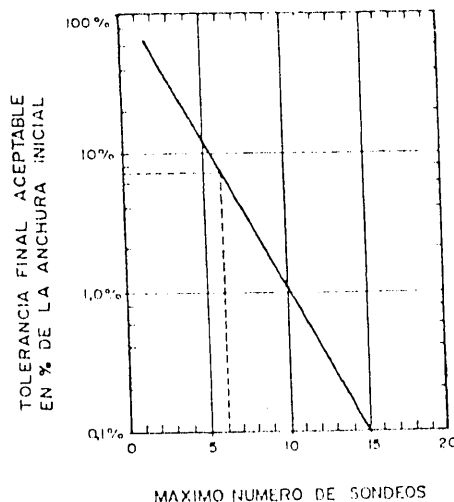


FIG. 2 - ABACO PARA DETERMINAR EL
NÚMERO DE SONDEOS NECESARIOS

Ilustremos el método con un ejemplo, representado en la figura 1, en donde, por otras razones, se han fijado los puntos A y B como límites de la anchura del acuífero a explorar.

Supongamos también que se fija una tolerancia final $t_i = 45$ m., es decir, que se considera indiferente que el pozo de explotación esté a cualquier distancia menor del 45 m. del punto más profundo, P .

La relación final de tolerancia es:

$$\frac{t_i}{t_0} = 100 \frac{45}{600} = 7,5 \%$$

Entrando en la figura 2, se advierte que se necesita un máximo n de 6 sondeos y que para la tolerancia mínima requerida, de la fórmula (1) también $i = 6$.

Comprobemos en la ecuación (1) la tolerancia para $n = 6; i = 6$.

$$t_6 = \frac{F(6-6)}{F_6} t_0 = \frac{F_0}{F_6} t_0 = \frac{1}{13} 600 = 46,15 \text{ m.}$$

suficientemente próxima a los 45 m. prefijados, y utilizados para entrar en la figura 2.

Vayamos ahora dando valores sucesivos a i . Ya se ha fijado:

$$i = 0; \quad t_0 = 600 \text{ m.}$$

Para $i = 1$:

$$t_1 = \frac{F(6-1)}{F_6} t_0 = \frac{F_5}{F_6} t_0 = \frac{8}{13} 600 = 369,23 \text{ m.}$$

Y efectuamos dos sondeos S_{11} y S_{12} a esa distancia de cada uno de los dos puntos límites A y B (ver figura 3). En los subíndices 11 y 12, el primer

