

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

Por **Ricardo MARQUES FERNANDEZ**

Catedrático de Física Industrial de la Universidad de Barcelona

**Martín LLORENS MORRAJA**

Profesor Adjunto de Física Industrial de la Universidad de Barcelona

**Miguel VILLARRUBIA LOPEZ**

Profesor Adjunto de Física Industrial de la Universidad de Barcelona

## 1. Introducción

El estudio de muchos fenómenos de interés en la técnica conduce a la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales o cuasi-lineales. En particular, las oscilaciones de columnas líquidas, son de gran importancia en el campo de la Hidráulica Aplicada. Oscilaciones de columnas líquidas las tenemos, por ejemplo, al analizar: trasvases de líquidos entre dos depósitos, vaciado de recipientes, oscilaciones en chimeneas de equilibrio, etc. [1], [2], [3].

En el desarrollo que sigue, a partir de la ecuación diferencial de segundo orden cuasi-lineal que rige algunos de estos fenómenos de oscilación de columnas líquidas, tratamos de obtener diferentes soluciones aproximadas de la misma a la vez que se compara la bondad de los modelos matemáticos de Kryloff, Bogoliuboff y de Linsted, Liapounoff en los que se fundamenta su resolución.

## 2. Fenómenos de oscilación entre dos depósitos

Al tratar de estudiar un fenómeno transitorio en Mecánica de Fluidos se presenta la dificultad de que la velocidad  $c$  del fluido es función del tiempo y por consiguiente, de la misma forma, el número de Reynolds,  $Re$ , también depende del tiempo. Por consiguiente el factor de fricción  $f$ , que es función de  $Re$ , no es constante. Sin embargo, cuando las fluctuaciones de la velocidad no son muy considerables, los valores medios de  $f$  no difieren mucho de los que corresponden al régimen estacionario [1], [2]. Es por esta razón que, en el ejemplo que se considera a continuación, no se tendrán en cuenta las variaciones de  $f$  con el tiempo.

Consideremos el esquema de la figura 1. El depósito 1 contiene líquido hasta un cierto nivel  $z_1$  ( $z_1 > 0$ ) por encima de la posición de equilibrio, en donde tomamos el origen de coordenadas para el eje  $z$ . El depósito 2 tiene la superficie libre del líquido en la posición  $z_2$  ( $z_2 < 0$ ). Los depósitos se suponen cilíndricos (con áreas para sus secciones transversales  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente), abiertos a la atmósfera y comunicados por su base mediante una tubería, de longitud  $L$  y diámetro interior  $D_t$ , que incorpora una válvula de paso.

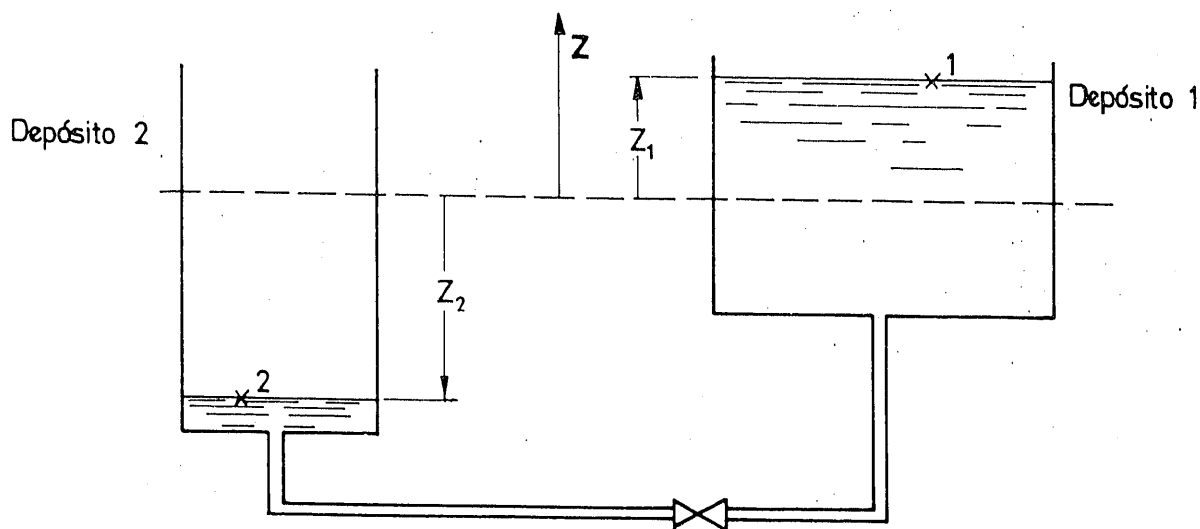


Figura 1.— Oscilación entre dos depósitos.

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

Cuando la válvula se abre bruscamente se inicia un movimiento oscilatorio como consecuencia del continuo trasvase de líquido entre los dos recipientes. A fin de determinar la ecuación que rige el transitorio, aplicamos la ecuación de Bernoulli generalizada a fluidos viscosos y en régimen no estacionario [2] para un flujo incomprensible y a lo largo de una línea de corriente entre las superficies libres del fluido (puntos de referencia 1 y 2 en la figura). Al aplicarla se tendrá en cuenta que  $p_1 = p_2 = p_{atmosférica}$ , por lo que el Teorema de Bernoulli establece en este caso [2]:

$$\frac{c_1^2}{2g} + z_1 = \frac{c_2^2}{2g} + z_2 + \sum h_f + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial c}{\partial t} ds \quad (1)$$

En esta ecuación  $c_1$  y  $c_2$  son las velocidades medias de las superficies libres,  $c$  la velocidad media del fluido en una sección transversal y en una posición  $s$  arbitraria entre las dos superficies,  $z_1$  y  $z_2$  las posiciones en el instante  $t$  de las superficies libres medidas sobre el eje  $z$ ,  $\sum h_f$  la pérdida total de carga,  $g$  la aceleración de la gravedad. Teniendo en cuenta que en todo instante se verifica que,

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 = 0 ; \quad z_1 A_1 + z_2 A_2 = 0$$

( $c_1 < 0$ ,  $c_2 > 0$  en los primeros instantes del transitorio) y que el efecto de la aceleración local sólo es apreciable a lo largo de la tubería, en donde el flujo es uniforme, se deduce fácilmente que,

$$\left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \frac{c_1^2}{2g} + \left( 1 + \frac{A_1}{A_2} \right) z_1 = \sum h_f + \frac{L}{g} \frac{dc}{dt} \quad (2)$$

La pérdida de carga  $\sum h_f$  se determina despreciando el efecto de rozamiento fluido en los depósitos por ser, en cualquier caso, poco importante frente al de la tubería de unión y al de la válvula. Por consiguiente [4],

$$\sum h_f = \left( f \frac{L}{D_t} + \sum K \right) \frac{c |c|}{2g} \quad (3)$$

en donde se representa por  $\sum K$  el coeficiente global de las pérdidas de carga menores, como son las de embocadura, los codos y la válvula.