LAS AGUAS SUBTERRANEAS Y LOS NUMEROS DE FIBONACCI

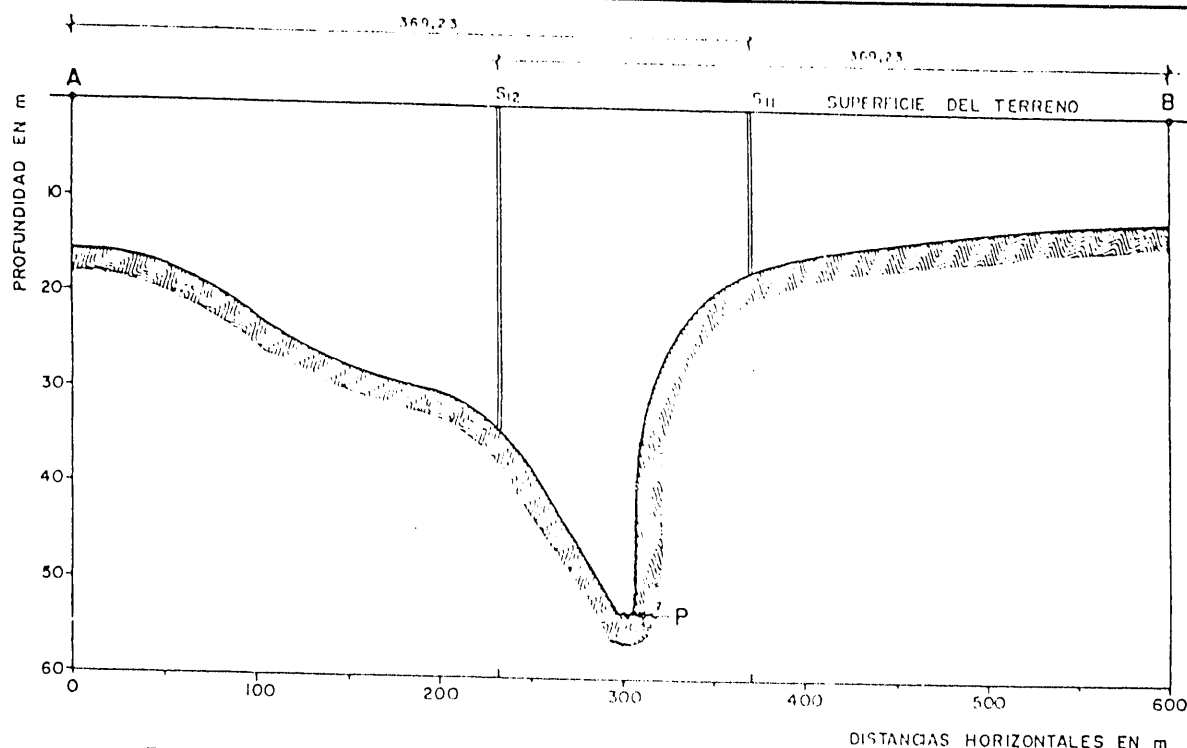


FIG. 3 - SITUACION DE LOS DOS PRIMEROS SONDEOS EXPLORATORIOS

digito significa a qué grado de tolerancia corresponde el sondeo.

Partiendo de la hipótesis de que la curva del fondo es unicursal y con sólo un mínimo, ya se ha deducido (puesto que S_{12} es más profundo que S_{11}), que el punto más profundo yace entre A y S_{11} .

Para $i = 2$:

$$t_2 = \frac{F(6-2)}{F_6} t_0 = \frac{F_4}{F_6} t_0 = \frac{5}{13} 600 = 230,77 \text{ m.}$$

pero obsérvese que, por la estructura misma de los números de Fibonacci, estos posibles sondeos a la distancia t_2 de A o de B coinciden con los anteriores.

Hacemos, pues $i = 3$:

$$t_3 = \frac{F(6-3)}{F_6} t_0 = \frac{F_3}{F_6} t_0 = \frac{3}{13} 600 = 138,46 \text{ m.}$$

y realizamos un nuevo sondeo S_{31} a 138,46 m. de A.

Analicemos brevemente, sobre los tres sondeos realizados hasta ahora la estrategia general del método:

1. Sobre el intervalo inicial $t_0 = AB$ —determinado por razones ajenas al método (estudios geológicos, geofísicos u otras razones cualesquiera)— se sitúan, por el método descrito, dos sondeos S_{11} y S_{12} simétricos respecto al centro de AB.

2. El paso anterior permite afirmar que el punto P más profundo está entre A y S_{11} . Es decir, el intervalo inicial AB se ha reducido ya a A S_{11} .

3. Continuando con el método, se perfora S_{31} , que conduce, con el ya existente S_{12} , a disponer de dos sondeos S_{31} y S_{12} , de nuevo simétricos con el eje del nuevo intervalo A S_{11} .

4. Este nuevo sondeo permite afirmar que el punto P está entre S_{11} y S_{31} . El nuevo intervalo de tolerancia es $t_3 = S_{31} S_{11}$ y sobre él continuamos la prosecución del método.

Para $i = 4$:

$$t_4 = \frac{F(6-4)}{F_6} t_0 = \frac{F_2}{F_6} t_0 = \frac{2}{13} 600 = 92,31 \text{ m.}$$

Al ir a realizar el nuevo sondeo S_{41} a 92,31 m. del ya realizado, y nuevo origen S_{13} (ver figura 4) coincide con S_{12} , por lo tanto el nuevo sondeo 42 (segundo intento) lo realizamos desde el final S_{11} .

Como el nuevo sondeo efectuado S_{42} es más profundo que S_{12} , se puede afirmar que el punto P se encuentra entre S_{12} y S_{11} . El nuevo intervalo de acción será $S_{12} S_{11}$.

Para $i = 5$:

$$t_5 = \frac{F(6-5)}{F_6} t_0 = \frac{F_1}{F_6} t_0 = \frac{1}{13} 600 = 46,15 \text{ m.}$$

Intentamos realizar el último sondeo desde S_{12} , a 46,15 m., coincidiendo con S_{42} . Lo realizamos desde S_{11} , obteniendo el S_{52} .

Como la profundidad obtenida con el sondeo S_{52} es menor que la del S_{42} , quiere decirse que el pozo se considerará el S_{42} o que debe realizarse entre éste y S_{52} .