Si ahora, y de acuerdo con la ecuación de continuidad, tenemos en cuenta que,

$$c_1 A_1 + c A_t = 0$$

donde  $A_t$  es el área de la sección transversal de la tubería y además que,  $c_1 = dz_1/dt$  resulta:

$$c = - \frac{A_1}{A_t} \frac{dz_1}{dt} \quad (4)$$

por lo que sustituyendo en (2)  $c_1$  por la derivada primera de  $z_1$  respecto del tiempo y  $c$  por (4) se tiene:

$$\frac{1}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \left( \frac{dz_1}{dt} \right)^2 + \left( 1 + \frac{A_1}{A_2} \right) z_1 = - \frac{1}{2g} \left[ f \frac{L}{D_t} + \sum K \right] \left( \frac{A_1}{A_t} \right)^2 \frac{dz_1}{dt} \left| \frac{dz_1}{dt} \right| - \frac{L}{g} \frac{A_1}{A_t} \frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad (5)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{1}{2L} \left[ \beta \frac{A_1}{A_t} \mp \left[ \frac{A_t}{A_1} - \frac{A_t A_1}{A^2} \right] \right] \frac{dz_1}{dt} \left| \frac{dz_1}{dt} \right| + \frac{g A_t}{L A_1} \left( 1 + \frac{A_1}{A_2} \right) z_1 = 0 \quad (6)$$

donde la constante adimensional  $\beta$  se ha definido como sigue:

$$\beta = f \frac{L}{D_t} + \sum K$$

y en donde el primer signo corresponde a las semioscilaciones en las que  $z_1$  decrece y el segundo signo a las semioscilaciones en las que  $z_1$  aumenta.

Las condiciones iniciales correspondientes a la ecuación diferencial cuasi-lineal (6) son:

$$t_0 = 0 \quad z_1(t_0) = z_{1,0} \quad \left( \frac{dz_1}{dt} \right)_{t_0} = 0 \quad (7)$$

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

En el caso particular de oscilación de líquidos entre depósitos de la misma sección transversal, la ecuación (6) se simplifica pudiéndose reescribir en la forma:

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{\beta A_1}{2LA_t} \frac{dz_1}{dt} \left| \frac{dz_1}{dt} \right| + \frac{2gA_t}{LA_1} z_1 = 0 \quad (8)$$

Efectuemos el siguiente cambio de variables:

$$\theta = \frac{z_1}{z_{1,0}} \quad \tau = \sqrt{\frac{2gA_t}{LA_1}} t \quad (9)$$

Las nuevas variables  $\theta$  y  $\tau$  son adimensionales; en función de las mismas las dos primeras derivadas de  $z_1$  respecto del tiempo son,

$$\frac{dz_1}{dt} = z_{1,0} \sqrt{\frac{2gA_t}{LA_1}} \frac{d\theta}{d\tau}; \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{2gA_t z_{1,0}}{LA_1} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} \quad (10)$$

por lo que sustituyendo  $z_1$  y sus dos primeras derivadas en (8) fácilmente se deduce:

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = k \frac{d\theta}{d\tau} \left| \frac{d\theta}{d\tau} \right| + \theta = 0; \quad k = \frac{\beta z_{1,0} A_1}{2LA_t} \quad (11)$$

donde  $k$  es a su vez una constante adimensional. Las condiciones iniciales para este planteamiento adimensional del problema son ahora:

$$\tau_0 = 0 \quad \theta(\tau_0) = \theta_0 = 1 \quad \left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_{\tau_0} = 0 \quad (12)$$

En el caso de considerar los depósitos de distinta sección transversal, procediendo de manera análoga, resulta la misma ecuación diferencial, de idénticas condiciones iniciales y con los siguientes valores para el coeficiente  $k$ :

$$k = \frac{z_{1,0}}{2L} \left[ \beta \frac{A_1}{A_t} \mp \left( \frac{A_t}{A_1} - \frac{A_t A_1}{A_2^2} \right) \right] \quad (13)$$

donde el primer signo es para las semioscilaciones con  $z_1$  decreciente y el segundo signo para las semioscilaciones con  $z_1$  creciente.

## 3. Planteamiento del problema

La ecuación diferencial que tratamos de resolver es la siguiente:

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + k \frac{d\theta}{d\tau} \left| \frac{d\theta}{d\tau} \right| + \theta = 0 \quad (14)$$

de condiciones iniciales:

$$\tau_0 = 0 \quad \theta(\tau_0) = \theta_0 = 1 \quad \left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_0 = 0 \quad (15)$$

en la que tanto  $\theta$  como  $\tau$  son variables adimensionales representativas respectivamente de la altura de la columna líquida oscilante y del tiempo. El coeficiente adimensional  $k$ , depende de la naturaleza del fluido, de la geometría del sistema y en particular, da idea del efecto de rozamiento fluido por lo que está directamente vinculado al coeficiente de rozamiento o de fricción que se define en Mecánica de Fluidos [1]. En un trabajo reciente [5] abordábamos la resolución de la ecuación planteada por un método analítico que permite determinar con exactitud los sucesivos máximos y mínimos de la función  $\theta$ , lo que implica conocer los mayores desplazamientos de la columna líquida en oscilación. Así obteníamos,

$$(1 \pm 2k\theta_i) e^{\mp 2k\theta_i} = (1 \pm 2k\theta_{i+1}) e^{\mp 2k\theta_{i+1}} \quad (16)$$

para  $i = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ , donde  $\theta_0$  es el valor inicial de la función  $\theta$  y  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$  son los sucesivos mínimos y máximos de esta función; siendo el primer signo para  $i = 0$  o número par y el segundo signo para  $i$  impar.

La ecuación (16) permite pues, determinar un máximo o un mínimo a partir del mínimo o máximo respectivamente anterior. Dicha ecuación es trascendente y se resuelve con facilidad a partir de métodos numéricos apropiados.

La información obtenida del tratamiento analítico no permitía determinar los valores de la variable independiente  $\tau$ , para los cuales se estaba en situación de extremo relativo de la función  $\theta$ . La integración punto a punto de (14) por los

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

métodos de Runge-Kutta [6] o de Hamming [7], de cuarto orden, establecían con precisión suficiente los valores  $\tau(\theta_1)$ ,  $\tau(\theta_2)$ , etc... En el trabajo mencionado se representan curvas de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\tau(\theta_1)$  y  $\tau(\theta_2)$  frente al parámetro adimensional  $k$ . Sin embargo, el método de integración numérica presenta el inconveniente de tener que recurrir de forma precisa a la reproducción punto a punto de la curva de oscilación, con el consiguiente uso de adecuadas técnicas de programación de los cálculos.

## 4. Aplicación del método de Kryloff y Bogoliuboff [8]

El método de Kryloff y Bogoliuboff establece una forma para determinar la solución aproximada de ecuaciones diferenciales cuasi-lineales del tipo:

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + k F \left[ \theta, \frac{d\theta}{d\tau} \right] + \omega^2 \theta = 0 \quad (17)$$

donde el parámetro  $k$  es una constante pequeña (menor que la unidad) y la función  $F$  depende de  $\theta$  y de su derivada.

La solución que se ensaya es del tipo,

$$\theta(\tau) = a(\tau) \sin[\omega\tau + \varphi(\tau)] \quad (18)$$

a la que se le impone la condición de que su derivada sea de la forma,

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \omega a(\tau) \cos[\omega\tau + \varphi(\tau)] \quad (19)$$

Operando con la función  $\theta(\tau)$  que se ensaya y con la condición impuesta sobre su derivada se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} \sin \Omega + a \frac{d\varphi}{d\tau} \cos \Omega &= 0 \quad \text{donde: } \Omega = \omega\tau + \varphi \\ \frac{da}{d\tau} \cos \Omega - a \frac{d\varphi}{d\tau} \sin \Omega &= -\frac{k}{\omega} F(a \sin \Omega, \omega a \cos \Omega) \end{aligned} \quad (20)$$

Las ecuaciones exactas que resuelven este sistema de ecuaciones son,

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{k}{\omega} F(a \sin \Omega, \omega a \cos \Omega) \cos \Omega \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{k}{\omega a} F(a \sin \Omega, \omega a \cos \Omega) \sin \Omega \end{aligned} \quad (21)$$

Con objeto de calcular las derivadas primeras de  $a$  y de  $\varphi$  respecto de  $\tau$ , se puede proceder a sustituir los segundos miembros de (21) por sus valores medios en un intervalo  $2\pi$  supuesta constante la amplitud  $a$  a lo largo del intervalo. Esta aproximación se fundamenta en el hecho de que ambas derivadas son pequeñas puesto que, de acuerdo con la expresión (21), son proporcionales a la constante  $k$ .

Por consiguiente, las ecuaciones exactas (21) se sustituyen por las aproximadas,

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &\approx -\frac{k}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} F(a \sin \Omega, \omega a \cos \Omega) \cos \Omega d\Omega \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &\approx \frac{k}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \Omega, \omega a \cos \Omega) \sin \Omega d\Omega \end{aligned} \quad (22)$$

Aplicando el método descrito a la ecuación diferencial (14) resulta:

*Ecuaciones exactas*

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -k a \cos^2 \Omega |a \omega \cos \Omega| \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= k \cos \Omega |a \omega \cos \Omega| \sin \Omega \end{aligned} \quad (21a)$$

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

Ecuaciones aproximadas

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{k \omega a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \Omega |\cos \Omega| d\Omega \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{k \omega a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \Omega \cos \Omega |\cos \Omega| d\Omega \end{aligned} \quad (22a)$$

Estas integrales se resuelven sin dificultad [9]. De la primera se obtiene,

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{4k \omega a^2}{3\pi}$$

de donde integrando respecto de  $\tau$  resulta:

$$a = \frac{1}{\frac{4k\omega}{3\pi} \tau + C} \quad (23)$$

siendo C una constante de integración a determinar a partir de las condiciones iniciales (15).

Análogamente para  $d\varphi/d\tau$  se tiene,

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

de donde,

$$\varphi = \varphi_0 \quad (24)$$

siendo  $\varphi_0$  una segunda constante de integración a determinar asimismo a partir de (15).

Por consiguiente, la *solución aproximada* según se deduce de las expresiones (18), (23) y (24) será:

$$\theta(\tau) = \frac{1}{\frac{4k\omega}{3\pi} \tau + C} \sin(\omega\tau + \varphi_0) \quad (25)$$

Determinemos a continuación las constantes de integración C y  $\varphi_0$ . Para ello impongamos a (25) las condiciones iniciales,

$$\tau_0 = 0 \quad \theta_0 = \theta(0) \quad \dot{\theta}_0 = \frac{d\theta}{d\tau} \bigg|_0 \quad (26)$$

de las mismas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{C} \sin \varphi_0 \\ \dot{\theta}_0 &= -\frac{4k\omega}{3\pi} \frac{1}{C^2} \sin \varphi_0 + \frac{\omega}{C} \cos \varphi_0 \end{aligned}$$

cuya resolución permite obtener,

$$\varphi_0 = \arcsen \left[ \frac{1}{1 + \rho^2} \left[ -\mu\rho + \sqrt{1 + \rho^2 - \mu^2} \right] \right] \quad (27a)$$

$$C = \frac{1}{\theta_0} \sin \varphi_0 \quad (27b)$$

donde se han definido los parametros  $\rho, \mu$  de la siguiente forma,

$$\rho = \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0 \omega} \quad \mu = \frac{4k \theta_0}{3\pi} \quad (28)$$

y sustituyendo ahora (27 b) en (25) obtendremos finalmente una expresión analítica aproximada para  $\theta(\tau)$ ,

$$\theta(\tau) = \frac{1}{\frac{4k\omega}{3\pi} \tau + \frac{\sin \varphi_0}{\theta_0}} \sin(\omega\tau + \varphi_0) \quad (29)$$

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

En el caso que nos ocupa  $\dot{\theta}_0 = 0$ , por consiguiente  $\rho = 0$ , y entonces,

$$\varphi_0 = \arcsen \sqrt{1 - \mu^2} = \arcsen \sqrt{1 - \left(\frac{4k\theta_0}{3\pi}\right)^2}$$

teniendo en cuenta, además, que para  $\tau_0 = 0$ ,  $\theta_0 = 1$  y que  $\omega = 1$ ,  $\theta(\tau)$  es,

$$\theta(\tau) = \frac{1}{\frac{4k}{3\pi}\tau + \sqrt{1 - \left(\frac{4k}{3\pi}\right)^2}} \sin(\tau + \varphi_0) \quad (30)$$

El caso particular del movimiento armónico simple, puede deducirse fácilmente de la última expresión haciendo  $k = 0$ , lo que equivale a anular el término de rozamiento fluido en la ecuación diferencial (14) que rige algunos de los procesos de oscilación de líquidos.

## 5. Determinación de mínimos y máximos

Convengamos en designar por  $\tau_1$  el valor de  $\tau$  para el cual la función  $\theta$  adquiere la situación del primer mínimo,  $\theta_1$ ; es decir,  $\tau_1 = \tau(\theta_1)$ . En estas condiciones tendremos:

$$\left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_{\tau_1} = 0 \quad (31)$$

Aplicando la condición (31) a (29) se tiene,

$$0 = -\frac{\frac{4k\omega}{3\pi}}{\left(\frac{4k\omega}{3\pi}\tau_1 + \frac{\sin\varphi_0}{\theta_0}\right)^2} \sin(\omega\tau_1 + \varphi_0) + \frac{\omega}{\frac{4k\omega}{3\pi}\tau_1 + \frac{\sin\varphi_0}{\theta_0}} \cos(\omega\tau_1 + \varphi_0)$$

y simplificando y reordenando términos resulta,

$$\operatorname{tg}(\omega\tau_1 + \varphi_0) = \omega\tau_1 + \frac{3\pi}{4k} \frac{\sin\varphi_0}{\theta_0} \quad (32)$$

ecuación trascendente en  $\tau_1$  que se resuelve sin dificultad por métodos numéricos. La sustitución del valor resultante para  $\tau_1$  en (29) o en (30) permite determinar  $\theta_1$ .