LAS AGUAS SUBTERRANEAS Y LOS NUMEROS DE FIBONACCI

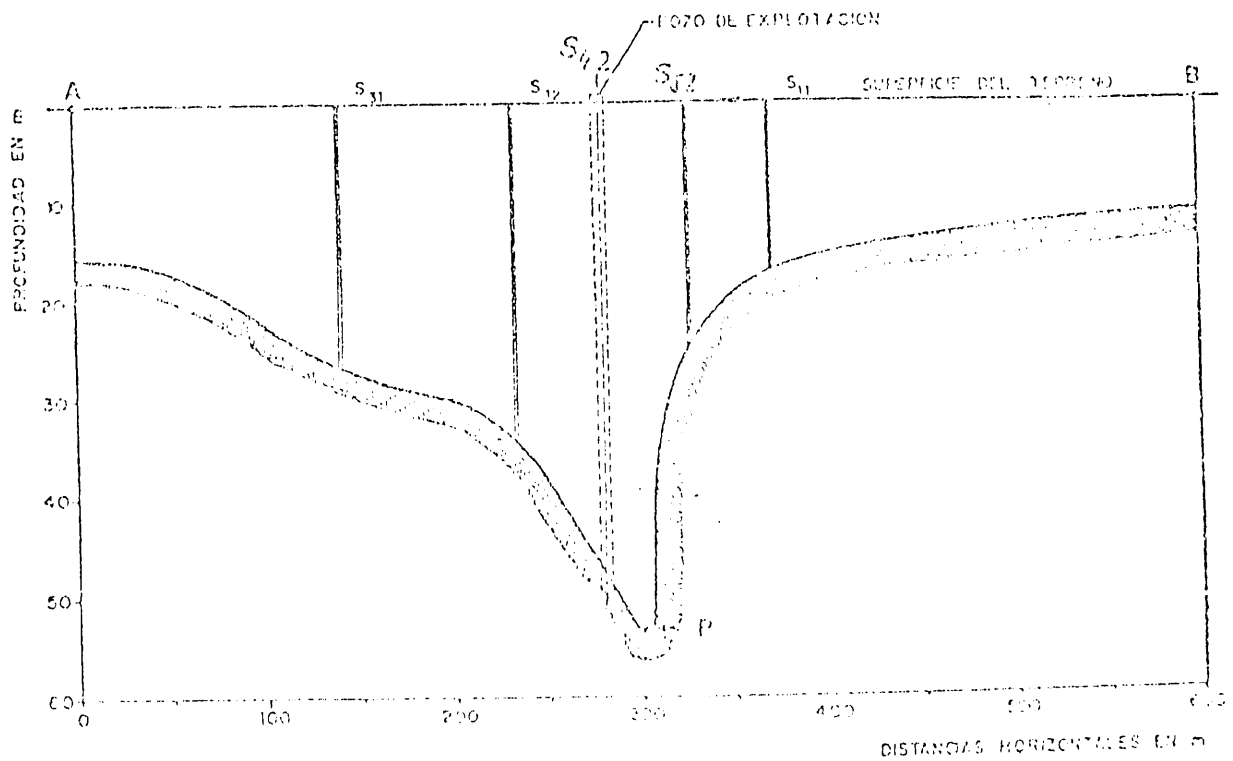


FIG. 4 --DISPOSICION FINAL DE LOS SONDEOS

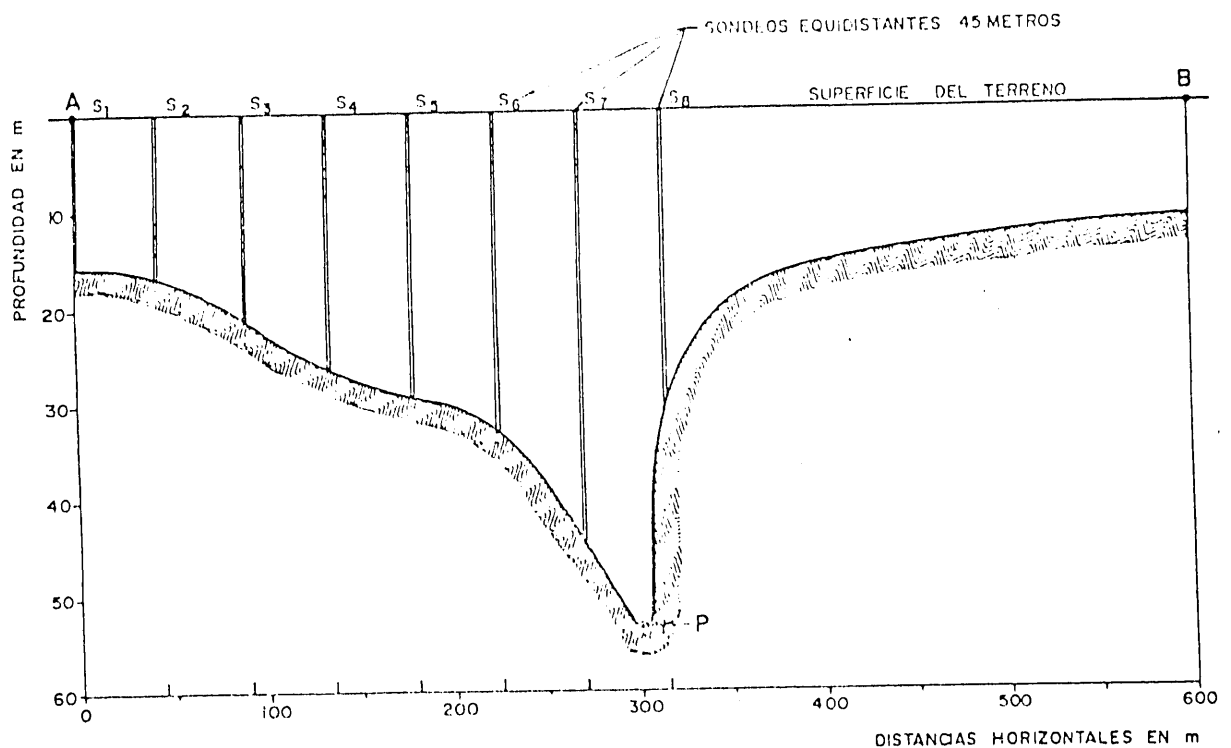


FIG. 5 - METODO CONVENCIONAL O "CIEGO" PARA DETERMINAR LA POSICION DEL POZO DE EXPLOTACION

LAS AGUAS SUBTERRANEAS Y LOS NUMEROS DE FIBONACCI

Comparemos el método estratégico de los números de Fibonacci con el método convencional de cortina de sondeos, distanciados entre sí la tolerancia final (en este caso 45 m.). (Ver figura 5).

Método convencional

Número de sondeos: 8

Longitudes de sondeo:

<u>Sondeo N.º</u>	<u>Profundidad (m)</u>
1	15,00
2	18,10
3	21,30
4	24,80
5	28,40
6	35,50
7	45,40
8	42,40
Total longitud	230,90

Método estratégico de los números de Fibonacci

Número de sondeos: 5

Longitudes de sondeo:

<u>Sondeo N.º</u>	<u>Profundidad (m)</u>
S ₁₁	18,00
S ₁₂	36,80
S ₃₁	25,00
S ₄₂	46,90
S ₅₂	37,00
Total longitud	163,70

Comparación Económica:

No se pretende entrar aquí en justificación de costes de sondeo, tan variables con multitud de factores: tipo de sonda, accesibilidad a la obra,

disponibilidad de agua, de alojamiento, costes de mano de obra, etc., y se adoptan como tipos:

20.000 pts/sondeo en concepto de traslado e instalación de sonda, suministro de agua, etc.

2.000 pts/metros sondeado, incluyendo entubación, toma de muestras, almacén de muestras, etc.

Para ejemplo descrito se tendrá los costes siguientes:

Método convencional

$$8 \times 20.000 + 230,90 \times 2.000 = 621.800 \text{ pts.}$$

Método estratégico de los números de Fibonacci

$$5 \times 20.000 + 163,70 \times 2.000 = 477.400 \text{ pts.}$$

Es decir, en este caso la utilización del método estratégico mostrado representa un ahorro del

$$\text{coste del } \frac{621.800 - 477.400}{621.800} = 23,22 \% \text{ en}$$

relación con el empleo del método convencional de sondeos equidistantes.

En campañas de sondeos importantes se advierte, pues, que pueden ahorrarse cientos de millones de pesetas utilizando este sencillo método estratégico.

Bibliografía

- A. Benítez. Captación de aguas subterráneas. 1963-1972.
- Helweg. 1976. Ground Water. "Fibonacci Search for High-Yield Well Sites".
- Luenberger, D.G. 1973. Introduction to linear and nonlinear programming. Addison Wesley, Reading.
- Millington, T.A. and W. Millington. 1966. Dictionary of Mathematics. Barnes & Noble, Cranbury.
- A. Benítez. Factores de Conversión de Unidades. Bellisco. 1975.