Para hallar  $\tau_2$  y  $\theta_2$  correspondientes al primer máximo de la oscilación, se procedería exactamente de la misma forma. Así pues, en general, los sucesivos mínimos y máximos de  $\theta(\tau)$  vendrán dados por:

$$\operatorname{tg}(\omega\tau_i + \varphi_0) = \omega\tau_i + \frac{3\pi}{4k} \frac{\sin\varphi_0}{\theta_0} \quad (33)$$

$$\theta_i = \theta(\tau_i) \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots$$

En nuestro caso recordaremos:  $\theta_0 = 1$ ;  $\dot{\theta}_0 = 0$ ;  $\omega = 1$  por consiguiente,

$$\operatorname{tg}(\tau_i + \varphi_0) = \tau_i + \frac{3\pi}{4k} \sqrt{1 - \left(\frac{4k}{3\pi}\right)^2} \quad (34)$$

El movimiento armónico simple aparecería al hacer en (14)  $k = 0$ ; entonces,

$$\varphi_0 = \arcsen 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(\tau_i + \frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

por consiguiente,

$$\tau_i = i\pi \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots$$

## 6. Aplicación del método de Linsted y Liapounoff [8]

Consideremos la ecuación diferencial (14) expresada en la forma,

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} - k \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \omega^2 \theta = 0 \quad (35)$$

que es la correspondiente a la primera mitad de la oscilación. La introducción del factor  $\omega^2$  nos permitirá dar una mayor generalidad al desarrollo que sigue.

Si aplicamos a la ecuación (35) la transformación de Laplace [10] y tenemos en cuenta las condiciones iniciales dadas por (15) se obtiene,

$$\theta (s^2 + \omega^2) = s + k \mathcal{L} \left[ \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (36)$$

donde representamos por  $\bar{\theta}$  la transformada de Laplace de la función  $\theta(\tau)$ , por  $\mathcal{L}$  el símbolo de la transformación, siendo  $s$  el parámetro clásico que se introduce al definir la transformada de Laplace de una función.

A efectos de superar la alinealidad que introduce la derivada elevada al cuadrado en la ecuación diferencial (35) hagamos,

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha_0 + k \alpha_1 + k^2 \alpha_2 + k^3 \alpha_3 + \dots \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + k c_1 + k^2 c_2 + k^3 c_3 + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

donde  $\alpha_i$  son funciones de  $\tau$  a determinar, y  $\omega_0$  la pulsación de la onda fundamental. Las constantes  $c_i$  habrán de ser elegidas de manera tal que se eliminen las condiciones de resonancia.

Para sistemas no lineales con valores muy pequeños para el coeficiente  $k$  de la ecuación (35) comparados con  $\omega^2$  se puede demostrar que la serie que sustituye a  $\theta$  es convergente [8]. Si nos limitamos a considerar en los cálculos términos que incluyan a lo sumo el factor  $k^3$ , sustituyendo (37) en (36), despreciando los términos resultantes que contengan el factor  $k$  elevado a una potencia superior a la tercera, obtenemos:

$$\begin{aligned} &s^2 (\bar{\alpha}_0 + k \bar{\alpha}_1 + k^2 \bar{\alpha}_2 + k^3 \bar{\alpha}_3) + \omega_0^2 (\bar{\alpha}_0 + k \bar{\alpha}_1 + k^2 \bar{\alpha}_2 + k^3 \bar{\alpha}_3) + \\ &+ c_1 (k \bar{\alpha}_0 + k^2 \bar{\alpha}_1 + k^3 \bar{\alpha}_2) + c_2 (k^2 \bar{\alpha}_0 + k^3 \bar{\alpha}_1) + c_3 k^3 \bar{\alpha}_0 = \\ &= s + k \mathcal{L} \left[ \left( \frac{d\alpha_0}{d\tau} \right)^2 + 2k \frac{d\alpha_0}{d\tau} \frac{d\alpha_1}{d\tau} + 2k^2 \frac{d\alpha_0}{d\tau} \frac{d\alpha_2}{d\tau} + k^2 \left( \frac{d\alpha_1}{d\tau} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (38)$$

La ecuación (38) debe verificarse para cualquier valor de  $k$ ; por consiguiente, después de establecer la igualdad entre los diferentes coeficientes se deduce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(s^2 + \omega_0^2) \bar{\alpha}_0 = s \quad (39a)$$

$$(s^2 + \omega_0^2) \bar{\alpha}_1 = -c_1 \bar{\alpha}_0 + \mathcal{L} \left[ \left( \frac{d\alpha_0}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (39b)$$

$$(s^2 + \omega_0^2) \bar{\alpha}_2 = -c_1 \bar{\alpha}_1 - c_2 \bar{\alpha}_0 + \mathcal{L} \left[ 2 \frac{d\alpha_0}{d\tau} \frac{d\alpha_1}{d\tau} \right] \quad (39c)$$

$$(s^2 + \omega_0^2) \bar{\alpha}_3 = -c_1 \bar{\alpha}_2 - c_2 \bar{\alpha}_1 - c_3 \bar{\alpha}_0 + \mathcal{L} \left[ 2 \frac{d\alpha_0}{d\tau} \frac{d\alpha_2}{d\tau} + \left( \frac{d\alpha_1}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (39d)$$

La función  $\alpha_0$ , primitiva de  $\bar{\alpha}_0$  se obtiene de inmediato a partir de la expresión (39a),

$$\alpha_0 = \cos \omega_0 \tau \quad (40)$$

sustituyendo  $\alpha_0$  y su transformada de Laplace  $\bar{\alpha}_0$  en (39b), de acuerdo con la tabla de transformadas de Laplace [10], y operando, fácilmente puede obtenerse,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{6} \cos 2 \omega_0 \tau \quad (41)$$

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

donde se ha tomado  $c_1 = 0$  a fin de eliminar la condición de resonancia. Sustituyendo ahora en (39 c),  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y sus transformadas podremos obtener  $\alpha_2$

$$\alpha_2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{72} (61 \cos \omega_0 \tau - 16 \cos 2 \omega_0 \tau + 3 \cos 3 \omega_0 \tau) \quad (42)$$

en este caso la condición que elimina la resonancia es,

$$c_2 = \frac{\omega_0^2}{3}$$

Sustituyendo convenientemente las expresiones anteriores, así como las transformadas de Laplace de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en (39 d) y operando se obtiene,

$$\alpha_3 = \frac{23}{24} - \frac{1}{72} \left[ \frac{1318}{15} \cos \omega_0 \tau - 24 \cos 2 \omega_0 \tau + 6 \cos 3 \omega_0 \tau - \frac{13}{15} \cos 4 \omega_0 \tau \right] \quad (43)$$

habiéndose obtenido en este caso para  $c_3$ :

$$c_3 = -\frac{4}{9} \omega_0^2$$

A partir de las expresiones anteriores podemos obtener las soluciones con distintos órdenes de aproximación.

## Solución de primer orden

Viene dada por  $\alpha_0 + k \alpha_1$ , es decir,

$$\theta_{(1)} = \cos \omega_0 \tau + k \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{6} \cos 2 \omega_0 \tau \right]$$

de donde fácilmente se determina  $\theta_{(1)}$ , primer mínimo de  $\theta(\tau)$  correspondiente a la aproximación de primer orden,

$$\theta_{(1)} = -1 + \frac{4}{3} k$$

la pulsación natural  $\omega_0$  viene dada de acuerdo con (37), por

$$\omega_0 = \omega = 1$$

siendo  $\tau_{(1)}$  en este caso,

$$\tau [\theta_{(1)}] = \tau_{(1)} = \pi$$

## Solución de segundo orden

Viene dada por,  $\alpha_0 + k \alpha_1 + k^2 \alpha_2$ , es decir,

$$\theta_{(II)} = \cos \omega_0 \tau + k \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{6} \cos 2 \omega_0 \tau \right] - \frac{k^2}{72} \left[ 48 - 61 \cos \omega_0 \tau + 16 \cos 2 \omega_0 \tau - 3 \cos 3 \omega_0 \tau \right]$$

la frecuencia natural, para la aproximación de segundo orden es,

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{3}}}$$

teniendo en cuenta que en el caso que nos ocupa  $\omega = 1$ , el valor de  $\tau$  que hace mínimo a  $\theta_{(II)}$  es,

$$\tau_{(II)} = \pi \sqrt{1 + \frac{k^2}{3}}$$

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

por lo que sustituyendo en  $\theta)_{II}$ ,  $\omega_0 \tau$  por  $\pi$  tendremos el primer mínimo de  $\theta(\tau)$  correspondiente a la aproximación de segundo orden:

$$\theta_1)_{II} = -1 + \frac{4}{3}k - \frac{16}{9}k^2$$

## Solución de tercer orden

Viene dada por  $\alpha_0 + k\alpha_1 + k^2\alpha_2 + k^3\alpha_3$ , es decir,

$$\begin{aligned} \theta)_{III} = & \cos \omega_0 \tau + k \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{6} \cos 2 \omega_0 \tau \right] - \\ & - \frac{k^2}{72} \left[ 48 - 61 \cos \omega_0 \tau + 16 \cos 2 \omega_0 \tau - 3 \cos 3 \omega_0 \tau \right] + \\ & + \frac{k^3}{72} \left[ 69 - \frac{1318}{15} \cos \omega_0 \tau + 24 \cos 2 \omega_0 \tau - 6 \cos 3 \omega_0 \tau + \frac{13}{15} \cos 4 \omega_0 \tau \right] \end{aligned}$$

haciendo  $\omega_0 \tau = \pi$  en la expresión anterior determinaremos el primer mínimo de  $\theta)_{III}$  correspondiente a la aproximación de tercer orden,

$$\theta_1)_{III} = -1 + \frac{4}{3}k - \frac{16}{9}k^2 + \frac{352}{135}k^3$$

siendo en este caso  $\omega_0$ ,

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{3} - \frac{4}{9}k^3}}$$

y haciendo  $\omega = 1$  y  $\omega_0 \tau = \pi$  obtenemos,

$$\tau_1)_{III} = \pi \sqrt{1 + \frac{k^2}{3} - \frac{4}{9}k^3}$$

## 7. Resultados obtenidos

Tal como se ha expuesto en los desarrollos anteriores, los métodos de Kryloff, Bogoliuboff y de Linsted, Liapounoff permiten obtener soluciones aproximadas para la resolución de problemas de oscilaciones de líquidos en conducciones. A fin de comprobar el grado de aproximación de estos métodos, se ha procedido a la determinación de algunos valores notables, como son el primer mínimo  $\theta_1$  y el primer máximo  $\theta_2$  de  $\theta(\tau)$ , así como a la determinación de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , valores de  $\tau$  para los cuales se alcanzan estos mínimos y máximos respectivamente. Asimismo se comparan los resultados obtenidos con los que se hallan mediante la aplicación de la expresión analítica exacta (16) todo ello para distintos valores del parámetro  $k$ .

De esta forma, en la figura 2 se representa el primer mínimo de la oscilación  $\theta_1$  frente a  $k$ . En dicha figura aparece, además de la solución analítica exacta representada en línea de trazo continuo, la solución obtenida a partir del método de Kryloff y las soluciones de distinto orden que proporciona el método de Linsted. Todas ellas presentan para  $k=0$ , un valor  $\theta_1 = -1$ , correspondiente al caso de fricción nula, coincidiendo con el movimiento armónico simple. Como se puede comprobar, en todo el dominio de  $k$  considerado ( $0 \leq k \leq 1$ ), la solución obtenida por el método de Kryloff es excelente dado que las discrepancias que presenta con la solución analítica exacta son mínimas, aun para valores de  $k$  próximos a la unidad. No ocurre así, en cambio, con el método de Linsted, para el que, aun cuando crece su aproximación a medida que aumenta el orden de la solución, sólo presenta una aproximación aceptable hasta valores de  $k$  inferiores a 0,3 en el caso de la solución de tercer orden, y para valores superiores de  $k$  la discrepancia es importante y deja de ser aplicable con garantía.

La aproximación que presenta el método de Kryloff, Bogoliuboff en el cálculo del primer máximo sigue siendo buena, tal como se muestra en la figura 3, en donde se compara  $\theta_2$ , primer máximo de la oscilación, con el que resulta de aplicar la expresión analítica exacta (16). Ante la falta de aproximación que presenta el método de Linsted, Liapounoff en su aplicación al cálculo del primer mínimo para valores de  $k$  relativamente bajos, se ha omitido la representación en la figura 3, del primer máximo calculado por este método.

En la figura 4 se representa  $\tau_1$  frente a  $k$  y se comparan los resultados obtenidos mediante la aplicación de los citados métodos con los calculados por el método de integración numérica de Runge-Kutta. Todas las curvas tienden a  $\pi$  cuando tiende a anularse el parámetro  $k$ , caso correspondiente al movimiento armónico simple. De forma análoga a lo que sucedía

APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

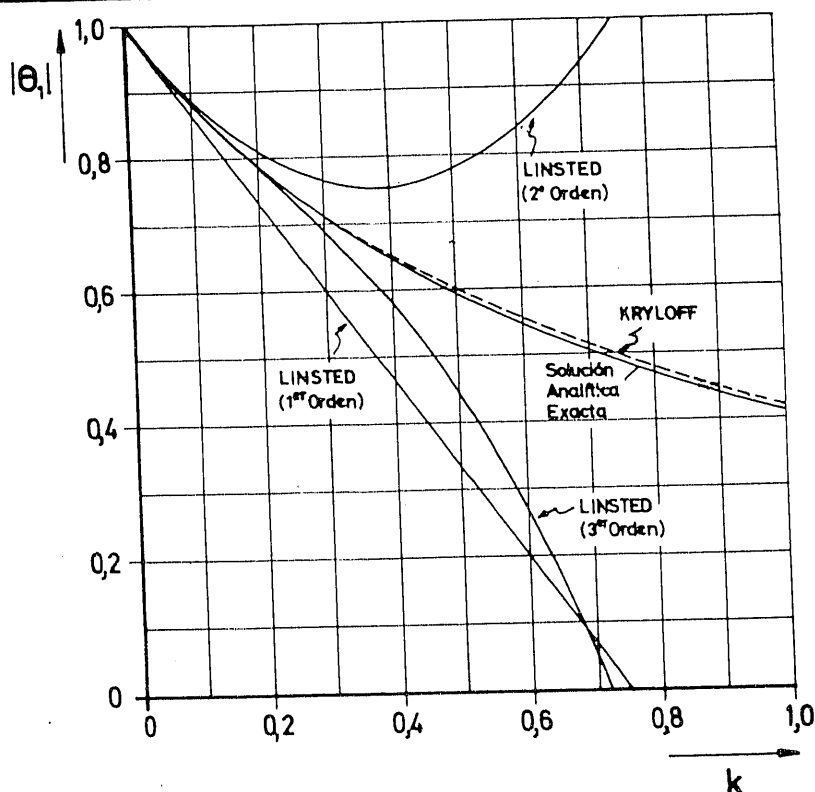


Figura 2.—Valor absoluto del primer mínimo  $\theta_1$  frente a  $k$  según los distintos métodos aplicados.

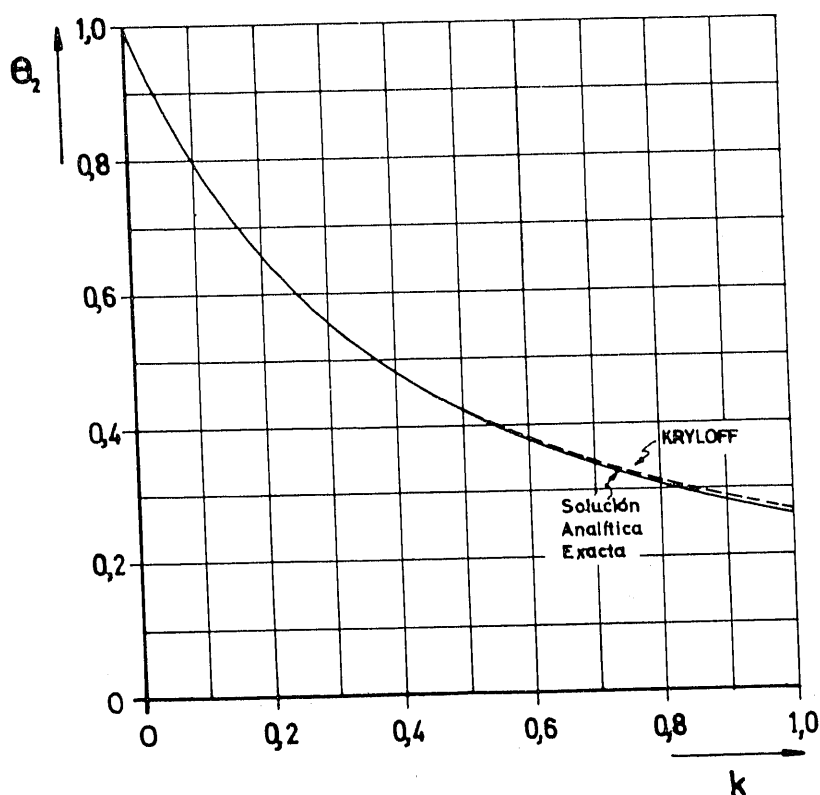


Figura 3.—Primer máximo  $\theta_2$  frente a  $k$ , según los métodos de Kryloff y el analítico exacto.

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

en la determinación del primer mínimo, el método de Kryloff presenta una buena aproximación a lo largo del dominio de  $k$  estudiado, mientras que el método de Linsted, incluso en el caso de la aproximación de tercer orden, deja de proporcionar resultados aceptables para valores de  $k$  aproximadamente superiores a 0,3.

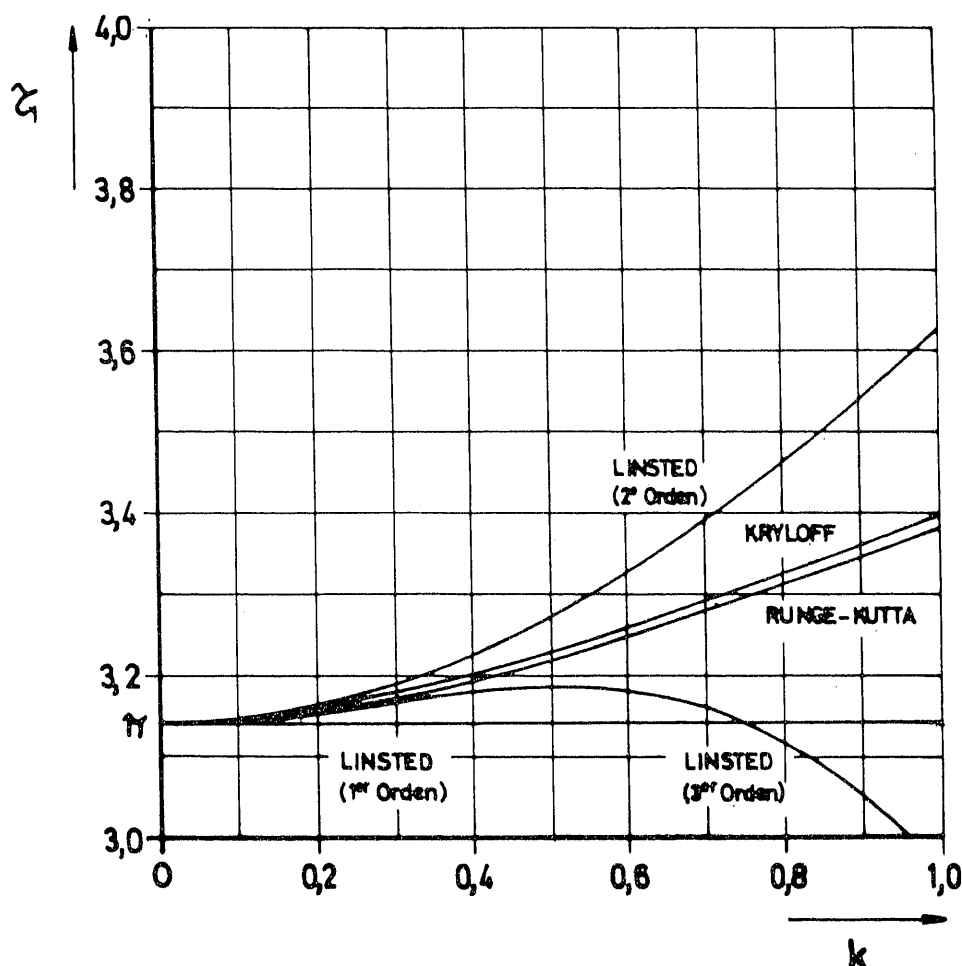


Figura 4.—Valores de  $\tau_1$  frente a  $k$  determinados por los distintos métodos aplicados.

En la figura 5 se representa  $\tau_2$  frente a  $k$  según el método de Kryloff comparando estos resultados con los que se han obtenido de la integración numérica de la ecuación diferencial, hallándose entre ambos una buena concordancia. En esta figura no se incluyen los resultados que se obtienen de la aplicación del método de Linsted debido a la pérdida de precisión que implica dicho método para valores de  $k$  relativamente bajos. Finalmente, en la figura 6, incluimos un detalle comparativo de la oscilación  $\theta(\tau)$  para  $k = 0,8$  según los métodos de Runge-Kutta y de Kryloff.

## 8. Conclusiones

En el presente trabajo, se han aplicado los métodos de Kryloff - Bogoliuboff y de Linsted - Liapounoff, éste con distintos grados de aproximación, para la obtención de la función adimensional  $\theta(\tau)$ .

La resolución de la ecuación diferencial no lineal (14) que aparece en el estudio de algunos regímenes transitorios en Hidráulica Aplicada, como el fenómeno de oscilación de líquido entre dos depósitos, requiere para su resolución el uso de métodos numéricos de integración para la determinación de  $\theta(\tau)$ , lo que implica disponer de una calculadora digital para su realización. Únicamente, se pueden calcular por vía analítica los valores estacionarios, máximos y mínimos, de la función  $\theta(\tau)$ , pero no así los valores de  $\tau$  para los que se alcanza. Los métodos de Kryloff-Bogoliuboff y de Linsted-Liapounoff ofrecen la posibilidad de determinar soluciones analíticas de carácter aproximado para la función de  $\theta(\tau)$ , a partir de expresiones relativamente sencillas, tal como se indica en el presente trabajo.

A fin de comprobar la bondad de dichos métodos se ha procedido a la comparación de sus resultados con los determinados por vía analítica exacta y por integración numérica. Esta comparación se efectúa únicamente en algunos de los puntos notables de la oscilación.

# APLICACIÓN DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

Por lo que se refiere al método de Kryloff, los valores que se obtienen, tanto para  $\theta_1$  y  $\theta_2$  como para los valores de  $\tau_1$  y de  $\tau_2$ , comparados con los resultados encontrados por vía analítica ( $\theta_1$  y  $\theta_2$ ) y por vía numérica ( $\tau_1$  y  $\tau_2$ ) proporcionan una aproximación notablemente satisfactoria en todo el intervalo de  $k$  analizado ( $0 \leq k \leq 1$ ). No ocurre así con el método de Linsted, el cual aun cuando el grado de aproximación aumenta sensiblemente cuando determinamos soluciones de orden superior, no llega a alcanzar la precisión que presenta el de Kryloff en todo el dominio de  $k$  considerado. Así, aun en el caso de la aproximación de tercer orden, el método de Linsted no es ya aplicable para la determinación del primer mínimo para valores de  $k$  superiores a 0,3, siendo la discrepancia que presenta en el cálculo de  $\tau_1$  todavía más acentuada.

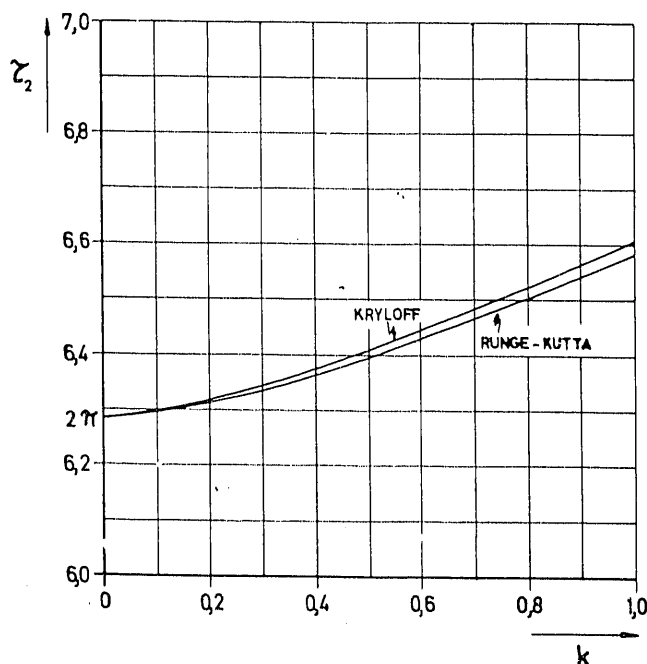


Figura 5.—Valores de  $\tau_2$  frente a  $k$ , según el método de Kryloff y los calculados por integración numérica.

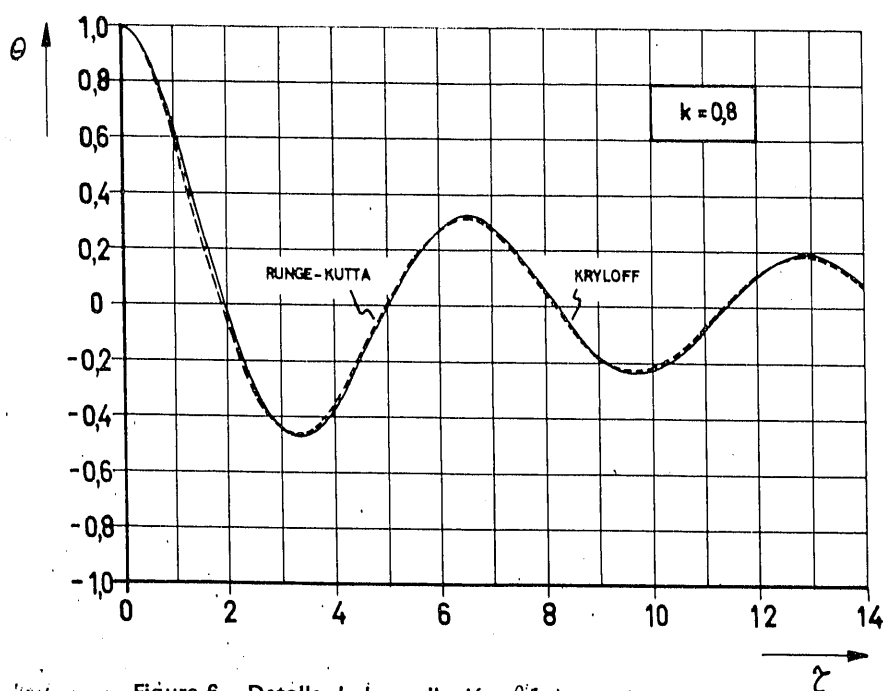


Figura 6.—Detalle de la oscilación  $\theta(\tau)$  para  $k = 0.8$   
 ----- Integración numérica (Runge-Kutta)  
 ————— Solución aproximada (Kryloff)

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Streeter, V.L., Fluid Mechanics. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [2] Kaufmann, W., Fluid Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [3] Rich, G.R., "Surge Tanks" en Handbook of Applied Hydraulics., David, C.V. y Sorensen, K.E., Editores. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [4] Streeter, V.L. y Wylie, E.B. Hydraulic Transients. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [5] Marqués, R., Llorens, M. y Villarrubia, M. "Cálculo de las oscilaciones en las conducciones". Energía, Marzo-Abril, 1977.
- [6] Ralston, A. "Numerical Integration Methods for the Solution for the Ordinary Differential Equations" en Mathematical Methods for Digital Computers., Ralston, A. y Wilf, H., John Wiley, New York, 1960.
- [7] Romanelli, J.M., "Runge-Kutta Methods for the Solution of Ordinary Differential Equations" en Mathematical Methods for Digital Computers., Ralston, A. y Wilf, H., John Wiley, New York, 1960.
- [8] Pipes, L.A., Matemáticas Aplicadas para Ingenieros y Físicos. Ed. del Castillo, Madrid, 1963.
- [9] Abramowitz, M., y Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions Dover, New York, 1965.
- [10] Spiegel, M.R. Transformadas de Laplace. Serie Schaum, McGraw-Hill, Méjico, 1970.

## RESUMEN

Se presenta la aplicación de los métodos de Kryloff-Bogoliuboff y de Linsted-Liapounoff, este último hasta tercer orden, para la resolución de la ecuación diferencial no lineal que aparece en algunos problemas de Hidráulica Aplicada, como por ejemplo el análisis de las oscilaciones de columnas líquidas. En particular, se estudia el régimen no estacionario correspondiente al fenómeno de oscilación de líquido entre dos depósitos a través de un planteamiento adimensional del problema. Se aplican los métodos citados y se procede a la discusión de los resultados obtenidos en sus distintos grados de aproximación.

## NOMENCLATURA

|                  |                                                                                   |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| a                | función de $\tau$                                                                 |
| c                | velocidad                                                                         |
| $c_1$            | velocidad con la que se desplaza la superficie libre del líquido en el depósito 1 |
| $c_2$            | velocidad con la que se desplaza la superficie libre del líquido en el depósito 2 |
| $c_i$            | constantes                                                                        |
| f                | factor de fricción                                                                |
| g                | aceleración de la gravedad                                                        |
| $h_f$            | pérdida de carga                                                                  |
| k                | coeficiente adimensional definido en (11) y en (13)                               |
| $p_1$            | presión en la superficie libre del líquido en el depósito 1                       |
| $p_2$            | presión en la superficie libre del líquido en el depósito 2                       |
| s                | parámetro de la transformación de Laplace                                         |
| s                | coordenada medida sobre la línea de corriente media                               |
| $s_1$            | coordenada s correspondiente al punto 1 de la figura 1                            |
| $s_2$            | coordenada s correspondiente al punto 2 de la figura 1                            |
| t                | tiempo                                                                            |
| $t_0$            | instante inicial del transitorio                                                  |
| z                | eje de coordenadas con origen en la posición de equilibrio del líquido            |
| $z_1$            | posición de la superficie libre del líquido en el depósito 1                      |
| $z_2$            | posición de la superficie libre del líquido en el depósito 2                      |
| $z_{1,0}$        | valor de $z_1$ en el instante $t_0$                                               |
| $A_1$            | área de la sección transversal del depósito 1                                     |
| $A_2$            | área de la sección transversal del depósito 2                                     |
| $A_t$            | área de la sección transversal de la tubería                                      |
| C                | constante de integración                                                          |
| $D_t$            | diámetro interior de la tubería                                                   |
| F                | función arbitraria de $\theta$ y de $d\theta/d\tau$                               |
| K                | coeficiente de pérdida de carga menor                                             |
| L                | longitud de la tubería                                                            |
| $\mathcal{L}$    | símbolo de la transformación de Laplace                                           |
| Re               | número de Reynolds                                                                |
| $\alpha_i$       | funciones de $\tau$                                                               |
| $\bar{\alpha}_i$ | transformadas de Laplace de las funciones $\alpha_i(\tau)$                        |

# APLICACION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DE KRYLOFF, BOGOLIUBOFF Y DE LINSTED, LIAPOUNOFF, PARA EL CALCULO DE OSCILACIONES EN LAS CONDUCCIONES

|                  |                                                                                    |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $\beta$          | constante adimensional                                                             |
| $\theta$         | función adimensional                                                               |
| $\bar{\theta}$   | transformada de Laplace de la función $\theta(\tau)$                               |
| $\theta_0$       | valor inicial de la función $\theta$                                               |
| $\dot{\theta}_0$ | valor inicial de $d\theta/d\tau$                                                   |
| $\theta_i$       | mínimo o máximo de la función $\theta(\tau)$                                       |
| $\theta_I$       | solución de primer orden para la función $\theta$                                  |
| $\theta_{II}$    | solución de segundo orden para la función $\theta$                                 |
| $\theta_{III}$   | solución de tercer orden para la función $\theta$                                  |
| $\theta_1)_I$    | primer mínimo de $\theta(\tau)$ correspondiente a la aproximación de primer orden  |
| $\theta_1)_II$   | primer mínimo de $\theta(\tau)$ correspondiente a la aproximación de segundo orden |
| $\theta_1)_III$  | primer mínimo de $\theta(\tau)$ correspondiente a la aproximación de tercer orden  |
| $\mu$            | constante adimensional                                                             |
| $\pi$            | número pi                                                                          |
| $\rho$           | constante adimensional                                                             |
| $\Sigma$         | sumatorio                                                                          |
| $\tau$           | variable adimensional                                                              |
| $\tau_0$         | valor inicial de la variable $\tau$                                                |
| $\tau_i$         | valor de $\tau$ correspondiente a un mínimo o máximo de la función $\theta(\tau)$  |
| $\tau_1)_I$      | valor de $\tau$ correspondiente al mínimo $\theta_1)_I$                            |
| $\tau_1)_II$     | valor de $\tau$ correspondiente al mínimo $\theta_1)_II$                           |
| $\tau_1)_III$    | valor de $\tau$ correspondiente al mínimo $\theta_1)_III$                          |
| $\varphi$        | fase                                                                               |
| $\varphi_0$      | constante de integración                                                           |
| $\omega$         | pulsación                                                                          |
| $\Omega$         | es la siguiente función de $\tau$ : $\Omega = \omega\tau + \varphi(\tau)$          |
| $\omega_0$       | pulsación de la onda fundamental                                                   |